Κεφάλαιο 2

Γενική Περιγραφή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Μέθοδος Μετατοπίσεων

2.1. ΓΕΝΙΚΑ

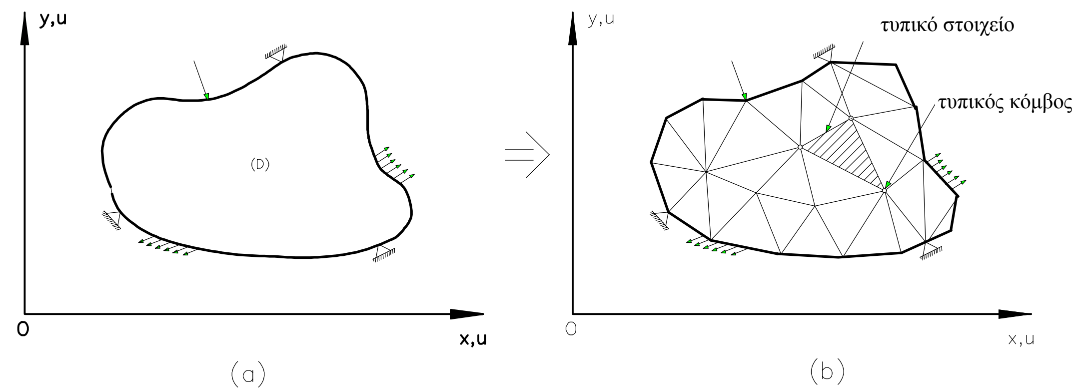
Στο κεφάλαιο Εισαγωγή παράγραφο δείξαμε τη συσχέτιση μεταξύ της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και της μητρωϊκής ανάλυσης των κατασκευών. Αναφέραμε επίσης ότι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων ακολουθεί (σχεδόν) τα ίδια βήματα με τη μητρωϊκή ανάλυση των κατασκευών.

Στο Κεφάλαιο αυτό δίνουμε λεπτομερέστερη περιγραφή των επιμέρους βημάτων και θεμελιώνουμε, με γενικό τρόπο τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η εξειδίκευση της μεθόδου σε επιμέρους κατασκευές (ραβδωτοί φορείς, επιφανειακοί φορείς, πλάκες κελύφη κλπ) γίνεται στα επόμενα Κεφάλαια. Όλη όμως η ανάπτυξη θα στηρίζεται ουσιαστικά σε αυτό το Κεφάλαιο.

Η θεμελίωση της μεθόδου μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των γενικών μεθόδων μεταβολών που βέβαια καλύπτει και την επίλυση διαφορετικών εξισώσεων από αυτές που επιλύουν το πρόβλημα της ελαστικότητας. Προτιμήθηκε όμως η ανάπτυξη να βασισθεί στην ***αρχή των δυνατών έργων*** που είναι πιο οικεία στον Μηχανικό. Εδώ πρέπει να τονισθεί ότι η αρχή των δυνατών έργων δεν εισάγει καμία απλοποίηση και μάλιστα μπορεί να θεωρηθεί πολύ πιο γενική από την ανάπτυξη που βασίζεται στην ελαχιστοποίηση της δυναμικής ενέργειας. Αυτό είναι κατανοητό γιατί η αρχή των δυνατών έργων ισχύει και στην πλαστικότητα ενώ η αρχή του ελάχιστου της δυναμικής ενέργειας ισχύει μόνο στην περίπτωση ελαστικών υλικών. Τέλος από μαθηματική άποψη η αρχή των δυνατών έργων συμπίπτει με τη ***μέθοδο Galerkin*** [1-5].

2.2. ΔΙΑΚΕΚΡΙΜΕΝΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

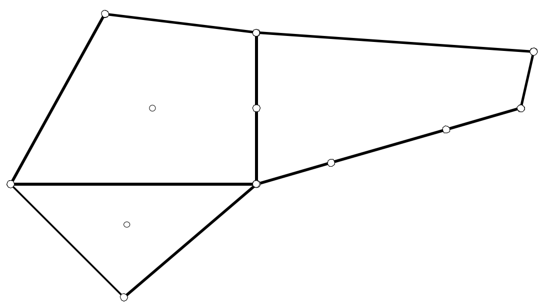
Όπως περιγράψαμε και στην §1.3, ο φορέας *D, υποδιαιρείται* με τη βοήθεια ιδεατών γραμμών ή επιφανειών σ' έναν αριθμό στοιχείων (Σχ.1.3). Πρέπει στο σημείο αυτό να επισημάνουμε ότι η υποδιαίρεση αυτή συνήθως να δεν αναπαριστά με απόλυτη ακρίβεια την κατασκευή, π.χ. το καμπύλο σύνορο του σώματος δεν μπορεί να παρασταθεί με απόλυτη ακρίβεια (Σχ.1.3α και 1.3β). Άρα η διακεκριμενοποίηση της κατασκευής οδηγεί στον υπολογισμό μιας κατασκευής D_h που μοιάζει με την αρχική D αλλά δεν ταυτίζεται απόλυτα με αυτήν. Η κατασκευή D_h μπορεί να έχει απλοποιηθεί όσον αφορά και την παράσταση των οριακών συνθηκών (π.χ. αντικατάσταση κατανεμημένων φορτίων με συγκεντρωμένα φορτία στους κόμβους κλπ).



