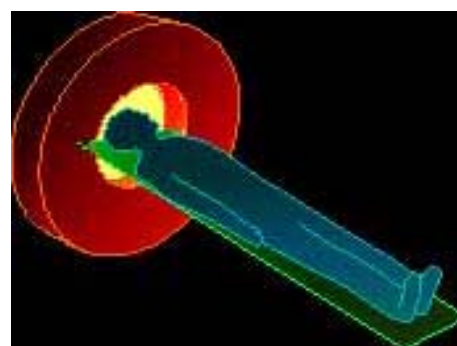
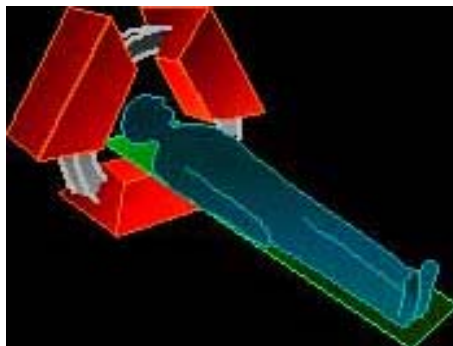
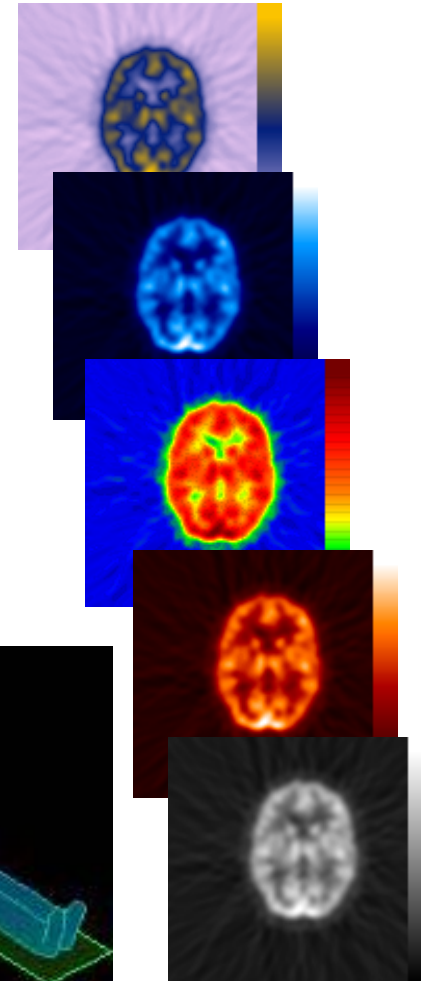
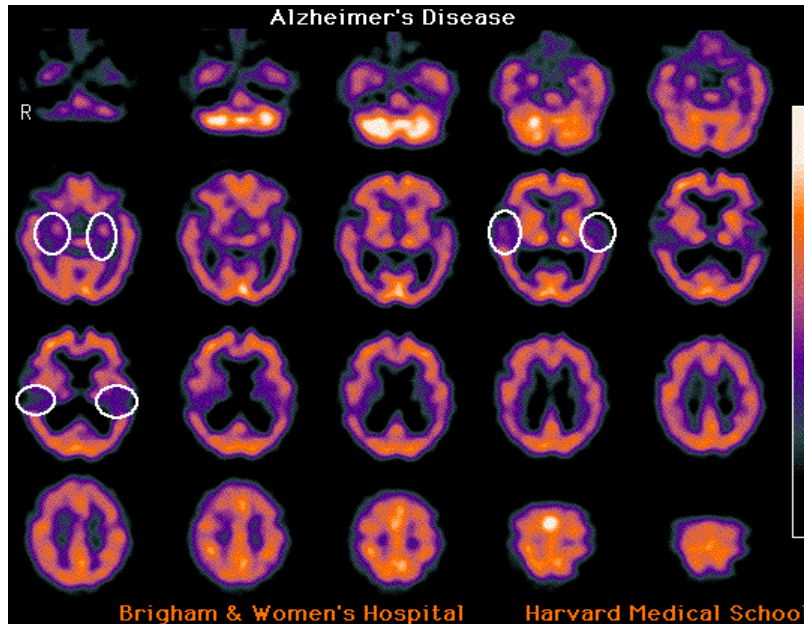


2. ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΜΕ ΙΣΟΤΟΠΑ



2. Αναπαράσταση ψηφιακής εικόνας

Μονόχρωμη εικόνα ή απλά εικόνα :

διδιάστατη συνάρτηση φωτεινότητας $f(x, y)$, όπου x, y είναι οι συντεταγμένες στο επίπεδο και η τιμή f , σε οποιοδήποτε σημείο είναι **ανάλογη** της **φωτεινότητας** (ή αλλιώς του επιπέδου γκρι) της εικόνας σε αυτό το σημείο



Μπορούμε να αναπαραστήσουμε την συνάρτηση f γραφικά χρησιμοποιώντας και τρίτο άξονα για την τιμή της φωτεινότητας. Με αυτό τον τρόπο παρατηρούμε περιοχές με **έντονη διακύμανση** (**κορυφές**) και **ομαλές περιοχές** (**οροπέδια**) όπου η φωτεινότητα είναι περίπου σταθερή.

2.1 Ψηφιακή Εικόνα

Η ψηφιακή εικόνα είναι μια **κβαντισμένη εικόνα**, με κβάντωση :

- χωρικές συντεταγμένες (sampling)
- επίπεδα φωτεινότητας (quantisation).

Η ψηφιακή εικόνα μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας πίνακας **στοιχείων (pixels, picture elements)** :

- δείκτες στήλης
- δείκτες γραμμής

Ιατρική Ψηφιακή Εικόνα

Οι τιμές των pixels αντιπροσωπεύουν παραμέτρους :

- **Computed Tomography** (ακτινογραφία) → εξασθένηση των ακτίνων-Χ
- **Magnetic Resonance Imaging** → πυκνότητα πρωτονίων
- Υπέρηχοι → ακουστική εμπέδηση
- Πυρηνική Ιατρική → κατανομή ενός ραδιοφαρμάκου

Το μέγεθος της ψηφιακής εικόνας ποικίλει ανάλογα με την εφαρμογή, χρησιμοποιούνται ακέραιες δυνάμεις του 2. Ένα τυπικό μέγεθος που αντιστοιχεί σε ποιότητα εικόνας τηλεόρασης είναι πίνακας 512x512 με 128 επίπεδα του γκρι.

Έγχρωμη Ψηφιακή Εικόνα

Η συνάρτηση f μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα **διάνυσμα** με **τρεις** συνιστώσες όπου η καθεμιά αντιστοιχεί σε ένα βασικό χρώμα.

Ο συνδυασμός των τριών συνιστωσών δίνει το ακριβές χρώμα ενός σημείου .

