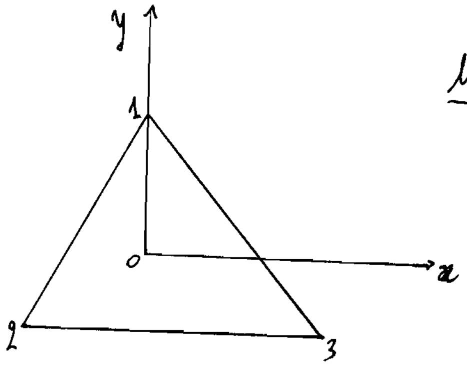
Θεωρία Ομάδων 10/03/06 (1)



Μετασχηματισμοί που αφήνουν το σχήμα αναλλοίωτο

περιστροφή κατά γωνία $\frac{2\pi}{3} \equiv C_3$ $\quad 1\to 2\to 3\to$

(γενικά έχουμε $C_n \equiv \frac{2\pi}{n}$)

$(240^\circ) = C_3^2 = 2\frac{2\pi}{3}$ $\quad 1\to 3\to 2\to 1$

$(360^\circ) = C_3^3 = 3\frac{2\pi}{3}$ $\quad \left.\begin{matrix} 1\to 1 \\ 2\to 2 \\ 3\to 3\end{matrix}\right\}$ e ταυτοτικό στοιχείο

περιστροφή γύρω από τον y-άξονα: $\left.\begin{matrix} 1\to 1 \\ 2\to 3\to 2\end{matrix}\right\}$ C_2

άλλοι μετασχηματισμοί:

$\left\{\begin{matrix} 1\to 3\to 1 \\ 2\to 2\end{matrix}\right.$

$\left\{\begin{matrix} 1\to 2\to 1 \\ 3\to 3\end{matrix}\right.$

κατά 180°

Ιδιότητες Ομάδας

1) Ό,τι πράξη κάνω δεν βγαίνω έξω από το σύνολο.

Ομάδα

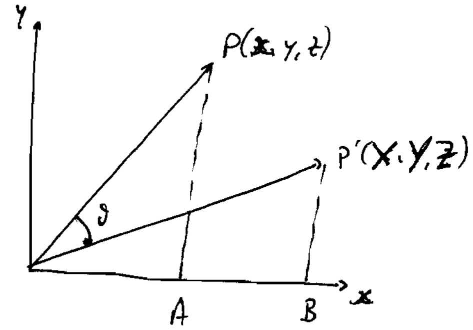
- Σύνολο στοιχείων $G=\{e,\alpha,\beta,\gamma,\dots\}$
- Ορίζουμε μια πράξη συνδυασμού
- $e\alpha = \alpha e = \alpha$ ύπαρξη ταυτοτικού στοιχείου
- $\alpha\cdot\delta \in G$
- $\alpha\cdot b = e$ δηλ. $b = \alpha^{-1}$
- $\alpha(\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma$

το $\{e, C_3, C_3^2\}$ είναι υποομάδα

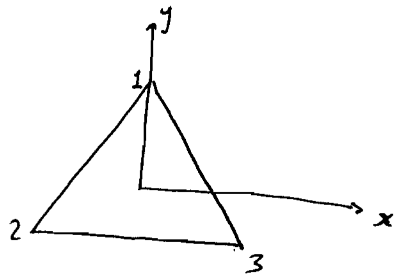
Συνδυαστικός Πίνακας

D_3	e	C_3	C_3^2	C_2	C_2'	C_2''
e	e	C_3	C_3^2	C_2	C_2'	C_2''
C_3	C_3	C_3^2	e	C_2''	C_2	C_2'
C_3^2	C_3^2	e	C_3	C_2'	C_2''	C_2
C_2	C_2	C_2'	C_2''	e	C_3	C_3^2
C_2'	C_2'	C_2''	C_2	C_3^2	e	C_3
C_2''	C_2''	C_2	C_2'	C_3	C_3^2	e

