Κεφάλαιο 1

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΑΠΛΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

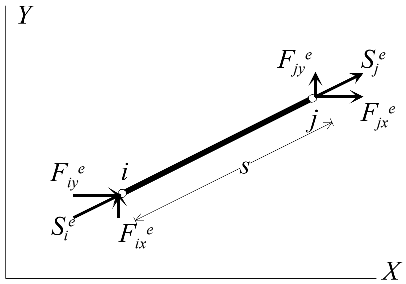
Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων όπως γνωρίζουμε προήλθε από μια γενίκευση των μεθόδων επίλυσης των ραβδωτών φορέων, σε προβλήματα μηχανικής που αφορούν τα επίπεδα παραμορφώσιμα σώματα [1-5]. Στη συνέχεια η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων απέκτησε οικουμενικό χαρακτήρα σε τρόπο που να μπορεί πλέον να επιλύει μια μεγάλη σειρά προβλημάτων των παραμορφώσιμων σωμάτων. Οι μέθοδοι αυτοί είναι εφαρμόσιμοι και στην περίπτωση των ραβδωτών φορέων. Έτσι οι ακαμψίες των στοιχείων (ράβδων) προκύπτουν με τη βοήθεια των παρεμβολικών τύπων και όχι βάσει θεωρήσεων που στηρίζονται στην αντοχή των υλικών (δηλαδή στις σχέσεις κομβικών φορτίων-κομβικών μετατοπίσεων που δίνει η εξίσωση ελαστικής γραμμής).

1.2. ΔΙΚΤΥΩΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ-ΡΑΒΔΟΣ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

Αριθμούμε τους κόμβους και τις ράβδους του δικτυώματος, στη συνέχεια απομονώνουμε την ράβδο *e*. Η ράβδος *e* είναι ένα στοιχείο, μονοδιάστατο αμφιαρθρωτό, αφόρτιστο μεταξύ των δύο άκρων του, που καταπονείται μόνον από τις αξονικές δυνάμεις S_i και S_j που δρουν στα άκρα της i,j. Συμβολίζουμε με $\mathbf{S}^e$ το διάνυσμα των δυνάμεων $\mathbf{S}^e = [S_i, S_j]^T$ που δρα στους κόμβους i,j, δηλαδή

$$\mathbf{S}^e = \begin{Bmatrix} S_i^e \\ S_j^e \end{Bmatrix}$$

Κάθε ράβδος του δικτυώματος είναι ορισμένη από τις συντεταγμένες των άκρων της *i,j* ως προς ένα καθολικό σύστημα συντεταγμένων (Σχ. 1.1) και χαρακτηρίζεται από το μήκος της *s*, τη σταθερή της διατομή *A* και το μέτρο ελαστικότητας *E* του υλικού από το οποίο αποτελείται.



Σχήμα 1.1. Ράβδος δικτυώματος *ij* ως προς ένα καθολικό σύστημα συντεταγμένων *XOY*.

Ας πάρουμε ένα τοπικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο *i* τέτοιο ώστε ο άξονας των *x* να συμπίπτει με την διεύθυνση της ράβδου με φορά από τον κόμβο *i* προς τον κόμβο *j* (Σχ. 1.1).

Οι μετατοπίσεις της ράβδου είναι πάντα κατά την έννοια της ράβδου. Ας συμβολίσουμε με $\delta(x)$ την μετατόπιση κατά τη διεύθυνση της ράβδου ενός σημείου *M* που απέχει *x* από το σημείο *i* (χρησιμοποιείται το σύμβολο δ αντί του *q* επειδή αναφερόμαστε σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων). Η μετατόπιση του πρέπει να εκφραστεί σαν συνάρτηση των μετατοπίσεων δ_i και δ_j με έναν απλό παρεμβολικό τύπο. Αυτό μπορεί να γίνει κατ' ευθείαν ή με το να θεωρήσουμε ότι η μετατόπιση $\delta(x)$ δίνεται από ένα απλό πολυώνυμο

$$\delta(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{1.1}$$

Η σχέση (1.1) πρέπει να ισχύει και στους κόμβους $i(x=0)$ και $j(x=s)$ όπου οι μετατοπίσεις είναι αντίστοιχα δ_i και δ_j, δηλαδή

$$\begin{aligned} \delta(0) &= \delta_i \\ \delta(s) &= \delta_j \end{aligned} \tag{1.2}$$

Άρα μόνο δύο όρους μπορούμε να κρατήσουμε από τη σχέση (1.1) και κρατάμε πάντα τους όρους με ανιούσα σειρά, δηλαδή

$$\delta(x) = a_1 + a_2 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

ή

$$\delta(x) = \mathbf{M}(x)\,\mathbf{a} \tag{1.3}$$

όπου

$$\mathbf{M}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{1.4}$$

Εφαρμόζοντας τις (1.2) έχουμε

$$\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

ή

$$\boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{A}\mathbf{a} \tag{1.5}$$

Λύνοντας ως προς **a** και αντικαθιστώντας στην (3.3) έχουμε

$$\delta(x) = \left(1 - \frac{x}{s}\right)\delta_i + \frac{x}{s}\delta_j$$

ή

$$\delta(x) = (1-\xi)\delta_i + \xi\delta_j\,, \qquad \xi = \frac{x}{s}$$

Οπότε

$$\delta(x) = \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \tag{1.6}$$

Συμβολίζω με $N_i(x) = 1-\xi$ και $N_j(x) = \xi$. Τα $N_i(x)$, $N_j(x)$ λέγονται ***συναρτήσεις σχήματος***. Η σχέση (3.6) γράφεται

$$\delta(x) = \begin{bmatrix} N_i(x) & N_j(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\,\boldsymbol{\delta}^e \tag{1.7}$$

Στη σχέση (1.7) θα φτάναμε αν αντιστρέφαμε την (1.5), οπότε

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\delta}^e$$

και την αντικαθιστούσαμε στη (1.3) οπότε

$$\delta(x) = \mathbf{M}(x)\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\delta}^e$$

Άρα

$$\mathbf{N}(x) = \mathbf{M}(x)\mathbf{A}^{-1} \tag{1.8}$$

Οι παραμορφώσεις δίνονται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}$$

ή σε μητρωϊκή μορφή

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_1\boldsymbol{\delta}^e \tag{1.9}$$

όπου

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

ενώ οι τάσεις προκύπτουν από τη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων

$$\boldsymbol{\sigma} = E\boldsymbol{\varepsilon} = E\mathbf{B}_1\boldsymbol{\delta}^e = \frac{E}{s}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{\delta}^e \tag{1.11}$$

Το επόμενο βήμα που θα κάνουμε είναι να εφαρμόσουμε την αρχή δυνατών έργων στο στοιχείο *e*. Οι δυνατές παραμορφώσεις $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ εκφράζονται με μια σχέση ανάλογη της (1.9) αφού το μόνο που αλλάζει είναι οι δυνατές μετατοπίσεις των κόμβων. Επομένως αν συμβολίσουμε με $\delta\boldsymbol{\delta}^e$ το διάνυσμα των δυνατών κομβικών μετατοπίσεων η δυνατή παραμόρφωση είναι

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}_1\,\delta\boldsymbol{\delta}^e=\frac{1}{s}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\delta\boldsymbol{\delta}^e$$

Η αρχή των δυνατών έργων λέει ότι το δυνατό έργο E_ξ των εξωτερικών δυνάμεων $E_\xi=\left[\delta\boldsymbol{\delta}^e\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^e$ είναι ίσο με το έργο των E_σ των εσωτερικών δυνάμεων $E_\sigma=\int_{V^e}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,dV$, δηλαδή

$$\left[\delta\boldsymbol{\delta}^e\right]^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{S}^e-\int_{V^e}\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}E\mathbf{B}_1\,dV\,\delta\boldsymbol{\delta}^e\right)=0 \tag{1.12}$$

Ονομάζω ακαμψία $\overline{\mathbf{k}}^e$ του στοιχείου *e* στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων την ποσότητα

$$\overline{\mathbf{k}}^e=\int_{V^e}\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}E\mathbf{B}_1\,dV \tag{1.13}$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι τα $\mathbf{B}_1$, E, και η διατομή A της ράβδου είναι σταθερά προκύπτει

$$\overline{\mathbf{k}}^e=\frac{AE}{s}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{1.14}$$