Για την επιλογή των τριών βασικών χρωμάτων υπάρχουν πολλά πρότυπα με πιο διαδεδομένο το **RGB (Red Green Blue)**.



Ψηφιακή επεξεργασία εικόνας

ΑΠΟΣΚΟΠΕΙ :

- ✓ βελτίωση της εμφάνισής τους
- ✓ καλύτερη παρατήρησή τους από τον άνθρωπο
- ✓ προετοιμασία τους για αυτόματη αναγνώριση
- ✓ μέτρηση των χαρακτηριστικών δομών που υπάρχουν σε αυτές.

Η διαδικασία της επεξεργασίας είναι **ημιαυτοματοποιημένη** (συνεργασία ανθρώπου και υπολογιστή), είτε **πλήρως αυτοματοποιημένη**.

Προτυποποίηση Ψηφιακής επεξεργασίας

Για την προτυποποίηση της διαδικασίας επεξεργασίας εικόνας μελετούνται θέματα :

- ισχύς** του υπολογιστικού συστήματος που αναλαμβάνει την επεξεργασία
- χρόνος** επεξεργασίας
- συμμετοχή** του χρήστη στην διαδικασία
- είδος** του αρχείου στο οποίο αποθηκεύεται η εικόνα
- τρόπος** πρόσβασης σε αυτά τα αρχεία

Βελτίωση Ψηφιακής Εικόνας

Ανάπτυξη μεθόδων για :

- ενίσχυση ή ελάττωση των χαρακτηριστικών μιας εικόνας
- εγκυρότερες οι εξαγόμενες πληροφορίες
- ευκολότερη εφαρμογή άλλων τεχνικών (image enhancement).

Ενίσχυση αντίθεσης (contrast enhancement)



Εξομάλυνση (Smoothing)



Διαδικασία Ψηφιακής Επεξεργασίας

Οι διαδικασίες εφαρμόζονται

- στο πεδίο του χώρου (**spatial domain filtering**)
- στο πεδίο της συχνότητας (**frequency domain filtering**)

Η μετάβαση από το πεδίο του **χώρου** στο πεδίο της **συχνότητας** υλοποιείται με τη βοήθεια του διδιάστατου **μετασχηματισμού Fourier**

Πραγματοποιούνται μετρήσεις σε χαρακτηριστικά της εικόνας :

- ✓ Φωτεινότητα
- ✓ Θέση
- ✓ Μέγεθος
- ✓ Σχήμα

γίνεται στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων

2.2 Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

Ο **μετασχηματισμός Fourier (FT)**

μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής και ολοκληρώσιμη, δίνεται από τη σχέση:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx$$

Ο **αντίστροφος μετασχηματισμός**

Fourier (IFT) δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega x) d\omega$$

Φάσμα της συχνότητας ορίζεται το μέτρο της συνάρτησης $F(k)$, η οποία είναι συχνά μιγαδική συνάρτηση:

$$F(k) = R(k) + j I(k)$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

Η **φάση** ορίζεται ως:

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$$

Στην επεξεργασία εικόνας χρησιμοποιείται ο διδιάστατος **2D-FT**, που ορίζεται :

$$\begin{aligned} F(\bar{\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \exp(-j\bar{\omega}\bar{x}) d\bar{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \exp[-j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)] dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Όπου: $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ και $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\bar{\omega}\bar{x}) d\bar{\omega} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1, \omega_2) \exp[j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)] d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned}$$

Παρατηρείται ότι με τον FT μια συνάρτηση $f(x)$ αναλύεται σε ένα **άπειρο άθροισμα** ημιτόνων και συνημιτόνων εφόσον:

$$\exp(j\omega x) = \cos(\omega x) + j \sin(\omega x)$$

και κάθε τιμή του ω καθορίζει τη συχνότητα του ζεύγους **ημιτόνου-συνημιτόνου** στο οποίο αντιστοιχεί.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης μιας συνάρτησης με τη βοήθεια του FT αναφέρονται ως **το πεδίο των συχνοτήτων**.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Συνάρτηση $f(x_1, x_2)$	Μετασχηματισμός $F(k_1, k_2)$
Περιστροφή	$f(\pm x_1, \pm x_2)$	$F(\pm k_1, \pm k_2)$
Γραμμικότητα	$a f(x_1, x_2) + b g(x_1, x_2)$	$a F(k_1, k_2) + b G(k_1, k_2)$
Διαχωρισιμότητα	$f(x_1)g(x_2)$	$F(k_1)G(k_2)$
Αλλαγή Κλίμακας	$f(ax_1, bx_2)$	$\frac{F(k_1/a, k_2/b)}{ ab }$
Μετατόπιση	$f(x_1 \pm x_{01}, x_2 \pm x_{02})$	$\exp[\pm j2\pi(x_{01}k_1 + x_{02}k_2)]F(k_1, k_2)$
Διαμόρφωση	$\exp[\pm j2\pi(ax_1 + bx_2)]f(x_1, x_2)$	$F(x_1 \mp a, x_2 \mp b)$
Συνέλιξη	$g(x_1, x_2) = h(x_1, x_2) * f(x_1, x_2)$	$G(k_1, k_2) = H(k_1, k_2)F(k_1, k_2)$
Πολλαπλ/μός	$g(x_1, x_2) = h(x_1, x_2)f(x_1, x_2)$	$G(k_1, k_2) = H(k_1, k_2) * F(k_1, k_2)$

2.3 Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Αν συμβολιστεί με $f[i]$ το **i-οστό** δείγμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x)$, στο σημείο:

$$x = x_0 + i\Delta x$$

τότε η **ακολουθία**: $\{f[0], f[1], \dots, f[N-1]\}$

αντιπροσωπεύει τα **δείγματα**: $\{f[x_0], f[x_0+\Delta x], \dots, f[x_0+(N-1)\Delta x]\}$

Αυτά είναι **N** δείγματα της συνάρτησης f με **κοινό βήμα** δειγματοληψίας Δx .

Με αυτή τη διαδικασία ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΟΥΜΕ την συνεχή συνάρτηση f .

Μπορούμε να υπολογίσουμε τον **Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier (Δ.Μ.Φ.)** από τα δείγματα αυτά ως εξής:

$$F[u] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f[i] \exp[-j2\pi i u / N]$$

με $u = 0, 1, \dots, N-1$,
το **διακριτό φάσμα
συχνοτήτων**

Οι τιμές των συχνοτήτων: $u = 0, 1, \dots, N-1$ αντιστοιχούν:
στις τιμές:

$$0, \Delta u, 2\Delta u, \dots, (N-1)\Delta u$$

δείγματα του συνεχούς μετασχηματισμού

Συμβολισμός παρόμοιος με αυτόν που χρησιμοποιήθηκε για την $f[i]$, με τη διαφορά ότι τα δείγματα της $F[u]$ ξεκινούν από την αρχή του άξονα της συχνότητας.