Θεωρία Ομάδων



$$x = X\cos\vartheta - Y\sin\vartheta \qquad X = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta$$
$$y = X\sin\vartheta + Y\cos\vartheta \qquad Y = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta$$
$$z = Z \qquad Z = z$$



$$G = \{e, C_3, C_3^2, C_2, C_2', C_2''\};\ D_3$$

$$C_3 \qquad \frac{2\pi}{3} \qquad 1 \to 2 \to 3 \to 1$$

$$\overset{(1)}{(0,1)}, \quad \overset{(2)}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)}, \quad \overset{(3)}{\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$$

$$C_3 \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$C_3^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$e \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$C_2' \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$C_2'' \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Τάξη = πλήθος στοιχείων ομάδας

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	$a^2=b$	$ab=e$
b	b	$b\alpha=e$	$b^2=\alpha$

$\{e, \alpha, b\} = \{e, \alpha, \alpha^2\}$

$\{e, \alpha, b, c\}$

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	$a^2=e$	$ab=c$	$\alpha c=b$
b	b	$b\alpha=c$	$b^2=e$	$bc=\alpha$
c	c	$c\alpha=b$	$cb=\alpha$	$c^2=e$

	e	a	b	c
e	e	α	b	c
a	α	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

$1, 2, 3, 4, \dots, n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= q \cdot p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Θεωρία ομάδων 3 13/03/06

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Αριθμός μεταθέσεων → $n!$

$n=3$ $(3! = 6)$

S_n

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \triangleq c_2''$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \triangleq c_2, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \triangleq c_2'$$

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \triangleq c_3^2, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \triangleq c_3.$$

$\alpha = (12)(3)$

$b = (1)(23)$

$c = (13)(2)$

$d = (132)$

$f = (123)$

Θεωρία Ομάδων ① 03/04/06

$a \sim a$

$a \sim b \Rightarrow b \sim \alpha$

$\alpha \sim b \ , \ b \sim c \Rightarrow \alpha \sim c$

$\overset{N}{G} \supset \overset{n}{U}$ $\overset{N}{G} = \tilde{U} + x_1 \cdot \tilde{U} + x_2 \cdot \tilde{U} + \dots$

$x_1 P_i = x_2 \cdot P_j \Rightarrow x_1 = x_2 P_j \cdot P_i^{-1} \Rightarrow x_1 \cdot P_q = x_2 \cdot (\underbrace{P_j \cdot P_i^{-1} P_q}_{P_r})$

$\left.\begin{matrix} P_j, P_i \\ P_q \end{matrix}\right\} \in U$ πρέπει πάντα $\boxed{N/n = \text{ακέραιος}}$

$\boxed{a = c^{-1} b . c}$ τα a, b λέγονται συζυγή αν υπάρχει 3ο στοιχείο της ομάδας (c) ώστε να ισχύει η σχέση.

$a = c^{-1} \cdot b \cdot c \Rightarrow c \cdot a c^{-1} = \underbrace{c \cdot c^{-1}}_{e} b \cdot \underbrace{c \cdot c^{-1}}_{e} = b$

$\downarrow$

$(c^{-1})^{-1} \cdot \alpha \cdot (c^{-1})$

$\downarrow$

$b = c'^{-1} \cdot a \cdot c'$

$\alpha = c^{-1} \cdot b \cdot c \ , \ b = g^{-1} d \cdot g \Rightarrow \alpha = c^{-1} \cdot g^{-1} \cdot d \cdot g \cdot c$

$= (g \cdot c)^{-1} d \cdot (g \cdot c)$

$\downarrow$

$f^{-1} \cdot d \cdot f \Rightarrow \alpha = f^{-1} \cdot d \cdot f$

Ο αριθμός των στοιχείων κάθε κλάσης διαιρεί την τάξη της ομάδας.

πχ

D_3 $N = 6$

το $\{e\}$ είναι πάντα μια κλάση από μόνο του.

$c^{-1} e \cdot c = e$

Όταν ένα στοιχείο έχει τάξη n τότε όλα τα στοιχεία της κλάσης έχουν τάξη n.

$$\boxed{b^n = e}$$

Πχ

$$D_3 = \{e, c_3, c_3^2, c_2, c_2', c_2''\} \qquad c_2^2 = c_2'^2 = e$$

$$e = c_3^3 = (c_3^2)^3$$

Αν $\alpha = c^{-1} b \cdot c$ νδο $\alpha^n = e$

$$\Rightarrow \alpha^n = \overbrace{(c^{-1} b \cdot c)\cdot(c^{-1} b \cdot c)\cdots(c^{-1} b \cdot c)}^{n\text{-φορές}} = c^{-1} \cdot b^n \cdot c$$

$$= c^{-1} e \cdot c = e$$

Δύο στοιχεία που ανήκουν στην ίδια κλάση έχουν ίδια ~~κλάση~~ τάξη.