Δεδομένου ότι το διάνυσμα $\delta\boldsymbol{\delta}^e$ είναι ένα τυχαίο μη μηδενικό διάνυσμα η σχέση (1.12) γράφεται

$$\overline{\mathbf{k}}^e\boldsymbol{\delta}^e=\mathbf{S}^e \tag{1.15}$$

Θεωρούμε τώρα τις μετατοπίσεις στο καθολικό σύστημα *XOY*. Το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων $\mathbf{q}^e$ της ράβδου είναι

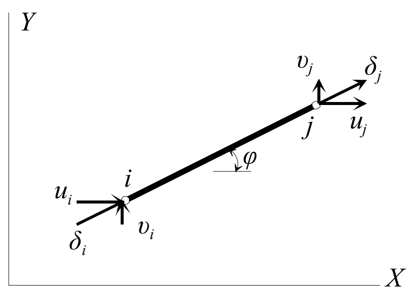
$$\mathbf{q}^e=\begin{Bmatrix}u_i\\ \upsilon_i\\ \upsilon_j\\ u_j\end{Bmatrix} \tag{1.16}$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\delta}^e$ συνδέεται με το διάνυσμα $\mathbf{q}^e$ (Σχήμα 1.2) με τη σχέση

$$\begin{Bmatrix}\delta_i\\ \delta_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\ell & m & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ell & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ \upsilon_i\\ \upsilon_j\\ u_j\end{Bmatrix}$$

ή

$$\boldsymbol{\delta}^e=\mathbf{a}_1\mathbf{q}^e \tag{1.17}$$



Σχήμα 1.2

όπου ℓ, m είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης της ράβδου e ως προς τους άξονες $X,Y^{(*)}$, δηλαδή

$$\ell = \frac{X_j - X_i}{s} = \cos\varphi \qquad m = \frac{Y_j - Y_i}{s} = \sin\varphi \tag{1.18}$$

και (X_i, Y_i), (X_j, Y_j) οι συντεταγμένες των κόμβων i,j αντίστοιχα.

Έστω (F_{ix}^e, F_{iy}^e) και (F_{jx}^e, F_{jy}^e) οι συνιστώσες των S_i^e και S_j^e αντίστοιχα στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Από το Σχήμα 1.2 προκύπτει

$$\begin{Bmatrix} F_{ix}^e \\ F_{iy}^e \\ F_{jx}^e \\ F_{jy}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & 0 \\ m & 0 \\ 0 & \ell \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i^e \\ S_j^e \end{Bmatrix}$$

ή

$$\mathbf{F}^e = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{S}^e \tag{1.19}$$

Η σχέση (1.19) συνδέει το μητρώο στήλη $\mathbf{F}^e$ των κομβικών δυνάμεων στο καθολικό σύστημα με το μητρώο των κομβικών δυνάμεων $\mathbf{S}^e$ στο τοπικό σύστημα.

Αντικαθιστώντας την σχέση (1.17) στις σχέσεις (1.9) και (1.11) προκύπτει

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}^e = \mathbf{B}\mathbf{q}^e$$

$$\boldsymbol{\sigma} = E\mathbf{B}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}^e = E\mathbf{B}\mathbf{q}^e$$

Εφαρμόζοντας ξανά την αρχή των δυνατών έργων μετά από μια ανάλογη διαδικασία όπως προηγουμένως βρίσκουμε

$$\mathbf{k}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{F}^e \tag{1.20}$$

όπου

$$\mathbf{k}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} E \mathbf{B}\, dV = \int_{V^e} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} E \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\alpha}_1\, dV = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \left(\int_{V^e} \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} E \mathbf{B}_1\, dV \right) \boldsymbol{\alpha}_1$$

δηλαδή

$$\mathbf{k}^e = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{k}}^e \boldsymbol{\alpha}_1 \tag{1.21}$$

το μητρώο ακαμψίας στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων

Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε

(*) Στην περίπτωση δικτυωμάτων στο χώρο το μητρώο $\boldsymbol{\alpha}_1$ θα περιείχε και τα συνημίτονα κατεύθυνσης της ράβδου e ως προς τον άξονα Z.

$$\mathbf{k}^e = \frac{AE}{s}\begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m & -\ell^2 & -\ell m \\ \ell m & m^2 & -\ell m & -m^2 \\ -\ell^2 & -\ell m & \ell^2 & \ell m \\ -\ell m & -m^2 & \ell m & m^2 \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

Το μητρώο ακαμψίας $\overline{\mathbf{k}}^e$ και το μητρώο των κομβικών μετατοπίσεων $\boldsymbol{\delta}^e$ στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, συνδέονται με το μητρώο των κομβικών δυνάμεων $\mathbf{S}^e = \left[S_i^e \quad S_j^e\right]^{\mathrm{T}}$ επίσης στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων με τη σχέση (1.22), δηλαδή πρέπει να ισχύει

$$AE\frac{\delta_i - \delta_j}{s} = S_i^e \qquad AE\frac{\delta_j - \delta_i}{s} = S_j^e \tag{1.23}$$

που είναι ήδη γνωστά από τον εφελκυσμό των ράβδων. Δηλαδή, η σχέση (1.15) μπορεί να προκύψει και απευθείας.

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την σχέση (1.15) με $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.17) και (1.19) προκύπτει

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{k}}^e\boldsymbol{\alpha}_1\right)\mathbf{q}^e = \mathbf{F}^e \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{k}^e\mathbf{q}^e = \mathbf{F}^e$$

που συμπίπτει με την (1.20).

Από τη στιγμή που έχουν αναπτυχθεί οι σχέσεις (1.20) η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος ακολουθεί τα βήματα της μητρωϊκής ανάλυσης των κατασκευών, δηλαδή εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας σε κάθε κόμβο i του δικτυώματος. Στις εξισώσεις αυτές τις εσωτερικές δυνάμεις $F_{ix}^e, F_{iy}^e, F_{iz}^e$ στον κόμβο i της ράβδου e τις αντικαθιστούμε από τη σχέση (1.20). Έτσι βρίσκουμε σχέσεις που συνδυάζουν τις ακαμψίες $\mathbf{k}^e$ (e=1,2,...,N) και των N ράβδων του δικτυώματος καθώς και όλες τις μετατοπίσεις των κόμβων. Η σχέσεις αυτές έχουν ως δεύτερο μέλος τις γνωστές εξωτερικές δυνάμεις $\mathbf{R}$ που εφαρμόζονται στους κόμβους του δικτυώματος. Αν συμβολίσουμε με $\mathbf{K}$ τον συνδυασμό -σύνθεση των ακαμψιών των επί μέρους ράβδων που περιγράψαμε πιο πάνω και με $\mathbf{r}$ το διάνυσμα που παριστά όλες τις μετατοπίσεις των κόμβων τότε θα έχουμε

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{R} \tag{1.24}$$

όπου

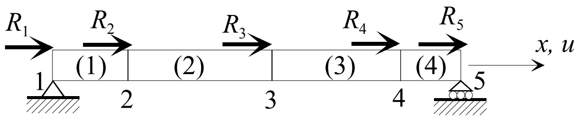
$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N} \mathbf{k}^e \tag{1.25}$$

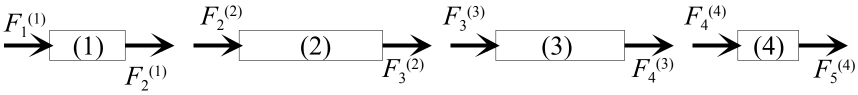
είναι το μητρώο ακαμψίας της ραβδωτής κατασκευής. (Προσοχή το σύμβολο Σ δεν παριστά κλασική άθροιση).

Πιο πολύ μπορεί να καταλάβει κανείς την διαδικασία μέσα από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1.1

Θεωρούμε τη μονοδιάστατη αμφιέρειστη δοκό σταθερής διατομής που φορτίζεται μονοαξονικά και έχει χωρισθεί σε τέσσερα πεπερασμένα στοιχεία όπως φαίνεται στο σχήμα. Δεχόμαστε ότι η δοκός δεν λυγίζει επιπλέον, θεωρούμε ότι τα μητρώα ακαμψίας και φορτίσεως των στοιχείων είναι γνωστά.