Παρατήρηση

Οι ιδιότητες του **συνεχούς** μετασχηματισμού Fourier εφαρμόζονται για **διακριτά σήματα άπειρης διάρκειας** (σειρές Fourier).

Για τον μετασχηματισμό Fourier **διακριτών σημάτων πεπερασμένης διάρκειας** ισχύουν ανάλογες ιδιότητες ΕΚΤΟΣ από αυτή της **συνέλιξης** η οποία μπορεί να εφαρμοστεί μόνο μετά από κατάλληλη επέκταση των διακριτών σημάτων με μηδενικά (**zero padding**)

Ο αντίστροφος Δ.Μ.Φ. δίνεται από τη σχέση:

$$f[i] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] \exp[j2\pi i u / N]$$

για $i = 0, 1, \dots, N-1$

Οι ποσότητες Δx και Δu συνδέονται με τη σχέση:

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}$$

Εντελώς ανάλογα, το ζεύγος του **διδιάστατου διακριτού** μετασχηματισμού Fourier δίνεται από τις σχέσεις:

$$F[u, v] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f[l, m] \exp[-j(u l + v m) / N]$$

$$f[l, m] = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F[u, v] \exp[j(u l + v m) / N]$$

2.4 Δειγματοληψία Απεικόνισης

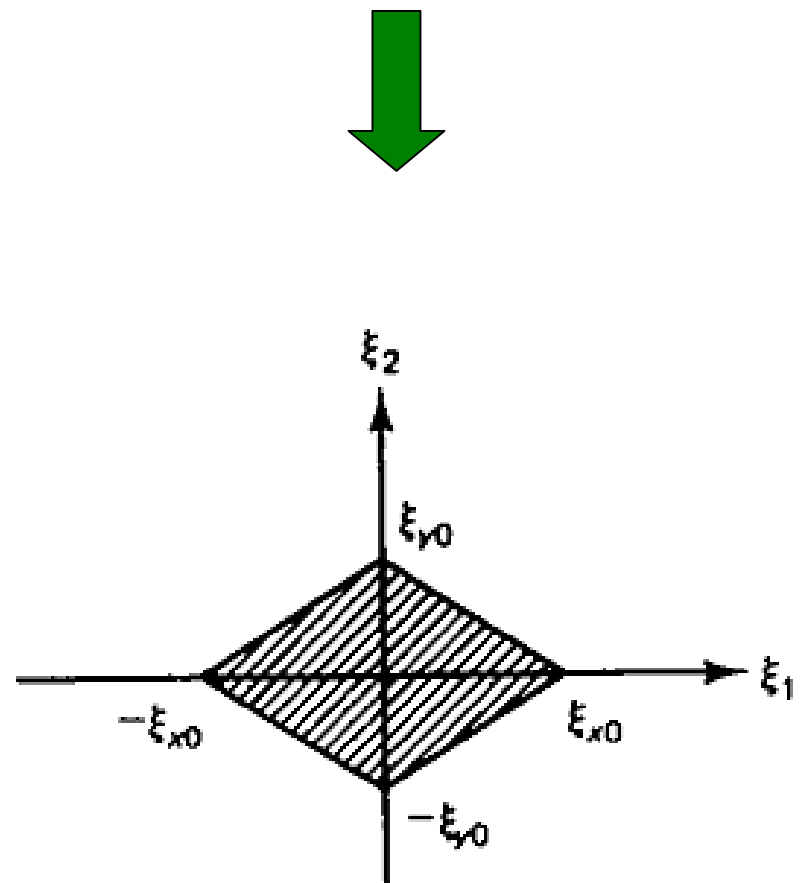
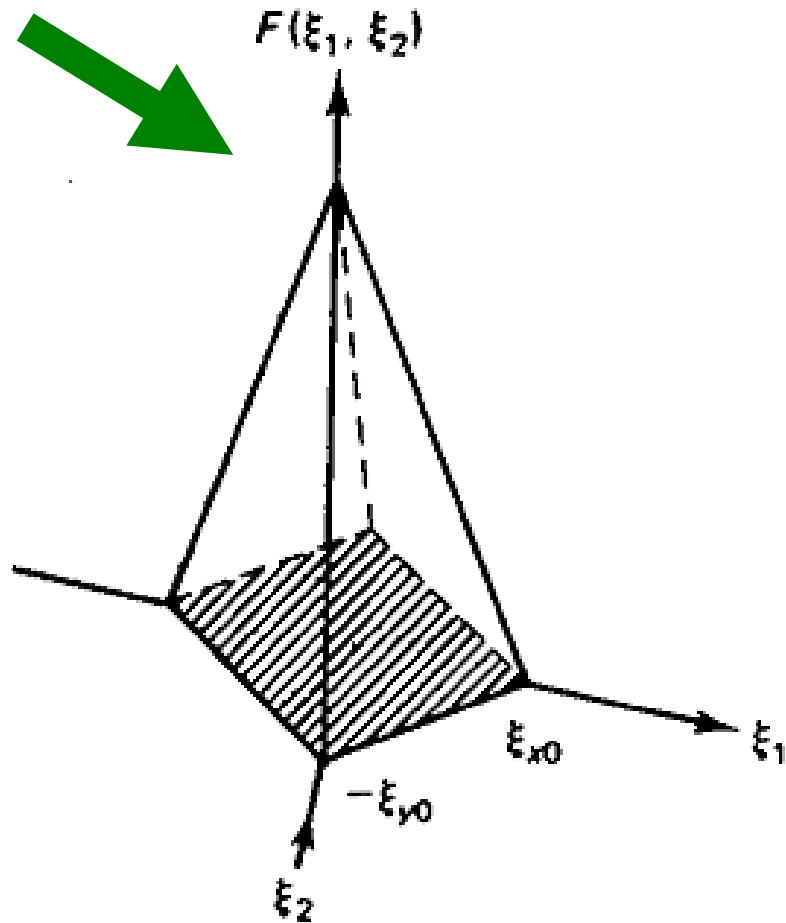
Εικόνες με περιορισμένο εύρος φάσματος

Η διαδικασία της διακριτοποίησης στην περίπτωση μιας εικόνας, γίνεται ευκολότερα κατανοητή αν θεωρηθούν **σήματα περιορισμένου εύρους φάσματος (band limited signals)**.

Στην πραγματικότητα, τα σήματα όμως προσεγγίζονται με συναρτήσεις με **περιορισμένο φασματικό περιεχόμενο**.