$$\cancel{D_4 = \{e, c_4, c_4^2, c_4^3, c_{2x}, c_{2y}, c_{2x}', c_{2y}'\}}$$

D_3 $\quad K_e = \{e\}$, $K_3 = \{c_3, c_3^2\}$, $K_2 = \{c_2, c_2', c_2''\}$

$$K_e \cdot K_3 = \{e \cdot c_3, e \cdot c_3^2\} = K_3$$

$$K_3 \cdot K_3 = 2e \oplus c_3 \oplus c_3^2 = 2K_e \oplus K_3$$

Όλα τα στοιχεία της ομάδας που αντιμετατίθενται με κάποιο στοιχείο α, δημιουργούν μια υποομάδα.

$\alpha \qquad V_\alpha = \{b ; \alpha b = b\alpha\}$

$\alpha b_1^{-1} = b_1^{-1}\alpha \Leftarrow b_1 \cdot \alpha = \alpha \cdot b_1$

$b_2 \cdot \alpha = \alpha \cdot b_2 \qquad (b_1 \cdot b_2)\cdot \alpha = b_1 \cdot (b_2 \cdot \alpha) = b_1 \cdot (\alpha \cdot b_2) = \alpha(b_1 \cdot b_2)$

$$V_e = G$$

Αν ένα στοιχείο α αντιμετατίθεται ~~με~~ όλα τα στοιχεία της ομάδας τότε η υποομάδα που ορίζει, ταυτίζεται με την ομάδα.

Θεωρία Ομάδων

$V_a \subset G = e \cdot V_a + x_1 \cdot V_a + x_2 \cdot V_a + \dots$

$e \cdot a \cdot e^{-1} = a,\ x_1 \cdot a \cdot x_1^{-1} = \alpha,\ x_2 \cdot \alpha \cdot x_2^{-1} = a_2, \dots$

N_1 N_2

G_1 , G_2

$\{e, a_1, a_2, \dots\}$ $\{e, b_1, b_2, \dots\}$

$G_1 \otimes G_2$ $\{a_i \cdot b_j ; a_i \in G_1,\ b_j \in G_2\}$

$\downarrow$

$\sum_i k_{1i}$ $\sum k_{2j}$

$G \supset H$

υποομάδα

$c \cdot H \cdot c^{-1}$

$c \in G$

$a, b \in H$

$(c \cdot a \cdot c^{-1})(c \cdot b \cdot c^{-1}) = c \cdot a \cdot \cancel{c^{-1}} \cancel{c} \cdot b \cdot c^{-1}$

$= c\,(ab) \cdot c^{-1}$

D_3 $\{e\}$, $\{e, c_3, c_3^2\}$, $\{e, c_2\}$, $\{e, c_2'\}$, $\{e, c_2''\}$

$c \cdot H \cdot c^{-1} = H$ (αμετάβλητη υποομάδα) invariant subgroup

Για να είναι αμετάβλητη η υποομάδα πρέπει να περιέχει πλήρεις κλάσεις.

Θεωρία Ομάδων (1) 06/04/06

$$D_3 = \{e, c_3, c_3^2, c_2, c_2', c_2''\}$$

$$\Phi_1 = x \cdot f(r)$$

$$\Phi_2 = y \cdot f(r)$$

$$c_3\{\Phi_1\} = c_3\{x \cdot f(r)\} = -\frac{x}{2} \cdot f(r) + \frac{\sqrt{3}}{2} y \cdot f(r) = -\frac{\Phi_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\Phi_2$$

$$c_3\{\Phi_2\} = c_3\{y \cdot f(r)\} = -\frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot f(r) - \frac{1}{2} y \cdot f(r) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \Phi_1 - \frac{1}{2} \cdot \Phi_2$$

παραμένουν μέσα στο χώρο $\{\Phi_1, \Phi_2\}$

$$\Rightarrow c_3 \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} \quad \text{ή} \quad c_3\{\Phi_1, \Phi_2\} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \{\Phi_1, \Phi_2\}$$