Κάθε κόμβος i έχει μόνον ένα βαθμό ελευθερίας, την αξονική μετατόπιση $u_i=q_i$.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (1.22) για κάθε ένα στοιχείο ξεχωριστά προκύπτει

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} \\ k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} k_{33}^{(3)} & k_{34}^{(3)} \\ k_{43}^{(3)} & k_{44}^{(3)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} \end{Bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} k_{44}^{(4)} & k_{45}^{(4)} \\ k_{54}^{(4)} & k_{55}^{(4)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4^{(4)} \\ F_5^{(4)} \end{Bmatrix} \tag{α}$$

Τα στοιχεία k_{ij}^e των μητρώων $\mathbf{k}^e$ είναι μονοδιάστατα (1×1).

Για να σχηματισθούν οι εξισώσεις ισορροπίας όλης της δοκού θεωρείται η ισορροπία κάθε κόμβου ξεχωριστά. Οπότε,

$$\begin{aligned} R_1 &= F_1^{(1)} &&= k_{11}^{(1)}q_1 + k_{12}^{(2)}q_2 \\ R_2 &= F_2^{(1)} + F_2^{(2)} &&= k_{21}^{(1)}q_1 + \left[k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)}\right]q_2 + k_{23}^{(2)}q_3 \\ R_3 &= F_3^{(2)} + F_3^{(3)} &&= k_{32}^{(2)}q_2 + \left[k_{33}^{(2)} + k_{33}^{(3)}\right]q_3 + k_{34}^{(3)}q_4 \\ R_4 &= F_4^{(3)} + F_4^{(4)} &&= k_{43}^{(3)}q_3 + \left[k_{44}^{(3)} + k_{44}^{(4)}\right]q_4 + k_{45}^{(4)}q_5 \\ R_5 &= F_5^{(4)} &&= k_{54}^{(4)}q_4 + k_{55}^{(4)}q_5 \end{aligned} \tag{β}$$

όπου, R_1, … , R_5 οι συνολικές δυνάμεις που ασκούνται στους κόμβους 1 , … , 5 αντίστοιχα.

Οι εξισώσεις ισορροπίας μπορούν να γραφούν σε μητρωϊκή μορφή ως εξής

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} + k_{33}^{(3)} & k_{34}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & k_{43}^{(3)} & k_{44}^{(3)} + k_{44}^{(4)} & k_{45}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & k_{54}^{(4)} & k_{55}^{(4)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{Bmatrix} \tag{γ}$$

ή

$$\mathbf{Kr}=\mathbf{R} \tag{γ'}$$

όπου, $\mathbf{K}$ είναι το ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής, $\mathbf{r}$ το μητρώο διάνυσμα των μετατοπίσεων των κόμβων και $\mathbf{R}$ το μητρώο διάνυσμα των κομβικών δυνάμεων.

Το σύστημα των εξισώσεων (γ') αποτελεί το τελικό σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας όλου του μέσου. Οποιοσδήποτε φορέας και να αντιμετωπισθεί με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων το σύστημα των τελικών εξισώσεων που θα σχηματισθεί θα είναι της μορφής των εξισώσεων (γ').

Παρατηρώντας το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων (γ), βλέπουμε ότι θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε το ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής και απ' ευθείας. Έτσι δύναμη σε ένα κόμβο i προκαλούν οι μετακινήσεις u_j των κόμβων των στοιχείων $e_1, e_2, \ldots, e_N$ (Σχ.2.6) που έχουν κοινούς κόμβους τον i και j. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο K_{ij} του ολικού μητρώου ακαμψίας θα είναι

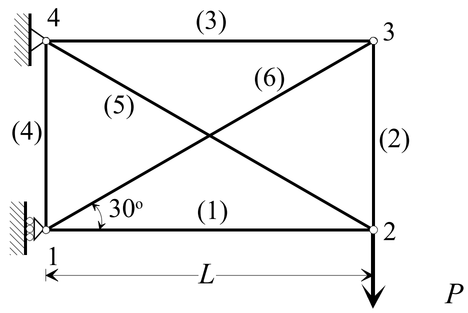
$$K_{ij} = k_{ij}^{e_1} + k_{ij}^{e_2} + \ldots + k_{ij}^{e_N} \qquad (\delta)$$

όπου $k_{ij}^{e_1}, k_{ij}^{e_2}, \ldots, k_{ij}^{e_N}$ είναι τα επιμέρους στοιχεία των μητρώων ακαμψίας των στοιχείων $e_1, e_2, \ldots, e_N$.

Αξίζει να τονίσουμε ότι αν ο κόμβος j ανήκει μόνο στα στοιχεία e_1 και e_2 τότε η σχέση (δ) περιλαμβάνει μόνο τους δύο πρώτους όρους αφού οι υπόλοιποι όροι είναι μηδενικοί.

Το πρόβλημα ελαφρώς περιπλέκεται αν ο αριθμός των κομβικών παραμέτρων είναι μεγαλύτερος του 1. Έτσι πχ. στον κόμβο j υπάρχουν οι μετατοπίσεις u_j, υ_j οπότε και οι δυνάμεις θα είναι R_{xj}, R_{yj} θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι η δύναμη R_{xj} προκαλείται από τις μετατοπίσεις u_j, υ_j που πολλαπλασιάζουν τα στοιχεία της ($2j$-1) γραμμής του μητρώου ακαμψίας κοκ. Στο παράδειγμα που ακολουθεί αποφύγαμε, για λόγους ευκολότερης κατανόησης αυτή την περιπλοκή παίρνοντας τις μετατοπίσεις u_j, υ_j, με τη μορφή ενός διανύσματος q_j οπότε και τα στοιχεία K_{ij} του μητρώου ακαμψίας είναι μητρώα (2×2).

Παράδειγμα 1.2



Υπολογίζουμε τις τάσεις των ράβδων του δικτυώματος του σχήματος που έχουν κοινό μέτρο ελαστικότητας E και κοινό εμβαδό διατομής A.

Από τη σχέση (1.22) προκύπτουν τα μητρώα ακαμψίας των ράβδων 1,2,3,4,5 αφού τα συνημίτονα κατεύθυνσης της κάθε ράβδου είναι

$$\text{ράβδος (1):}\quad (\ell, m) = (1, 0)$$
$$\text{ράβδος (2):}\quad (\ell, m) = (0, 1)$$
$$\text{ράβδος (3):}\quad (\ell, m) = (-1, 0)$$
$$\text{ράβδος (4):}\quad (\ell, m) = (0, -1)$$
$$\text{ράβδος (5):}\quad (\ell, m) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$\text{ράβδος (6):}\quad (\ell, m) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{k}^1=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{k}^2=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&-\sqrt{3}\\0&0&0&0\\0&-\sqrt{3}&0&\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^3=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{k}^4=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&-\sqrt{3}\\0&0&0&0\\0&-\sqrt{3}&0&\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^5=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{8}&-\frac{3}{8}&-\frac{3\sqrt{3}}{8}&\frac{3}{8}\\-\frac{3}{8}&\frac{\sqrt{3}}{8}&\frac{3}{8}&-\frac{\sqrt{3}}{8}\\-\frac{3\sqrt{3}}{8}&\frac{3}{8}&\frac{3\sqrt{3}}{8}&-\frac{3}{8}\\\frac{3}{8}&-\frac{\sqrt{3}}{8}&-\frac{3}{8}&\frac{\sqrt{3}}{8}\end{bmatrix},\quad \mathbf{k}^6=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{8}&\frac{3}{8}&-\frac{3\sqrt{3}}{8}&-\frac{3}{8}\\\frac{3}{8}&\frac{\sqrt{3}}{8}&-\frac{3}{8}&-\frac{\sqrt{3}}{8}\\-\frac{3\sqrt{3}}{8}&-\frac{3}{8}&\frac{3\sqrt{3}}{8}&\frac{3}{8}\\-\frac{3}{8}&-\frac{\sqrt{3}}{8}&\frac{3}{8}&\frac{\sqrt{3}}{8}\end{bmatrix}$$