Μια συνάρτηση $f(x, y)$ καλείται **περιορισμένου εύρους φάσματος** αν ο μετασχηματισμός Fourier $F(\xi_1, \xi_2)$ **μηδενίζεται** οπουδήποτε αλλού ΕΚΤΟΣ από μια **φραγμένη περιοχή** στο επίπεδο των συχνοτήτων.

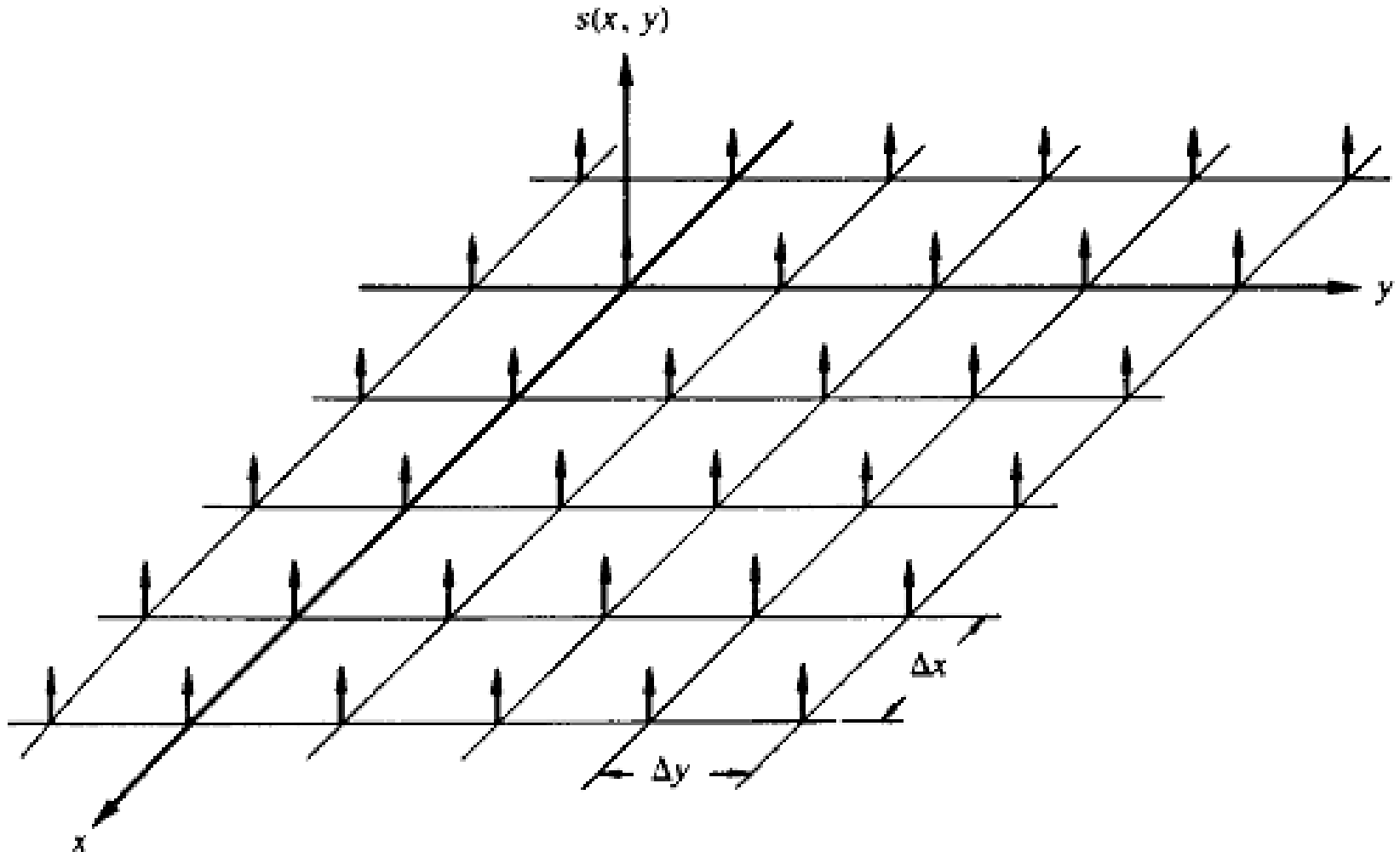
Ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης **περιορισμένου**
εύρους φάσματος και το πεδίο ορισμού του



Οι ποσότητες ξ_{x0} , ξ_{y0} και είναι τα αντίστοιχα **x** και **y** όρια του φάσματος (**bandwidths**) στο χώρο των συχνοτήτων.

Μετασχηματισμός Fourier δειγματοληπτημένης εικόνας

Έστω μια ιδανική συνάρτηση δειγματοληψίας: ένας διδιάστατος πίνακας από συναρτήσεις **Dirac** απείρων διαστάσεων, τοποθετημένες σε ένα διδιάστατο πλέγμα με αποστάσεις Δx , Δy :



Διδιάστατη συνάρτηση δειγματοληψίας :

$$\mathit{comb}(x, y : \Delta x, \Delta y) = \sum_{m, n = -\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y)$$

Η δειγματοληπτημένη εικόνα ορίζεται ως:

$$f_s(x, y) = f(x, y)\mathit{comb}(x, y : \Delta x, \Delta y)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της **συνάρτησης δειγματοληψίας** είναι μια συνάρτηση της ίδιας μορφής όπου οι αποστάσεις του πλέγματος είναι αντίστοιχα **$1/\Delta x$** και **$1/\Delta y$** .

$$\begin{aligned} COMB(\xi_1, \xi_2) &= F \{comb(x, y : \Delta x, \Delta y)\} \\ &= \xi_{xs} \xi_{ys} \sum_{k, l = -\infty}^{\infty} \delta(\xi_1 - k\xi_{xs}, \xi_2 - l\xi_{ys}) \end{aligned}$$