Ομοίως,

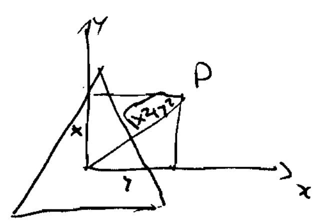
$$c_3^2\{\Phi_1, \Phi_2\} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}\{\Phi_1, \Phi_2\} \quad , \quad e\{\Phi_1, \Phi_2\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\{\Phi_1, \Phi_2\}$$

$$c_2\{\Phi_1, \Phi_2\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\{\Phi_1, \Phi_2\} \quad , \quad c_2'\{\Phi_1, \Phi_2\} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \{\Phi_1, \Phi_2\}$$

$$c_2''\{\Phi_1 \Phi_2\} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \{\Phi_1, \Phi_2\}$$

$$\Phi_3 = z \cdot f(r)$$

$$\Phi_4 = (x^2+y^2) \cdot f(r)$$



$$c_3 \cdot \{\Phi_4\} = \Phi_4 = (1) \cdot \Phi_4$$

$$c_3^2 \cdot \{\Phi_4\} = \Phi_4 = (1) \cdot \Phi_4$$

$$c_2 \cdot \{\Phi_4\} = \Phi_4 = (1) \cdot \Phi_4$$

$$c_2' \cdot \{\Phi_4\} = \Phi_4 = (1) \cdot \Phi_4$$

$$c_2'' \cdot \{\Phi_4\} = \Phi_4 = (1) \cdot \Phi_4$$

$$c_3 \cdot \{\Phi_3\} = \Phi_3 = (1) \cdot \Phi_3$$

$$c_3^2 \cdot \{\Phi_3\} = \Phi_3 = (1) \cdot \Phi_3$$

$$c_2 \cdot \{\Phi_3\} = -\Phi_3 = (-1) \cdot \Phi_3$$

$$c_2' \cdot \{\Phi_3\} = -\Phi_3 = (-1) \cdot \Phi_3$$

$$c_2''\{\Phi_3\} = -\Phi_3 = (-1) \cdot \Phi_3$$

Αναπαράσταση $D(G)$ είναι ένας ομομορφισμός της ομάδας G πάνω σε μια ομάδα αντιστρεπτών γραμμικών τελεστών P που απεικονίζουν ένα γραμμικό χώρο L στον εαυτό του.

N $(n \times n)$ D πίνακες

$\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$

$$g \to T(g) \cdot \phi_j = \boxed{\sum D_{ij}(g) \cdot \phi_i \equiv D_{ij} \phi_i}$$

$$A \cdot B = C \iff D(A) \cdot D(B) = D(C)$$

$$T(A) \cdot \phi_j = D_{ij}(A) \cdot \phi_i$$

$$T(B) \cdot \phi_k = D_{\ell k}(B) \cdot \phi_\ell$$

$$T(c) \cdot \phi_k = D_{mk}(c) \cdot \phi_m$$

$$T(A) \cdot T(B) \phi_k = T(A) \cdot \left[\sum_\ell D_{\ell k}(B) \phi_\ell \right]$$

$$= \sum_\ell D_{\ell k}(B) \cdot \left(T(A) \cdot \phi_\ell \right) = \sum_\ell D_{\ell k}(B) \sum_m D_{m\ell}(A) \cdot \phi_m$$

$$= \sum_\ell \sum_m D_{m\ell}(A) \cdot D_{\ell k}(B) \cdot \phi_m$$

$$T(c) \cdot \phi_k \overset{?}{=} \sum_m D_{mk}(c) \cdot \phi_m$$

$$\boxed{D_{mk}(c) = \sum_\ell D_{m\ell}(A) \cdot D_{\ell k}(B)}$$

Αλλαγή Βάσης

$$\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\} \rightarrow \{\phi_1', \phi_2', \ldots, \phi_n'\}$$

$$\phi_j' = \sum_i P_{ij} \cdot \phi_i \Rightarrow \phi_j = \sum_i P_{ij}^{-1} \cdot \phi_i'$$

$$A \rightarrow T(A) \cdot \phi_j' = T(A) \cdot \left[\sum_i P_{ij} \cdot \phi_i\right] = P_{ij} \left[T(A) \cdot \phi_i\right] = P_{ij} \left[D_{ki}(A) \cdot \phi_k\right]$$

$$= P_{ij} \left\{ D_{ki}(A) \cdot \left[P_{\ell k}^{-1} \cdot \phi_\ell' \right] \right\}$$

$$T(A) \cdot \phi_j' = D_{\ell j}'(A) \cdot \phi_\ell'$$

$$\Rightarrow D_{\ell j}'(A) = P_{\ell k}^{-1} \cdot D_{ki}(A) \cdot P_{ij} \Rightarrow \boxed{D'(A) = P^{-1} \cdot D(A) \cdot P}$$