Επομένως, η σχέση που συνδέει τις μετατοπίσεις των κόμβων με τα επικόμβια εξωτερικά φορτία και τις αντιδράσεις R_{1x},R_{4x},R_{4y} στους κόμβους 1,4 είναι

$$\begin{Bmatrix}R_{1x}\\0\\0\\-P\\0\\0\\R_{4x}\\R_{4y}\end{Bmatrix}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1+\frac{3\sqrt{3}}{8}&\frac{3}{8}&-1&0&-\frac{3\sqrt{3}}{8}&-\frac{3}{8}&0&0\\\frac{3}{8}&\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}&0&0&-\frac{3}{8}&-\frac{\sqrt{3}}{8}&0&-\sqrt{3}\\-1&0&1+\frac{3\sqrt{3}}{8}&-\frac{3}{8}&0&0&-\frac{3\sqrt{3}}{8}&\frac{3}{8}\\0&0&-\frac{3}{8}&\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}&0&-\sqrt{3}&\frac{3}{8}&-\frac{\sqrt{3}}{8}\\-\frac{3\sqrt{3}}{8}&-\frac{3}{8}&0&0&1+\frac{3\sqrt{3}}{8}&\frac{3}{8}&-1&0\\-\frac{3}{8}&-\frac{\sqrt{3}}{8}&0&-\sqrt{3}&\frac{3}{8}&\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}&0&0\\0&0&-\frac{3\sqrt{3}}{8}&\frac{3}{8}&-1&0&1+\frac{3\sqrt{3}}{8}&-\frac{3}{8}\\0&-\sqrt{3}&\frac{3}{8}&-\frac{\sqrt{3}}{8}&0&0&-\frac{3}{8}&\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\\upsilon_1\\u_2\\\upsilon_2\\u_3\\\upsilon_3\\0\\0\end{Bmatrix}$$

Η σχέση αυτή, αφού ληφθούν υπόψη οι οριακές συνθήκες ταυτίζεται με τη σχέση που προέκυψε για το ίδιο δικτύωμα αλλά με την εφαρμογή αρχών της αντοχής των υλικών στο Κεφάλαιο 1.

Η λύση του συστήματος δίνει

$$\upsilon_1=-0{,}12847\frac{PL}{EA},\ u_2=-0{,}26340\frac{PL}{EA},\ \upsilon_2=-1{,}15864\frac{PL}{EA},$$
$$u_3=0{,}38541\frac{PL}{EA},\quad \upsilon_3=-1{,}82379\frac{PL}{EA}$$

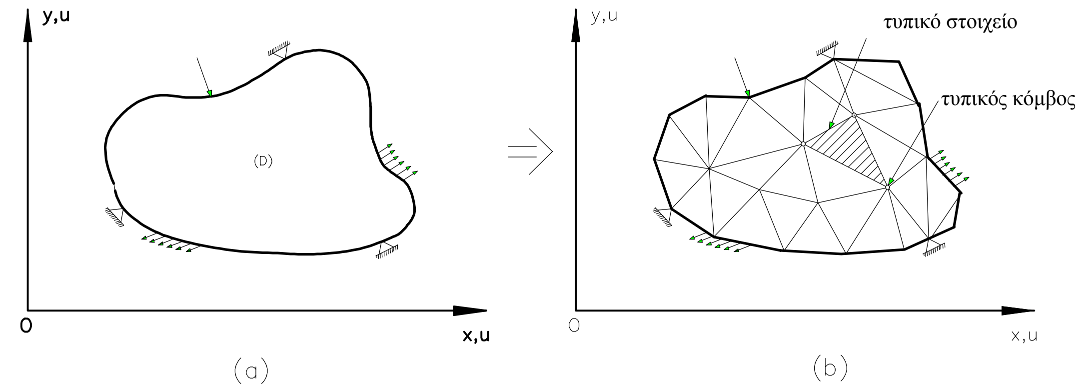
Οπότε η ισορροπία μας δίνει τις αντιδράσεις στους κόμβους 1,4

$$R_{4x}=P\quad,\quad F_{4y}=-P\sqrt{3}\quad,\quad F_{1x}=P\sqrt{3}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τις μετατοπίσεις στις σχέσεις (1.17) και (1.15) προσδιορίζουμε τις τάσεις των ράβδων.

1.3. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ-ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ

Έστω ότι έχουμε μια επίπεδη κατασκευή D που υποδιαιρείται με τη βοήθεια ιδεατών γραμμών σ' έναν αριθμό τριγωνικών στοιχείων (Σχ.1.1). Πρέπει στο σημείο αυτό να επισημάνουμε ότι η υποδιαίρεση αυτή μπορεί να μην αναπαριστά με απόλυτη ακρίβεια την κατασκευή, επειδή π.χ. το καμπύλο σύνορο του σώματος δεν μπορεί να παρασταθεί με απόλυτη ακρίβεια (Σχ.1.1α και 1.1β). Άρα η διακεκριμενοποίηση της κατασκευής οδηγεί στον υπολογισμό μιας κατασκευής D_h που μοιάζει με την αρχική D αλλά δεν ταυτίζεται απόλυτα με αυτήν. Η κατασκευή D_h μπορεί να έχει απλοποιηθεί όσον αφορά και την παράσταση των οριακών συνθηκών (π.χ. αντικατάσταση κατανεμημένων φορτίων με συγκεντρωμένα φορτία στους κόμβους κλπ).



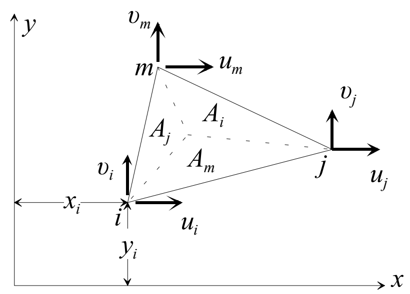
Σχήμα 1.1

Τα στοιχεία θεωρούνται ότι συνδέονται μεταξύ τους σε διακριτά σημεία τους *κόμβους*. Αυτό σημαίνει ότι κατά κάποιο τρόπο η κατασκευή μετασχηματίζεται σε ένα είδος δικτυώματος.

Απομονώνουμε το τριγωνικό στοιχείο e με κόμβους του i,j,m (Σχ. 1.3). Έστω, (x_i ,y_i), (x_j ,y_j), (x_m ,y_m) οι συντεταγμένες των κόμβων στο σύστημα αναφοράς xOy.

Η μετατόπιση έχει δύο συνιστώσες, την u κατά τη διεύθυνση x και την υ κατά τη διεύθυνση y. Συμβολίζουμε με

$$\mathbf{q}_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ \upsilon_k \end{Bmatrix}, k = i, j, m \qquad (1.26)$$



Σχήμα 1.3

Συμβολίζουμε με $\mathbf{q}^e$ το διάνυσμα των μετατοπίσεων των κόμβων i,j,m δηλαδή

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_m \end{Bmatrix} \qquad (1.27)$$

Θέλουμε να εκφράσουμε τις μετατοπίσεις

$$\mathbf{q}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ \upsilon(x, y) \end{Bmatrix}$$

στο σημείο M του στοιχείου e σαν συνάρτηση των μετατοπίσεων $\mathbf{q}_i$, $\mathbf{q}_j$, $\mathbf{q}_m$ των κόμβων. Για το λόγο αυτό εκφράζουμε τις μετατοπίσεις στο εσωτερικό του στοιχείου e με τη βοήθεια πολυωνυμικών συναρτήσεων της μορφής

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + ... \\ \upsilon(x, y) &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy + ... \end{aligned} \tag{1.28}$$

Οι σχέσεις αυτές αν εφαρμοστούν στον κόμβο i, οι μετατοπίσεις πρέπει να είναι ίσες με u_i, υ_j αντίστοιχα, δηλαδή

$$\begin{aligned} u_i(x_i, y_i) &= u_i \\ \upsilon(x_i, y_i) &= \upsilon_i \end{aligned} \tag{1.29}$$

Προφανώς το ίδιο ισχύει και για τους άλλους κόμβους. Δεδομένου ότι υπάρχουν τρεις μόνο κόμβοι, μόνον οι τρεις πρώτοι συντελεστές α_1, α_2, α_3 της σχέσης που δίνει τη μετατόπιση στο στοιχείο e μπορούν να προσδιορισθούν σαν συνάρτηση των u_i, u_j, u_m. Το ίδιο ισχύει και με τους συντελεστές b_1, b_2, b_3 της μετατόπισης υ. Με άλλα λόγια από τη σχέση (1.28) πρέπει να κρατήσουμε τους τρεις πρώτους συντελεστές. Άρα

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ \upsilon(x,y) &= b_1 + b_2 x + b_3 y \end{aligned} \tag{1.30}$$

Οι σχέσεις (1.30) γράφονται σε μητρωϊκή μορφή

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ \upsilon(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

δηλαδή

$$\mathbf{q}(x, y) = \mathbf{M}(x, y)\mathbf{a} \tag{1.31}$$

όπου

$$\mathbf{M}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \tag{1.32}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (1.31) όπου x,y τις συντεταγμένες των κόμβων του τριγώνου, προκύπτει η σχέση

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ \upsilon_i \\ u_j \\ \upsilon_j \\ u_m \\ \upsilon_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

ή

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{A}\,\mathbf{a} \tag{1.33}$$

Επιλύοντας ως προς **a** προκύπτει

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{q}^e \tag{1.34}$$

όπου

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} z_i & 0 & z_j & 0 & z_m & 0 \\ 0 & z_i & 0 & z_j & 0 & z_m \\ y_{jm} & 0 & y_{mi} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & y_{jm} & 0 & y_{mi} & 0 & y_{ij} \\ x_{mj} & 0 & x_{im} & 0 & x_{ji} & 0 \\ 0 & x_{mj} & 0 & x_{im} & 0 & x_{ji} \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

με

$$\begin{aligned} z_i &= x_j\,y_m - x_m\,y_j \\ y_{jm} &= y_j - y_m \\ x_{mj} &= x_m - x_j \end{aligned} \tag{1.36}$$

και

$$A^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & x_m \end{vmatrix} \tag{1.37}$$

το εμβαδόν του τριγώνου (ijm).