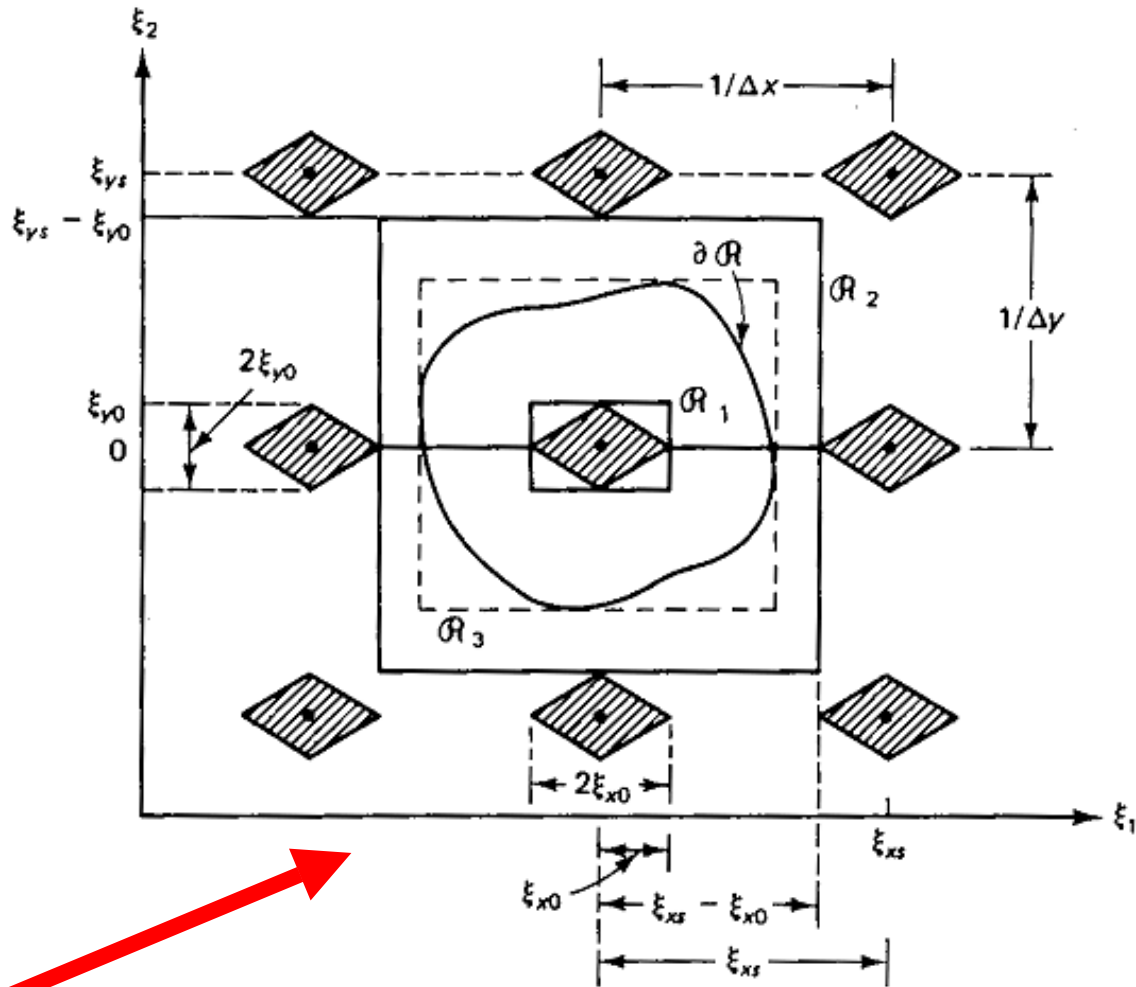
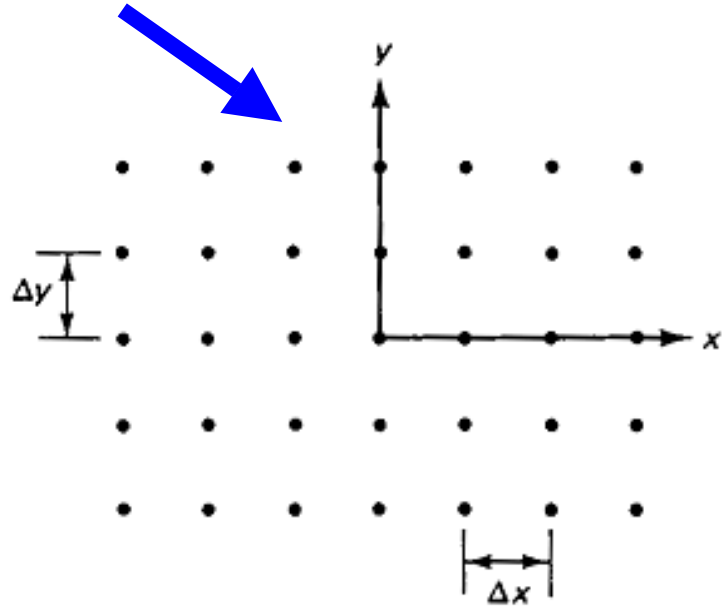
όπου $\xi_{xs} = 1/\Delta x$ και $\xi_{ys} = 1/\Delta y$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του πολλαπλασιασμού προκύπτει:

$$\begin{aligned} F_s(\xi_1, \xi_2) &= F(\xi_1, \xi_2) * COMB(\xi_1, \xi_2) \\ &= \xi_{xs} \xi_{ys} \sum_{k, l=-\infty}^{\infty} \sum F(\xi_1, \xi_2) * \delta(\xi_1 - k\xi_{xs}, \xi_2 - l\xi_{ys}) \\ &= \xi_{xs} \xi_{ys} \sum_{k, l=-\infty}^{\infty} \sum F(\xi_1 - k\xi_{xs}, \xi_2 - l\xi_{ys}) \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι ο μετασχηματισμός Fourier της **δειγματοληπτημένης εικόνας** είναι, με την εξαίρεση μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς, ένα **αντίγραφο** του μετασχηματισμού Fourier της **αρχικής εικόνας**, που επαναλαμβάνεται περιοδικά πάνω σε ένα πλέγμα με αποστάσεις $1/\Delta x, 1/\Delta y$.