Επομένως οι $D(A)$ κι $D'(A)$ είναι <u>ισοδύναμες</u>, διότι συνδέονται μεταξύ τους με τον πίνακα P με την παραπάνω σχέση.

<u>ή αλλιώς</u>

Δύο αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες, αν υπάρχει αντιστρέψιμος τελεστής S π[...] να τις συνδέει με τη σχέση $P_\alpha' = S^{-1} P_\alpha \cdot S$, που να ισχύει για κάθε στοι[...] της ομάδας.

Θεωρία Ομάδων ① 07/04/06

$D_3 = \{e, C_3, C_3^2, C_2^0, C_2^1, C_2^4\}$

$$C_3\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = \left(\begin{array}{cc|c} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

$\varphi_1 = x \cdot f(r)$

$\varphi_2 = y \cdot f(r)$

$\varphi_3 = z \cdot f(r)$

$\varphi_1' = (x+y) \cdot f(r)$

$\varphi_2' = (y+z) \cdot f(r)$

$\varphi_3' = (x+z) \cdot f(r)$

$$\rightarrow C_3 \cdot \{\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3'\} = \begin{pmatrix} -1/2 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{3+\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{3}/2 & \frac{3-\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ -\sqrt{3}/2 & \frac{1-\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}-3}{4} \end{pmatrix} \cdot (\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3')$$

Μια αναπαράσταση $D_{ij}(T)$ μιας ομάδας G θα λέμε ότι είναι <u>αναγώγιμη</u> σε αναπαραστάσεις $D_{ij}^{(1)} \oplus D_{ij}^{(2)} \oplus D_{ij}^{(3)} \oplus \dots \oplus D_{ij}^{(r)}$ αν υπάρχει κάποιος μετασχηματισμός $D'(T) = P^{-1} \cdot D(T) \cdot P$ που μετασχηματίζει του πίνακα $D_{ij}(T)$ στη διαγώνια μορφή:

$$\begin{pmatrix} D^{(1)}(T) & & O \\ & D^{(2)}(T) & \\ O & \ddots & \\ & & D^{(r)}(T) \end{pmatrix}.$$

[δεν είναι μοναδιαστατες οι $D^{(r)}(T)$]

$D' = P^{-1} \cdot D \cdot P$

$\rightarrow \underline{tr[D'] = tr[D]}$

D_3	$\{e\}$	$\{C_3\}$	$\{C_3^2\}$	$\{C_2\}$	$\{C_2'\}$	$\{C_2''\}$	
Γ (E)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\{\varphi_1, \varphi_2\}$
A_1 (I)	1	1	1	1	1	1	φ_4
A_2	1	1	1	-1	-1	-1	φ_3
$\chi[\Gamma(E)]$	2	-1	-1	0	0	0	

D_3	$\{e\}$	$\{C_3, C_3^2\}$	$\{C_2, C_2', C_2''\}$
(I) A_1	1	1	1
A_2	1	$\alpha = 1$	$\beta = -1$
$\Gamma(E)$	2	$\gamma = -1$	$\delta = 0$
$D^{(6)}$	6		

$$6 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$$

$$\Rightarrow n_1 = n_2 = 1$$
$$n_3 = 2$$

γραμμές : $1 + 2\alpha + 3\beta = 0$ ($1^{η} \times 2^{η}$) (ορθογώνιες μεταξύ τους)

στήλες : $1 + \alpha + 2\gamma = 0$ ($1^{η} \times 2^{η}$)

$1 + \beta + 2\delta = 0$ ($1^{η} \times 3^{η}$) (ορθογώνιες μεταξύ τους)

$1 + \alpha\beta + \gamma\delta = 0$ ($2^{η} \times 3^{η}$)

Ακόμα : $1 + 2\alpha^2 + 3\beta^2 = 6$ ($2^{η}$ γραμμή)