Αντικαθιστώντας την (1.34) στην (1.31) βρίσκουμε

$$\mathbf{q}(x,y) = \mathbf{N}(x,y)\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i(x,y) & \mathbf{N}_j(x,y) & \mathbf{N}_m(x,y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \upsilon_i \\ u_j \\ \upsilon_j \\ u_m \\ \upsilon_m \end{Bmatrix} \tag{1.38}$$

όπου

$$\mathbf{N}_i(x,y)=\begin{bmatrix} v_i(x,y) & 0 \\ 0 & v_i(x,y) \end{bmatrix} = v_i(x,y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.39}$$

με

$$v_i(x,y)=\frac{1}{2A^e}\left(z_i+y_{jm}x+x_{mj}y\right) \tag{1.40}$$

Το πολυώνυμο $v_i(x,y)$ ονομάζεται συνάρτηση σχήματος του κόμβου i, και μπορεί να γραφεί επίσης με τη μορφή

$$v_i(x,y)=\frac{1}{2A^e}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{A_i}{A^e} \tag{1.41}$$

όπου, P είναι το σημείο με συντεταγμένες (x,y) και A_i είναι το εμβαδόν του τριγώνου (Pjm).

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν και για τις συναρτήσεις σχήματος που αναφέρονται στους κόμβους j και m (οι σχέσεις προκύπτουν με κυκλική εναλλαγή των δεικτών).

Από την (1.41) προφανώς προκύπτει ότι

$$v_i\left(x_j,y_j\right)=v_i\left(x_m,y_m\right)=0$$

και

$$v_i\left(x_i,y_i\right)=1$$

και γενικά

$$v_k\left(x_\ell,y_\ell\right)=\delta_{k\ell}$$

1.3.2. *Παραμορφώσεις* και *τάσεις* του στοιχείου

Το πεδίο των παραμορφώσεων που αναπτύσσεται στο στοιχείο είναι

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{1.42}$$

Μετά από κατάλληλες παραγωγήσεις της (1.38) βρίσκουμε

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}\mathbf{q}^e \tag{1.43}$$

όπου

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_m}{\partial y} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} & \frac{\partial v_i}{\partial x} & \frac{\partial v_j}{\partial y} & \frac{\partial v_j}{\partial x} & \frac{\partial v_m}{\partial y} & \frac{\partial v_m}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{1.44}$$

ή

$$\mathbf{B}=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} y_{jm} & 0 & y_{mi} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{mj} & 0 & x_{im} & 0 & x_{ji} \\ x_{mj} & y_{jm} & x_{im} & y_{mi} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix} \tag{1.45}$$

Επίσης το πεδίο των τάσεων στην περίπτωση της επίπεδης ελαστικότητας είναι

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.46}$$

Οι τάσεις συνδέονται με τις παραμορφώσεις με τη σχέση **σ**=**Dε**, όπου το μητρώο ελαστικότητας **D** είναι διαφορετικό για τις περιπτώσεις της επίπεδης έντασης και της επίπεδης παραμόρφωσης (Παράρτημα 3, σχέσεις (3.4.3), (3.4.6)). Για κάθε μια ξεχωριστά απ’ αυτές τις περιπτώσεις και χωρίς να λάβουμε υπόψη τις αρχικές παραμορφώσεις και αρχικές τάσεις προκύπτει

i) Επίπεδη εντατική κατάσταση

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}=\mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{E}{1-v^2}\begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.47}$$

ή λαμβάνοντας υπόψη τις (1.43), (1.45)

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}=\frac{E}{2A^e\left(1-v^2\right)}\begin{bmatrix} y_{jm} & vx_{mj} & y_{mi} & vx_{im} & y_{ij} & vx_{ji} \\ vy_{jm} & x_{mj} & vy_{mi} & x_{im} & vy_{ij} & x_{ji} \\ \frac{1-v}{2}x_{mj} & \frac{1-v}{2}y_{jm} & \frac{1-v}{2}x_{im} & \frac{1-v}{2}y_{mi} & \frac{1-v}{2}x_{ji} & \frac{1-v}{2}y_{ij} \end{bmatrix}\mathbf{q}^e \tag{1.48}$$

ii) Επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση

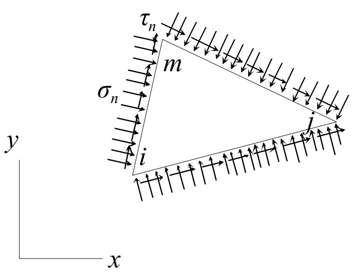
$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}=\mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.49}$$

ή

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E(1-\nu)}{2A^e(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} y_{jm} & \frac{\nu}{1-\nu}x_{jm} & y_{mi} & \frac{\nu}{1-\nu}x_{im} & y_{ij} & \frac{\nu}{1-\nu}x_{ji}\\ \frac{\nu}{1-\nu}y_{jm} & x_{mj} & \frac{\nu}{1-\nu}y_{mi} & x_{im} & \frac{\nu}{1-\nu}y_{ij} & x_{ji}\\ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{mj} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}y_{jm} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{im} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}y_{mi} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{ji} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}y_{ij}\end{bmatrix}\mathbf{q}^e \qquad (1.50)$$

1.3.3. Υπολογισμός του *μητρώου ακαμψίας* του στοιχείου

Αν απομονώσουμε από την κατασκευή το στοιχείο e (Σχ. 1.4), τότε στο σύνορο του στοιχείου θα δρουν κάποιες τάσεις που προέρχονται από τα γειτονικά στοιχεία. Τις τάσεις αυτές μπορούμε να τις θεωρήσουμε σαν μια κατανομή επιφανειακών τάσεων $\mathbf{T}=[T_x,T_y]^{\mathrm{T}}$. Ακόμα στο στοιχείο e δρα και το διάνυσμα $\mathbf{f}=[f_x,f_y]^{\mathrm{T}}$ των καθολικών δυνάμεων.



Σχήμα 1.4. Ένα επίπεδο στοιχείο e και τα φορτία με τα οποία καταπονείται.

Υποθέτουμε ότι το πάχος t των στοιχείων είναι σταθερό οπότε η αρχή των δυνατών έργων στο στοιχείο e που έχει συνολική επιφάνεια A^e και περίμετρο L^e δίνει

$$t\int_{A^e}\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\,dA+t\int_{L^e}\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}dL=t\int_{A^e}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}dA \qquad (1.51)$$

Τις δυνατές μετατοπίσεις $\delta\mathbf{q}$ και τις δυνατές παραμορφώσεις $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ μπορούμε να τις εκφράσουμε με τη βοήθεια σχέσεων αντίστοιχων προς τις (1.38) και (1.43) γιατί γενικά όταν αλλάζει το πεδίο των μετατοπίσεων εκείνο που αλλάζει είναι οι μετατοπίσεις των κόμβων. Στη προκειμένη περίπτωση οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι $\delta\mathbf{q}^e$. Άρα

$$\delta\mathbf{q}=\mathbf{N}\delta\mathbf{q}^e \qquad (1.52)$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}\delta\mathbf{q}^e \qquad (1.53)$$

Με αυτά τα δεδομένα ο πρώτος όρος του αριστερού μέλους της (1.51) που παριστάνει το δυνατό έργο των καθολικών δυνάμεων γράφεται

$$t\int_{A^e}\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\,dA=t\left(\delta\mathbf{q}^e\right)^{\mathrm{T}}\int_{A^e}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\,dA \qquad (1.54)$$

Αν ορισθεί

$$\mathbf{F}_f^e=t\int_{S^e}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\,dS \qquad (1.55)$$

από την (1.54) φαίνεται ότι το διάνυσμα $\mathbf{F}_f^e$ παριστάνει τις **στατικά ισοδύναμες** δυνάμεις που δρουν στους κόμβους του στοιχείου e. Δηλαδή τις κομβικές δυνάμεις που παράγουν ισοδύναμο έργο με τις καθολικές $\mathbf{f}$. Μ' αυτό τον τρόπο μπορούν να αντικατασταθούν οι καθολικές δυνάμεις (που επιδρούν σ' όλο το στοιχείο) με δυνάμεις $\mathbf{F}_f^e$ που δρουν μόνο στους κόμβους του στοιχείου.