Πλέγμα Δειγματοληψίας



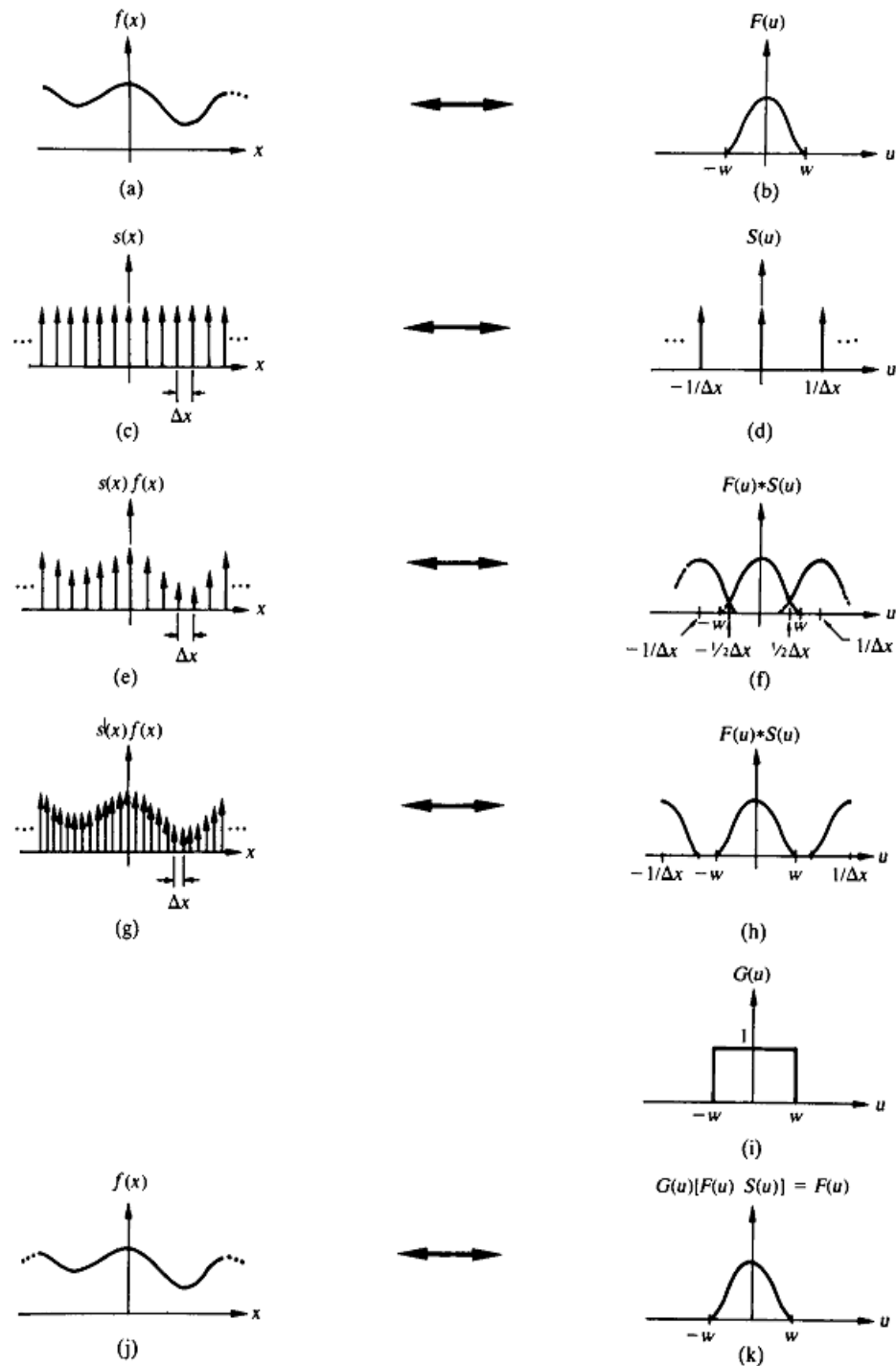
Το φάσμα της δειγματοληπτημένης εικόνας όπου R είναι μια περιοχή της οποίας το σύνορο ∂R βρίσκεται στην περιοχή μεταξύ των δύο παραλληλογράμμων R_1 και R_2

Ανακατασκευή εικόνας από ένα δειγματοληπτημένο αντίγραφο της

Η ανακατασκευή του φάσματος της αρχικής εικόνας $F(\xi_1, \xi_2)$ από το φάσμα της $F_s(\xi_1, \xi_2)$ δίδεται με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και παρεμβολή, την αρχική εικόνα.

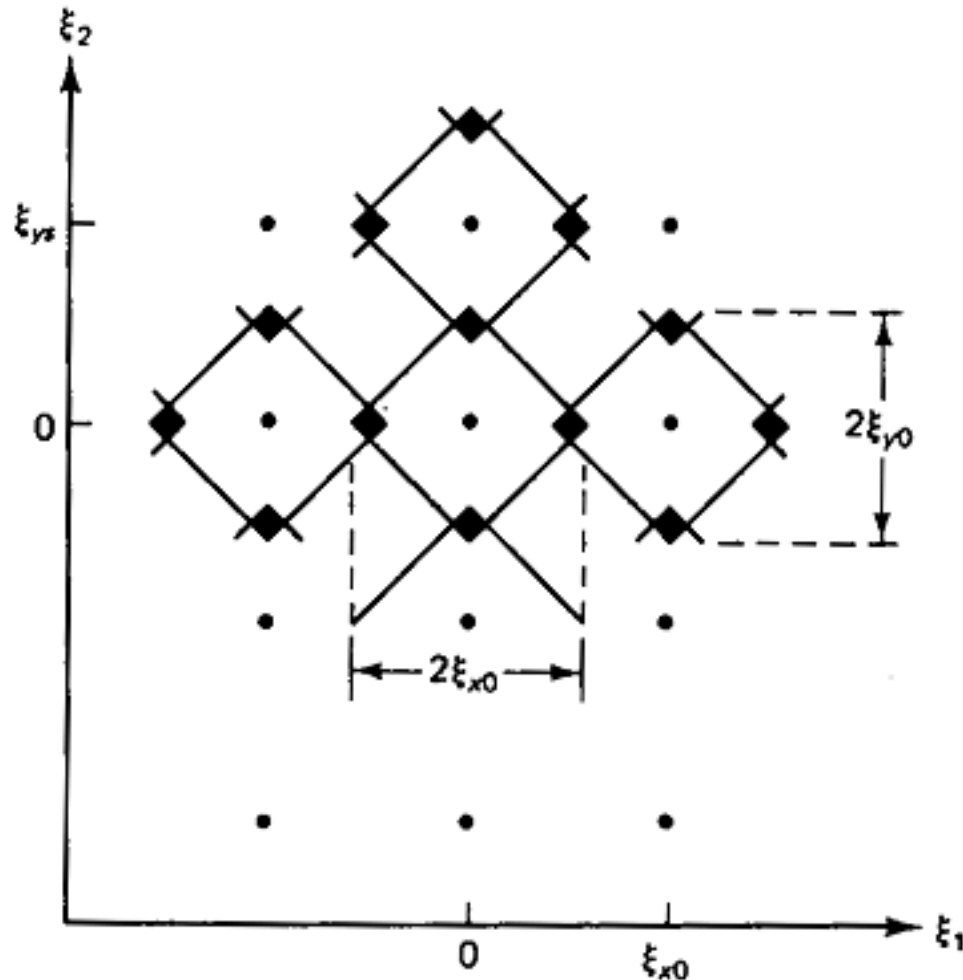
Σημασία έχει η επιλογή του κατάλληλου διαστήματος δειγματοληψίας Δx , όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Για τις συναρτήσεις από (a) έως (f) η επιλογή του διαστήματος δειγματοληψίας οδήγησε σε **αναδίπλωση** του φάσματος. Για τις συναρτήσεις από (g) έως (k), η σωστή επιλογή του Δx οδηγεί σε **πλήρη ανάκτηση** του φάσματος μετά από το φιλτράρισμα



Αναδίπλωση

Είναι προφανές ότι η επιλογή σχετικά μεγάλου διαστήματος Δx , έχει ως αποτέλεσμα την αλλοίωση του φάσματος $F_s(u) = F(u) * S(u)$ από την αλληλοεπικάλυψη των κορυφών $F(u)$. **Φαινόμενο Αναδίπλωσης (aliasing)**



‘Όταν το διάστημα δειγματοληψίας ικανοποιεί τη συνθήκη $\Delta x \leq \frac{1}{2w}$ δεν υπάρχει αλληλοεπικάλυψη και το φάσμα της προκύπτει από το $F_s(u)$, πολλαπλασιάζοντας με τη συνάρτηση μοναδιαίου παραθύρου .