$4 + 2\gamma^2 + 3\delta^2 = 6$ ($3^{η}$ γραμμή)

Θεωρία Ομάδων

(1) 10/04/06

$\hat{d}_i \quad , i=1,\dots,6$

$$D^{(6)} = \{\underbrace{x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx}_{L}\}$$

D_3	$\{e\}$	$\{C_3, C_3^2\}$	$\{C_2, C_2', C_2''\}$
$A_1(I)$	1	1	1
A_2	1	1	-1
$E(\Gamma)$	2	-1	0
$\chi[D^{(6)}]$	6	0	2

$tr\{C_3\}=0$

$\{e\}$ $\quad x \to x$, $y \to y$, $z \to z$

$e \cdot \{L\} \Rightarrow e(x^2) = x^2 + 0\cdot y^2 + \dots$

$y^2 = 0\cdot x^2 + y^2 + 0\cdot z^2 + \dots$

$z^2 = \dots \quad z^2 \dots$

$\{C_2\}$ $\quad x \to -x$, $y \to y$, $z \to -z$

$$\chi\{C_2\} = \underset{x^2}{1} + \underset{y^2}{1} + \underset{z^2}{1} + \underset{xy}{(-1)} + \underset{yz}{(-1)} + \underset{zx}{(1)} =$$

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/4 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \{C_3\}$$

$$D^{(6)} = 2A_1 + 2E$$

Προκύπτει από αυτή τη σχέση ότι ο χώρος ανάγεται σε 2 διδιάστατους και 2 μονοδιάστατους μη αναγώγιμους χώρους.

Συναρτήσεις που παράγονται αμετάβλητες:

$$(3z^2 - r^2),\ (x^2+y^2+z^2),\ (\underbrace{2xy,\ x^2-y^2}),\ (2yz,\ -2zx)$$

κανονικοποιημένα με $\frac{16\pi}{15}$

Ορίζουμε ως <u>χαρακτήρες μιας αναπαράστασης</u> τους τελεστές $X(g)=Tr\{P_g\}$ για κάθε στοιχείο της ομάδας $g\in G$, όπου P_g είναι οι τελεστές που αντιστοιχούν στα στοιχεία της ομάδας και δρουν στο χώρο L. Αν διαλέξουμε μια βάση $\{e^{(i)}\}$ τότε οι χαρακτήρες είναι οι αριθμοί

$$\sum_{i=1}^{n} \langle e^{(i)} | P_g | e^{(i)} \rangle = \sum_i D_{ii}(g)$$ δηλ. το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων.

$D_4 \quad \{e, C_4, C_4^2, C_4^3, C_{2x}, C_{2y}, C_{2x}', C_{2y}'\}$

1) <u>Πολλαπλασιαστικός πίνακας</u>

D_4	e	C_4	C_4^2	C_4^3	C_{2x}	C_{2y}	C_{2x}'	C_{2y}'
e	e	C_4	C_4^2	C_4^3	C_{2x}	C_{2y}	C_{2x}'	C_{2y}'
C_4	C_4	C_4^2	C_4^3	e	C_{2x}'	C_{2y}'	C_{2y}	C_{2x}
C_4^2	C_4^2	C_4^3	e	C_4	C_{2y}	C_{2x}	C_{2y}'	C_{2x}'
C_4^3	C_4^3	e	C_4	C_4^2	C_{2y}'	C_{2x}'	C_{2x}	C_{2y}
C_{2x}	C_{2x}	C_{2y}'	C_{2y}	C_{2x}'	e	C_4^2	C_4^3	C_4
C_{2y}	C_{2y}	C_{2x}'	C_{2x}	C_{2y}'	C_4^2	e	C_4	C_4^3
C_{2x}^{*}	C_{2x}'	C_{2x}	C_{2y}'	C_{2y}	C_4	C_4^3	e	C_4^2
C_{2y}'	C_{2y}'	C_{2y}	C_{2x}'	C_{2x}	C_4^3	C_4	C_4^2	e

2) 5 κλάσεις : $\{e\}, \{C_4^2\}, \{C_4, C_4^3\}, \{C_{2x}, C_{2y}\}, \{C_{2x}', C_{2y}'\}$

3) Επομένως 5 μη-αναγώγιμες αναπαραστάσεις (<u>μόνο</u>)