Με την ίδια διαδικασία μπορούν να αντικατασταθούν και οι επιφανειακές τάσεις $\mathbf{T}$ με τις ***στατικά ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις***

$$\mathbf{F}_{\mathrm{T}}^{e}= t\int_{A^e}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}dA \tag{1.56}$$

Επομένως, η σχέση (1.51) παίρνει τη μορφή

$$\left(\delta\mathbf{q}^{e}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{F}_{f}^{e}+\mathbf{F}_{T}^{e}-\mathbf{k}^{e}\mathbf{q}^{e}\right)=0 \tag{1.57}$$

όπου

$$\mathbf{k}^{e}= t\int_{S^e}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}dS \tag{1.58}$$

παριστάνει το ***μητρώο ακαμψίας*** του στοιχείου *e*.

Εφόσον το $\delta\mathbf{q}^e$ είναι τυχαίο διάνυσμα διάφορο του μηδενός η (1.57) γράφεται

$$\mathbf{F}^{e} = \mathbf{k}^{e}\,\mathbf{q}^{e} \tag{1.59}$$

όπου

$$\mathbf{F}^{e}=\mathbf{F}_{f}^{e}+\mathbf{F}_{T}^{e} \tag{1.60}$$

είναι το διάνυσμα της συνισταμένης των γενικευμένων δυνάμεων του στοιχείου *e*.

Επειδή τα μητρώα **B, D** περιέχουν μόνο σταθερούς όρους η (1.58) γράφεται

$$\mathbf{k}^{e}= t\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\int_{A^e}dxdy = tA^{e}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B} \tag{1.61}$$

Ανάλογα με το αν έχουμε επίπεδη εντατική κατάσταση ή επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση η (1.61) γίνεται

i) επίπεδη εντατική κατάσταση συμμετρικό

$$\mathbf{k}^{e}=\frac{Et(1-\nu)}{4A^{e}(1+\nu)(1-2\nu)}\times$$
$$\times\begin{bmatrix}
y_{jm}^2+\frac{1-\nu}{2}x_{mj}^2 & & & & & \\
\frac{1+\nu}{2}x_{mj}y_{jm} & \left(x_{mj}^2+\frac{1-\nu}{2}y_{jm}^2\right) & & & & \\
\left(y_{jm}y_{mi}+\frac{1-\nu}{2}x_{im}x_{mj}\right) & \left(\nu x_{mj}y_{mi}+\frac{1-\nu}{2}x_{im}y_{jm}\right) & \left(y_{mi}^2+\frac{1-\nu}{2}x_{im}^2\right) & \text{συμμετρικό} & & \\
\left(\nu x_{im}y_{jm}+\frac{1-\nu}{2}x_{mj}y_{mi}\right) & \left(x_{im}x_{mj}+\frac{1-\nu}{2}y_{jm}y_{mi}\right) & \frac{1+\nu}{2}x_{im}y_{mi} & \left(x_{im}^2+\frac{1-\nu}{2}y_{mi}^2\right) & & \\
\left(y_{ij}y_{jm}+\frac{1-\nu}{2}x_{ji}x_{mj}\right) & \left(\nu x_{mj}y_{ij}+\frac{1-\nu}{2}x_{ji}y_{jm}\right) & \left(y_{ij}y_{mi}+\frac{1-\nu}{2}x_{im}x_{ji}\right) & \left(\nu x_{im}y_{ij}+\frac{1-\nu}{2}x_{ji}y_{mi}\right) & \left(y_{ij}^2+\frac{1-\nu}{2}x_{ji}^2\right) & \\
\nu x_{ji}y_{jm}+\frac{1-\nu}{2}x_{mj}y_{ij} & \left(x_{ji}x_{mj}+\frac{1-\nu}{2}y_{ij}y_{jm}\right) & \left(\nu x_{ij}y_{mi}+\frac{1-\nu}{2}x_{mi}y_{ij}\right) & \left(x_{im}y_{ji}+\frac{1-\nu}{2}y_{ij}y_{mi}\right) & \frac{1+\nu}{2}x_{ji}y_{ij} & \left(x_{ji}^2+\frac{1-\nu}{2}y_{ij}^2\right)
\end{bmatrix} \tag{1.62}$$

ii) επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση

$$\mathbf{k}^{e}=\frac{Et}{4A^{e}\left(1-\nu^{2}\right)}$$
$$\begin{bmatrix}
\left(y_{jm}^2+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{mj}^2\right) & & & & & \\
\frac{1}{2(1-\nu)}x_{mj}y_{jm} & \left(x_{mj}^2+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}y_{jm}^2\right) & & \text{συμμετρικό} & & \\
\left(y_{jm}y_{mi}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{im}x_{mj}\right) & \left(\frac{\nu}{(1-\nu)}x_{mj}y_{mi}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{im}x_{jm}\right) & \left(y_{mi}^2+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{im}^2\right) & . & . & \\
\left(\frac{\nu}{(1-\nu)}x_{im}y_{jm}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{mj}y_{mi}\right) & \left(x_{im}y_{mj}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}y_{jm}y_{mi}\right) & \frac{1}{2(1-\nu)}x_{im}y_{mi} & \left(x_{im}^2+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}y_{mi}^2\right) & . & . \\
\left(y_{ij}y_{jm}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{mj}x_{ji}\right) & \left(\frac{\nu}{(1-\nu)}x_{mj}y_{ij}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{ji}y_{jm}\right) & \left(y_{ij}y_{mi}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{im}x_{ji}\right) & \left(\frac{\nu}{(1-\nu)}x_{im}y_{ij}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{ji}y_{mi}\right) & \left(y_{ij}^2+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{ji}^2\right) & . \\
\left(\frac{\nu}{(1-\nu)}x_{ji}y_{jm}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}y_{ij}x_{mj}\right) & \left(x_{ji}x_{mj}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}y_{jm}y_{ij}\right) & \left(\frac{\nu}{(1-\nu)}x_{ji}y_{mi}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}x_{im}y_{ij}\right) & \left(x_{im}x_{ji}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}y_{mi}y_{ij}\right) & \frac{1}{2(1-\nu)}x_{ji}y_{ij} & \left(x_{ji}^2+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}y_{ij}^2\right)
\end{bmatrix} \tag{1.63}$$

Το μητρώο ακαμψίας $\mathbf{k}^e$ είναι ένα συμμετρικό μητρώο γι' αυτό και έχουν διατηρηθεί μόνον οι όροι που βρίσκονται κάτω από την διαγώνιο.