$1/\Delta x =$ συχνότητα δειγματοληψίας

Στις δύο διαστάσεις ορίζονται οι συχνότητες δειγματοληψίας

$$\xi_{xs} = 1 / \Delta x$$

$$\xi_{ys} = 1 / \Delta y$$

στον x και y άξονα αντίστοιχα.

Για την αποφυγή του φαινομένου της αναδίπλωσης απαιτείται η ικανοποίηση της συνθήκης:

$$\xi_{xs} > 2\xi_{x0}$$

$$\xi_{ys} > 2\xi_{y0}$$

Οι ποσότητες $2\xi_{x0}, 2\xi_{y0}$ καλούνται **συχνότητες Nyquist**

Οι ποσότητες με τα αντίστροφα των συχνοτήτων καλούνται **διαστήματα Nyquist**.

Όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες ΜΗ ΑΝΑΔΙΠΛΩΣΗΣ τότε, εφαρμόζοντας ένα **βαθυπερατό φίλτρο (low pass filter)** με συνάρτηση απόκρισης συχνότητας που δίνεται από τη σχέση:

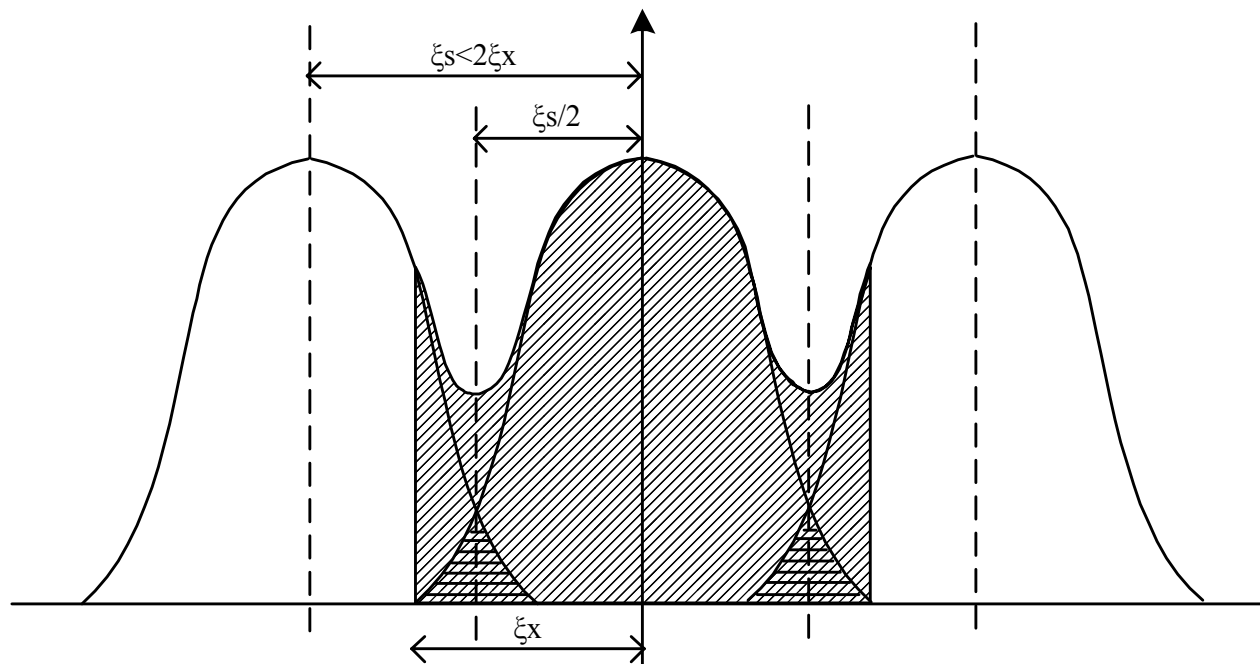
$$H(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \frac{1}{\xi_{xs} \xi_{ys}}, & (\xi_1, \xi_2) \in \mathfrak{R} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

ανακατασκευάζεται το φάσμα $F(\xi_1, \xi_2)$ ως εξής:

$$\tilde{F}(\xi_1, \xi_2) \stackrel{\text{ορ.}}{=} H(\xi_1, \xi_2) F_s(\xi_1, \xi_2) = F(\xi_1, \xi_2)$$

Για **συχνότητες** δειγματοληψίας **μικρότερες** από τις συχνότητες Nyquist σημειώνεται το **φαινόμενο της αναδίπλωσης**.

➔ Έχει ως αποτέλεσμα την αλλοίωση του φάσματος $F_s(\xi_1, \xi_2)$ η οποία είναι **μη αναστρέψιμη** οπότε και δεν είναι δυνατή η ανακατασκευή του φάσματος της αρχικής εικόνας με βαθυπερατό φίλτράρισμα. Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι συχνότητες πάνω από $\xi_s / 2$ προκαλούν ενίσχυση των συχνοτήτων κάτω από $\xi_s / 2$ εξαιτίας της υπέρθεσης των φασμάτων στην περιοχή αλληλοκάλυψης.



Εφαρμόζουμε στην εικόνα πριν από τη δειγματοληψία, ένα **βαθυπερατό φίλτρο** $\rightarrow \rightarrow$ να **μειωθεί το εύρος του φάσματός** της εικόνας στο μισό της συχνότητας δειγματοληψίας, προκειμένου να αποφευχθεί το φαινόμενο της αναδίπλωσης.