4) $N = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 8 \Rightarrow$ προκύπτει μία $\to$ 2-D
και $4 \to$ 1-D

D_4	$\{e\}$	$\{C_4^2\}$	$\{C_4, C_4^3\}$	$\{C_{2x}, C_{2y}\}$	$\{C_{2x}', C_{2y}'\}$
$A_1(I)$	1	1	1	1	1
A_2	1	$\varepsilon=1$	$\zeta=1$	$\eta=-1$	$\theta=-1$
B_1	1	$\iota=1$	$\kappa=-1$	$\lambda=+1$	$\mu=-1$
B_2	1	$\nu=1$	$\xi=-1$	$\pi=-1$	$\rho=1$
$E(\Gamma)$	2	$\alpha=-2$	$\beta=0$	$\gamma=0$	$\delta=0$

$1^{\eta} \times 2^{\eta}$ γρ.: $1 + \varepsilon + 2\zeta + 2\eta + 2\theta = 0$

$1^{\eta} \times 3^{\eta}$ γρ: $1 + \iota + 2\kappa + 2\lambda + 2\mu = 0$

$1^{\eta} \times 4^{\eta}$ γρ: $1 + \nu + 2\xi + 2\pi + 2\rho = 0$

επίσης ισχύει $1 + \varepsilon^2 + 2\zeta^2 + 2\eta^2 + 2\theta^2 = 8$

$$\underline{\varepsilon = \iota = \nu = 1}$$

A_1: $(x^2+y^2)\cdot f(r)$

A_2: $z\cdot f(r)$

B_1: $(x^2-y^2)\cdot f(r)$

B_2: $xy\cdot f(r)$

Θεωρία Ομάδων (1) 13/04/2006

Αναδιατάσσω τα στοιχεία του πολλαπλασιαστικού πίνακα ώστε στη διαγώνιο να έχω στοιχεία το e.

	e	C_3	C_3^2	C_2	C_2'	C_2''
e	e	C_3	C_3^2	C_2	C_2'	C_2''
C_3^2	C_3^2	e	C_3	C_2'	C_2''	C_2
C_3	C_3	C_3^2	e	C_2''	C_2	C_2'
C_2	C_2	C_2'	C_2''	e	C_3	C_3^2
C_2'	C_2'	C_2''	C_2	C_3^2	e	C_3
C_2''	C_2''	C_2	C_2'	C_3	C_3^2	e

$= (C_3)^{-1}$ ⋮

$$D^{\{reg\}}(e) = I \qquad D^{\{reg\}}(C_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi = 0, \quad \chi(e) = 6$

↓

όλων των πινάκων

Για να είναι αναπαράσταση θα πρέπει $D^{(reg)}(A) \cdot D^{(reg)}(B) = D^{(reg)}(A \cdot B = C)$

Στην κανονική αναπαράσταση η κάθε μη-αναγώγιμη αναπαράσταση εμφανίζεται τόσες φορές όσες είναι η διάστασή της.

Ακολουθούν αποδείξεις...

Θεωρία Ομάδων ① 08/05/2006

$$\sum_{A\in G} D^{(\mu)}_{ij}(A)\cdot D^{(\lambda)*}_{k\ell}(A) = \frac{g}{n_\mu}\cdot \delta_{j\ell}\cdot \delta_{ik}\cdot \delta_{\lambda\mu}$$

πολ/ζω με $n_\mu \cdot D^{(\mu)-1}_{ji}(B)$ και αθροίζω ως προς μ, i, j

$$\Rightarrow g\cdot\sum_{\mu,i,j} \delta_{j\ell}\cdot\delta_{ik}\cdot\delta_{\lambda\mu}\cdot D^{(\mu)-1}_{ji}(B) = \sum_{\mu,i,j,A} n_\mu\cdot D^{(\mu)-1}_{ji}(B)\cdot D^{(\mu)}_{ij}(A)\cdot D^{(\lambda)*}_{k\ell}(A)$$

$$\Rightarrow g\cdot \underbrace{D^{(\lambda)-1}_{\ell k}(B)}_{} = \underbrace{\sum_{\mu,i,j,A} n_\mu\cdot D^{(\mu)-1}_{ji}(B)\cdot D^{(\mu)}_{ij}(A)}_{g\cdot\delta_{AB}}\cdot \underbrace{D^{(\lambda)-1}_{\ell k}(A)}_{}$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu,i,j} n_\mu\cdot D^{(\mu)-1}_{ji}(B)\cdot D^{(\mu)}_{ij}(A) = g\cdot\delta_{AB} \Rightarrow \boxed{\sum_{\mu,i,j}^{r'} n_\mu\, D^{(\mu)*}_{ij}(B)\cdot D^{(\mu)}(A) = g\cdot\delta_{AB}}$$

r': αριθμός των αναγώγιμων αναπαραστάσεων.