Στην περίπτωση που οι συνιστώσες f_x, f_y των καθολικών δυνάμεων είναι σταθερές, οι δυνάμεις στους κόμβους είναι

$$\mathbf{F}_f^e = t \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \frac{S^e}{3} \tag{1.64}$$

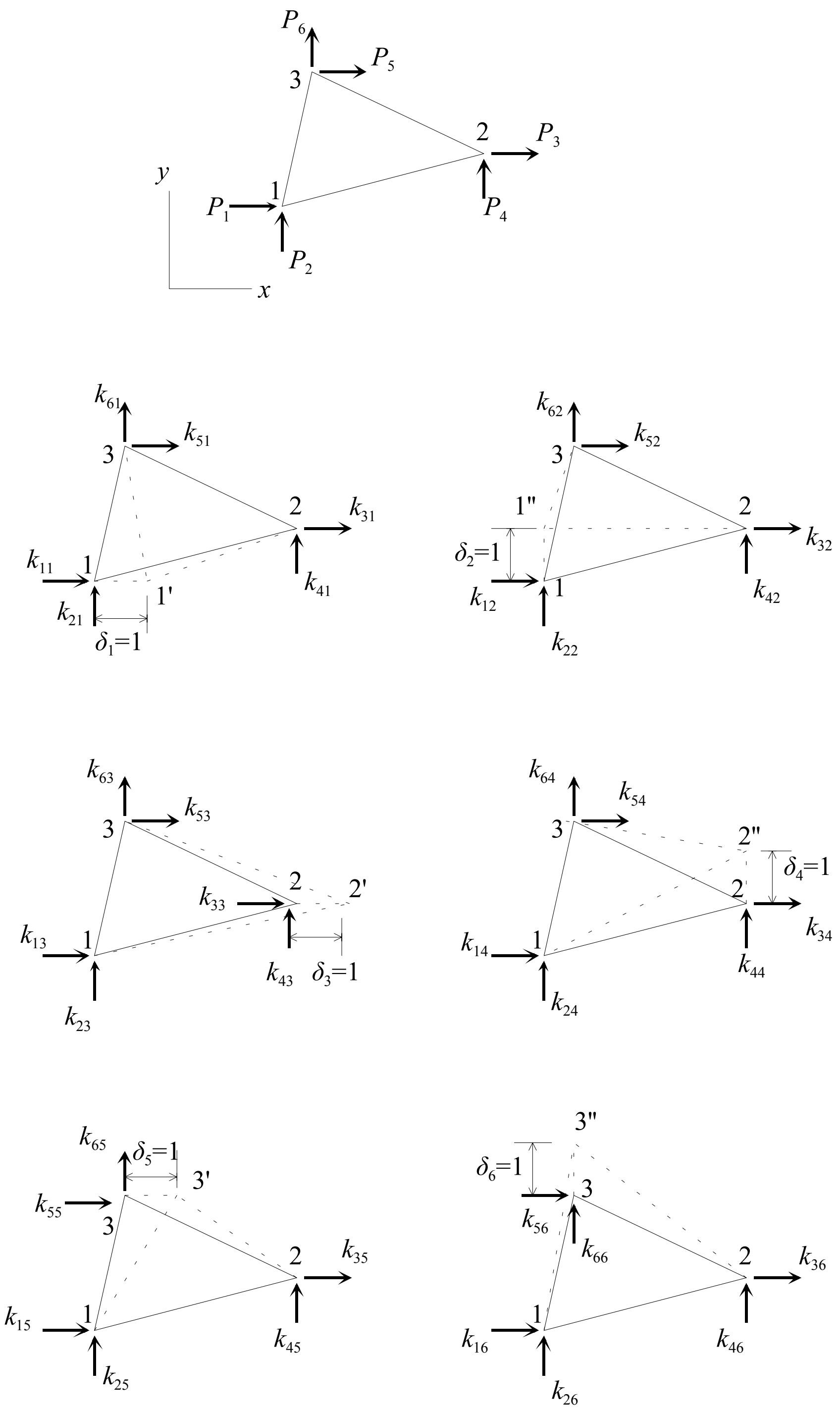
Όταν οι συνιστώσες T_x και T_y είναι σταθερές, τότε το συνολικό φορτίο που επενεργεί σε κάθε πλευρά του τριγώνου μοιράζεται εξίσου στις κορυφές που αποτελούν τα άκρα της. (Δείτε το σαν εφαρμογή)

1.3.4. Παρατηρήσεις σχετικά με το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου

Στην παράγραφο αυτή θα ενδιαφερθούμε για μερικές γενικές ιδιότητες του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου. Για λόγους εποπτικούς θα εξετάσουμε ένα τριγωνικό στοιχείο αλλά τα συμπεράσματά μας είναι εύκολα επεκτάσιμα.

Απομονώνουμε λοιπόν από μια επίπεδη κατασκευή ένα (επίπεδο) τριγωνικό στοιχείο με τρεις κόμβους. Οπότε στις κορυφές του θα δρουν οι ισοδύναμες συγκεντρωμένες δυνάμεις $\mathbf{F}^e$ ενώ οι μετατοπίσεις των κόμβων θα είναι οι $\mathbf{q}^e$. Για απλοποίηση της παρουσίασης ονομάζουμε τους κόμβους 1,2,3 και εισάγουμε τον εξής συμβολισμό

$$P_{2i-1} = F_{xi} \quad , \quad P_{2i} = F_{yi} \quad , \quad \delta_{2i-1} = u_i \quad , \quad \delta_{2i} = \upsilon_i \quad \left(i = 1,2,3\right) \tag{1.65}$$



Σχήμα 1.5

όπου (F_{xi},F_{yi}) και (u_i,υ_i) είναι η δύναμη ή η μετατόπιση που δρα στον κόμβο i.
Άρα η σχέση (1.59) γράφεται

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \tag{1.66}$$

όπου $k_{ij}(i,j=1,2,\ldots,6)$ είναι τα στοιχεία του $\mathbf{k}^e$.

Η παραπάνω σχέση γράφεται ακόμα

$$\begin{aligned} P_1 &= k_{11}\delta_1 + k_{12}\delta_2 + k_{13}\delta_3 + k_{14}\delta_4 + k_{15}\delta_5 + k_{16}\delta_6 \\ P_2 &= k_{21}\delta_1 + k_{22}\delta_2 + k_{23}\delta_3 + k_{24}\delta_4 + k_{25}\delta_5 + k_{26}\delta_6 \\ P_3 &= k_{31}\delta_1 + k_{32}\delta_2 + k_{33}\delta_3 + k_{34}\delta_4 + k_{35}\delta_5 + k_{36}\delta_6 \\ P_4 &= k_{41}\delta_1 + k_{42}\delta_2 + k_{43}\delta_3 + k_{44}\delta_4 + k_{45}\delta_5 + k_{46}\delta_6 \\ P_5 &= k_{51}\delta_1 + k_{52}\delta_2 + k_{53}\delta_3 + k_{54}\delta_4 + k_{55}\delta_5 + k_{56}\delta_6 \\ P_6 &= k_{61}\delta_1 + k_{62}\delta_2 + k_{63}\delta_3 + k_{64}\delta_4 + k_{65}\delta_5 + k_{66}\delta_6 \end{aligned} \tag{1.67}$$

Οι σχέσεις (1.66) δεν εκφράζουν τίποτα άλλο παρά ότι οι δυνάμεις στους κόμβους είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των μετατοπίσεων των κόμβων. Έτσι διπλασιασμός των μετατοπίσεων προκαλεί διπλασιασμό των δυνάμεων και αντιστρόφως. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αυτονόητο αφού βρισκόμαστε στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικότητας.

Αν τώρα στη σχέση (1.66) διαλέξουμε $\delta_1=1$, $\delta_2=\delta_3=\delta_4=\delta_5=\delta_6=0$ βλέπουμε ότι τα στοιχεία $k_{i1}(i=1,2,\ldots,6)$ της πρώτης στήλης ισούνται με τις δυνάμεις $P_1^1,\ldots,P_6^1$ στους κόμβους. Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία της πρώτης στήλης είναι οι δυνάμεις $P_1^1,\ldots,P_6^1$ που πρέπει να εφαρμοσθούν στους κόμβους ώστε να έχουμε μοναδιαία μετατόπιση του κόμβου 1 κατά τη διεύθυνση x. Αντίστοιχα συμπεράσματα εξάγουμε αν πάρουμε κατά σειρά τα $\delta_2,\delta_3,\ldots,\delta_6$ μοναδιαία και τα υπόλοιπα μηδέν. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι συντελεστές $k_{ij}(i,j=1,2,\ldots,6)$ έχουν φυσική σημασία. Απεικόνιση της φυσικής αυτής σημασίας δίνουμε στο Σχ. 1.5 που αντιστοιχούν σε μοναδιαίες μετατοπίσεις $\delta_2,\delta_3,\ldots,\delta_6$. Η νέα αυτή θέση των κόμβων 1,2,3 συμβολίζεται με 1',2',3',1",2",3".