Αν το πεδίο ορισμού του ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου της σχέσης είναι το τετράγωνο :

$$R = \left[-\frac{1}{2}\xi_{xs}, \frac{1}{2}\xi_{xs} \right] \times \left[-\frac{1}{2}\xi_{ys}, \frac{1}{2}\xi_{ys} \right]$$

με κέντρο την αρχή των αξόνων, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $H(\xi_1, \xi_2)$ δίνεται από τη σχέση:

$$h(x, y) = \text{sinc}(x\xi_{xs})\text{sinc}(y\xi_{ys})$$

Με εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, όπως προηγούμενα, προκύπτει:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x, y) &= h(x, y) * f_s(x, y) \\ &= \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} f_s(m\Delta x, n\Delta y) \text{sinc}(x\xi_{xs} - m) \text{sinc}(y\xi_{ys} - n)\end{aligned}$$

Ισχύει:

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$$

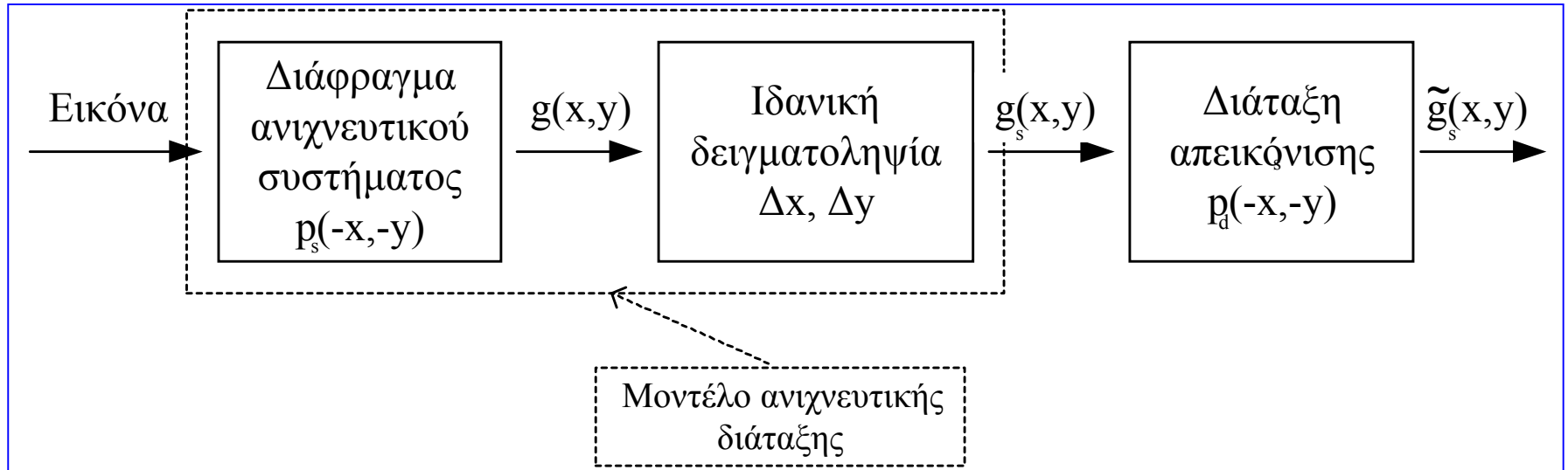
αν ικανοποιούνται οι **συνθήκες Nyquist** για τα Δx και Δy .

Μεθοδολογία στην δειγματοληψία και στην ανακατασκευή

Στην πράξη, οι εικόνες δεν έχουν περιορισμένο φασματικό περιεχόμενο, $\rightarrow \rightarrow$ στην αναπαραγωγή της εικόνας συμβαίνουν σφάλματα λόγω του φαινομένου της αναδίπλωσης.

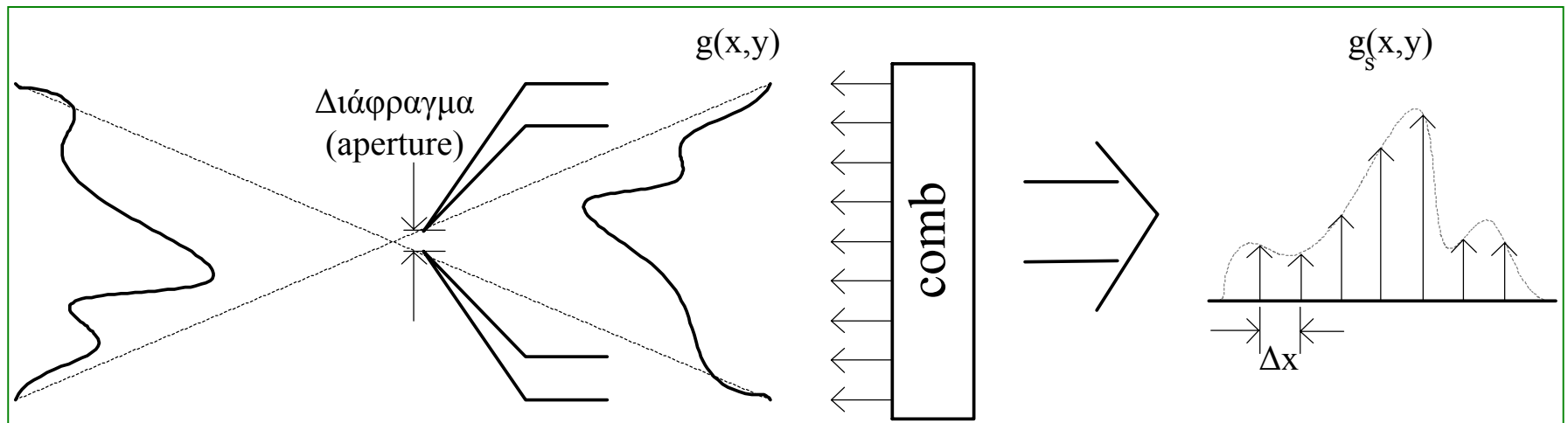
Η παραμόρφωση της εικόνας εξαιτίας του φαινομένου της αναδίπλωσης μπορεί να αποφευχθεί με βαθυπερατό φίλτράρισμα. Αυτό, όμως, σημαίνει απώλεια πληροφορίας στις υψηλές συχνότητες που ισοδυναμεί με **θόλωμα της εικόνας (image blur)**. Τέτοιο θόλωμα μπορεί επίσης να παρατηρηθεί εξαιτίας των χαρακτηριστικών των διατάξεων λήψης της εικόνας και των συστημάτων απεικόνισης.

Η διαδικασία απεικόνισης σε ένα πραγματικό σύστημα (scanner) μπορεί να παρασταθεί διαγραμματικά ως εξής:



Ιδανικά:

$$p_s(x, y) = p_d(x, y) = \delta(x, y)$$



Η προτεινόμενη μεθοδολογία απεικόνισης περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$g(x, y) = p_s(-x, -y) * f(x, y) \quad (\alpha)$$

$$g_s(x, y) = \text{comb}(x, y, \Delta x, \Delta y)g(x, y) \quad (\beta)$$

όπου $p_s(x, y)$ η **συνάρτηση κατανομής φωτεινότητας** του διαφράγματος (aperture) του απεικονιστικού συστήματος.

Γενικά η σχέση (α) ισοδυναμεί με βαθυπερατό φίλτράρισμα όπου η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου αυτού καθορίζεται από την κατανομή φωτεινότητας του ανοίγματος $p_s(x, y)$