Ορθογωνιότητα χαρακτήρων:

$$\sum_{T\in G} X^{(\lambda)*}(T)\cdot X^{(\mu)}(T) = g\,\delta_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha=1}^{r} n_\alpha X^{(\lambda)*}(k_\alpha)\, X^{(\mu)}(k_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{r}\left[\sqrt{n_\alpha}\cdot X^{(\lambda)*}(k_\alpha)\right]\left[\sqrt{n_\alpha}\, X^{(\mu)}(k_\alpha)\right]$$

(r: # κλάσεων) r-διάστατος χώρος

(r': # αναπαραστάσεων)

$\Rightarrow \boxed{r'\leq r}$

πολ/ζω με $X^{(\mu)*}(k_b)$ κι αθροίζω ως προς μ:

$$\Rightarrow \sum_{\mu} g\,\delta_{\lambda\mu} X^{(\mu)*}(k_b) = \sum_{\alpha=1}^{r}\underbrace{\sum_{\mu=1}^{r'} n_\alpha X^{(\mu)}(k_\alpha) X^{(\mu)*}(k_b)}_{g\cdot\delta_{ab}} X^{(\lambda)*}(k_\alpha) \Rightarrow$$

$$= g\, X^{(\lambda)*}(k_b)$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu=1}^{r'} n_\alpha X^{(\mu)}(k_\alpha)\cdot X^{(\mu)*}(k_b) = g\cdot\delta_{ab}$$ (r'-διάστατος χώρος) $\boxed{r\leq r'}$

$\boxed{r=r'}$

Προβολές

$D^{(\lambda)}_{ij}(T)$, $\phi \in L$

$$\phi^{(\lambda)}_{ij} = \sum_{T\in G} D^{(\lambda)*}_{ij}(T)\left(\tilde{T}\phi\right)$$

$$\delta_{i\ell} = \sum_k D^{(\lambda)*}_{ik}(A^{-1})\cdot D^{(\lambda)*}_{k\ell}(A) = D^{(\lambda)*}_{i\ell}(\underbrace{A^{-1}\cdot A}) = D^{(\lambda)*}_{i\ell}(e) = \delta_{i\ell}$$

$$A\cdot\Phi^{(\lambda)}_{ij} = \sum_{T\in G} D^{(\lambda)*}_{ij}(T)\left(\tilde{A}\tilde{T}\varphi\right) = \sum_{\ell}\delta_{i\ell}\sum_{T\in G} D^{(\lambda)*}_{\ell j}(T)\cdot\left(\tilde{A}\tilde{T}\varphi\right)$$

$$= \sum_{k,\ell} D^{(\lambda)*}_{ik}(A^{-1})\, D^{(\lambda)*}_{k\ell}(A)\cdot\sum_{T\in G} D^{(\lambda)*}_{\ell j}(T)\left(\tilde{A}\tilde{T}\varphi\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{K} D^{(\lambda)*}_{ik}(A^{-1})}_{\sum_K D^{(\lambda)}_{ki}(A)}\cdot\underbrace{\sum_{T} D^{(\lambda)*}_{kj}(AT)\cdot\left(\tilde{A}\cdot\tilde{T}\varphi\right)}_{\varphi^{(\lambda)}_{kj}}$$

$$\Rightarrow A\cdot\phi^{(\lambda)}_{ij} = \sum_{K} D^{(\lambda)}_{ki}(A)\cdot\varphi^{(\lambda)}_{kj}$$

$$P^{(\lambda)}_{ij} \equiv \sum_{T\in G} D^{(\lambda)*}_{ij}(T)\left(\tilde{T}\quad\right)$$

(τελεστές προβολής)

$$P^{(\lambda)} \equiv \sum_{T} \chi^{(\lambda)*}(T)\left(\tilde{T}\quad\right)$$