1.4. ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΤΕΛΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ

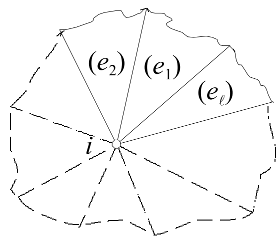
Η διαμόρφωση του τελικού συστήματος ακαμψίας μπορεί να γίνει είτε με τη διαδικασία ισορροπίας των επιμέρους κόμβων είτε με την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων. Βέβαια και η αρχή δυνατών έργων δεν εκφράζει παρά ισορροπία στο σύνολο των κόμβων του σώματος. Όμως η εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων επιτρέπει να εξετασθούν πιο γενικά μοντέλα από ότι η συνθήκη ισορροπίας των κόμβων. Όπως είπαμε με την ισορροπία κόμβων δεν μπορεί να αντιμετωπισθεί το πρόβλημα εσωτερικών κόμβων, ή το πρόβλημα κόμβων που περιλαμβάνουν στις κομβικές παραμέτρους, παραγώγους των μετατοπίσεων κλπ.

Από την άλλη μεριά η μέθοδος ισορροπίας μας δίνει μια πολύ πιο εποπτική και πρακτική εικόνα της διαδικασίας. Γι' αυτό το λόγο θα περιλάβουμε και τις δύο αποδείξεις.

1.4.1. Σχηματισμός του ολικού μητρώου ακαμψίας με τη μέθοδο ισορροπίας

Ο σχηματισμός των τελικών εξισώσεων ισορροπίας του μέσου γίνεται αν θεωρήσουμε την ισορροπία κάθε κόμβου της κατασκευής ξεχωριστά. Άρα, εάν i είναι ένας κόμβος που ανήκει σε ℓ στοιχεία e_k (k=1,…,ℓ) και $\mathbf{R}_i$ το διάνυσμα της γενικευμένης κομβικής δύναμης που ασκείται σ' αυτόν (Σχ. 1.6), παίρνοντας την ισορροπία στο i προκύπτει

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{F}_i^{e1} + \mathbf{F}_i^{e2} + \cdots + \mathbf{F}_i^{e\ell} \tag{1.68}$$



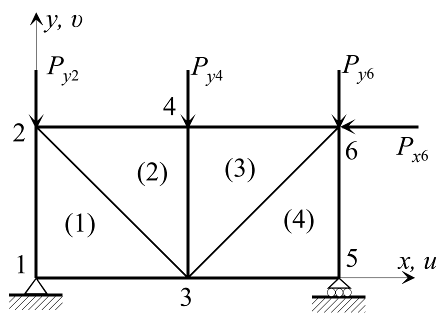
Σχήμα 1.6. Κόμβος i που ανήκει σε ℓ στοιχεία του χώρου D^h.

όπου, $\mathbf{F}_i^{ek}\left(k=1,2,\ldots,\ell\right)$ οι δυνάμεις που ασκούνται από καθένα από τα στοιχεία e_k (k=1,2,…,ℓ) στον κόμβο i. Οι κομβικές αυτές δυνάμεις δίνονται από τη σχέση (1.60) ανάλογα με τη μορφή του στοιχείου και τα φορτία που έχουν επιβληθεί στον φορέα. Οπότε, εάν η κατασκευή περιλαμβάνει n κόμβους θα σχηματισθούν n εξισώσεις με αγνώστους τις κομβικές παραμέτρους.

Ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου φαίνεται καλύτερα στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα

Θεωρείται μια επίπεδη αμφιέρειστη δοκός με δεδομένη φόρτιση που διαιρείται σε 4 τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία.



Η δοκός ισορροπεί και κάθε κόμβος παρουσιάζει δύο βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή τις μετατοπίσεις u_i και υ_i. Θέτοντας

$$\mathbf{q}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ \upsilon_i \end{Bmatrix}$$

έχουμε ότι οι βαθμοί ελευθερίας του κόμβου i περιορίζονται σε 1 (ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιείται για λόγους απλότητας) και ότι οι κομβικές παράμετροι συμπίπτουν με τις κομβικές μετατοπίσεις. Αντίστοιχα, για τις κομβικές δυνάμεις ισχύει

$$\mathrm{F}_i^e = \begin{Bmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \end{Bmatrix}$$

Άρα, εφόσον ο συνολικός αριθμός των κόμβων είναι 6 το μητρώο ακαμψίας του φορέα θα έχει διαστάσεις (6×6) και τα στοιχεία του $\mathbf{k}^e$ θα είναι μητρώα (2×2).

Εξετάζοντας το πρώτο στοιχείο του φορέα έχουμε ότι η ισορροπία του κόμβου 1 εξαρτάται από τις μετατοπίσεις των κόμβων 1,2,3 (θεωρώντας σαν φορά διαγραφής την ανθωρολογιακή) όπου, οι συντελεστές ακαμψίας είναι αντίστοιχα

$$k_{11}^1 \quad , \quad k_{13}^1 \quad , \quad k_{12}^1$$

Οπότε, εφαρμόζοντας την (1.59) για το στοιχείο (1) προκύπτει

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{13}^1 & k_{12}^1 \\ k_{31}^1 & k_{33}^1 & k_{32}^1 \\ k_{21}^1 & k_{23}^1 & k_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_3^1 \\ F_2^1 \end{Bmatrix} \tag{α}$$

Αντίστοιχα, για τα στοιχεία (2), (3), και (4) ισχύει

$$\begin{bmatrix} k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ k_{41}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^2 \\ F_3^2 \\ F_4^2 \end{Bmatrix} \tag{β}$$

$$\begin{bmatrix} k_{44}^3 & k_{43}^3 & k_{45}^3 \\ k_{34}^3 & k_{33}^3 & k_{35}^3 \\ k_{54}^3 & k_{53}^3 & k_{55}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_3 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4^3 \\ F_3^3 \\ F_5^3 \end{Bmatrix} \tag{γ}$$

$$\begin{bmatrix} k_{44}^4 & k_{45}^4 & k_{46}^4 \\ k_{54}^4 & k_{55}^4 & k_{56}^4 \\ k_{64}^4 & k_{65}^4 & k_{66}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4^4 \\ F_5^4 \\ F_6^4 \end{Bmatrix} \tag{δ}$$

Παίρνοντας την ισορροπία σε κάθε κόμβο της δοκού προκύπτει

$$k_{11}^1 q_1 + k_{13}^1 q_3 + k_{12}^1 q_2 = F_1^1 = R_1$$

$$k_{21}^1 q_1 + \left(k_{22}^1 + k_{22}^2\right) q_2 + \left(k_{23}^1 + k_{23}^2\right) q_3 + k_{24}^2 q_4 = F_2^1 + F_2^2 = R_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P_{y2} \end{Bmatrix}$$

$$k_{31}^1 q_1 + \left(k_{32}^1 + k_{32}^2\right) q_2 + \left(k_{33}^1 + k_{33}^2 + k_{33}^3\right) q_3 + \left(k_{34}^2 + k_{34}^3\right) q_4 + k_{35}^3 q_5 = F_3^1 + F_3^2 + F_3^3 = R_3$$

$$k_{42}^2 q_2 + \left(k_{43}^2 + k_{43}^3\right) q_3 + \left(k_{44}^2 + k_{44}^3 + k_{44}^4\right) q_4 + \left(k_{45}^3 + k_{45}^4\right) q_5 + k_{46}^4 q_6 = F_4^2 + F_4^3 + F_4^4 = R_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P_{y4} \end{Bmatrix}$$

$$k_{53}^3 q_3 + \left(k_{54}^3 + k_{54}^4\right) q_4 + \left(k_{55}^3 + k_{55}^4\right) q_5 + k_{56}^4 q_6 = F_5^3 + F_5^4 = R_5$$

$$k_{64}^4 q_4 + k_{65}^4 q_5 + k_{66}^4 q_6 = R_6 = \begin{Bmatrix} -P_{x6} \\ -P_{y6} \end{Bmatrix}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας σε μητρωϊκή γραφή γράφονται ως εξής

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^1 + k_{23}^2 & k_{24}^2 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 + k_{32}^2 & k_{33}^1 + k_{33}^2 + k_{33}^3 & k_{34}^2 + k_{34}^3 & k_{35}^3 & 0 \\ 0 & k_{42}^2 & k_{43}^2 + k_{43}^3 & k_{44}^2 + k_{44}^3 + k_{44}^4 & k_{45}^3 + k_{45}^4 & k_{46}^4 \\ 0 & 0 & k_{53}^3 & k_{54}^3 + k_{54}^4 & k_{55}^3 + k_{55}^4 & k_{56}^4 \\ 0 & 0 & 0 & k_{64}^4 & k_{65}^4 & k_{66}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$