Σχήμα 1.3

Τα στοιχεία θεωρούνται ότι συνδέονται μεταξύ τους σε διακριτά σημεία τους ***κόμβους***. Αυτό σημαίνει ότι κατά κάποιο τρόπο η κατασκευή μετασχηματίζεται σε ένα είδος δικτυώματος. Το σχήμα βέβαια στην πραγματικότητα είναι πολύ πιο σύνθετο, δεδομένου ότι μπορεί να υπάρχουν και εσωτερικοί κόμβοι (Σχ.2.1) ή οι παράμετροι στους κόμβους μπορεί να μην επιτρέπουν την παρουσίαση της κατασκευής ως δικτυώματος. Η διαφορά με τη μητρωϊκή ανάλυση των κατασκευών είναι ότι στη θέση των ράβδων έχουμε στοιχεία. Σε κάθε κόμβο κάθε στοιχείου αντιστοιχεί ένας αριθμός ***κομβικών παραμέτρων***. Οι κομβικές παράμετροι είναι γενικευμένες μετατοπίσεις (δηλ. μετατοπίσεις και παράγωγοί τους).

Στην περίπτωση των καμπτόμενων κατασκευών (δοκοί, πλάκες, κελύφη) η ύπαρξη των παραγώγων των μετατοπίσεων είναι υποχρεωτική. Στις άλλες κατασκευές η προσθήκη των παραγώγων στις απαραίτητες κομβικές παραμέτρους απλά αυξάνουν την ακρίβεια του στοιχείου. Ακόμα η προσθήκη επιπλέον κομβικών παραμέτρων (δηλαδή παράγωγοι μετατοπίσεων) σε κόμβους μπορεί να μην είναι ομοιόμορφη.



Σχήμα 2.1. Στοιχεία συνδεδεμένα μεταξύ τους.

Έτσι είναι δυνατόν μερικοί να περιλαμβάνουν και παραγώγους των μετατοπίσεων και μερικοί όχι. Επίσης μπορεί να έχουμε κόμβους, στους οποίους υπάρχουν μόνο παράγωγοι των μετατοπίσεων (κάτι τέτοιο χρησιμοποιείται συχνά στην περίπτωση των πλακών (βλ. Κεφάλαιο 9)).

Από την παραπάνω ανάπτυξη βλέπουμε ότι ο αριθμός k των κομβικών παραμέτρων κάθε κόμβου μπορεί να είναι διαφορετικός από το βαθμό m της ελευθερίας κίνησης του κάθε κόμβου (και συνήθως $k \geq m$).

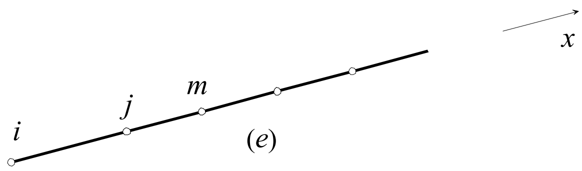
Έστω τώρα N ο συνολικός αριθμός των στοιχείων στα οποία υποδιαιρείται η κατασκευή και n ο συνολικός αριθμός κόμβων της κατασκευής. Τότε, ο συνολικός αριθμός των κομβικών παραμέτρων της κατασκευής είναι M, όπου το M συνήθως είναι ίσο με kn.

2.3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

2.3.1. Προσδιορισμός των *μετατοπίσεων* σε κάθε στοιχείο

Ήδη έχει αναφερθεί ότι οι μετατοπίσεις σε κάθε σημείο του στοιχείου εκφράζονται συναρτήσει των μετατοπίσεων των κόμβων με τη βοήθεια κάποιου παρεμβολικού τύπου. Συνήθως για την παρεμβολή χρησιμοποιούνται πολυώνυμα. Η επιλογή αυτή γίνεται γιατί οι αλγεβρικές πράξεις με τα πολυώνυμα (όπως η ολοκλήρωση, ή η παραγώγιση) είναι σχετικά εύκολες και έτσι μπορούμε να δώσουμε τις τελικές εκφράσεις σε κλειστή μορφή. Φυσικά όσο μεγαλύτερου βαθμού πολυώνυμο εκλέγεται για την προσεγγιστική έκφραση των μετατοπίσεων τόσο πιο κοντά στην πραγματική λύση βρισκόμαστε.

Έχοντας λοιπόν υιοθετήσει ένα παρεμβολικό τύπο για κάθε στοιχείο, το πεδίο των μετατοπίσεων ορίζεται ξεχωριστά σ' αυτό. Στην περίπτωση ενός μονοδιάστατου στοιχείου e (Σχ. 2.2) (ράβδος δικτυώματος ή δοκός σε κάμψη) η γενική μορφή του πολυωνύμου παρεμβολής που δίνει τη μετατόπιση $q(x)=u(x)$ κατά τη διεύθυνση του στοιχείου είναι:



Σχήμα 2.2. Ένα μονοδιάστατο στοιχείο

$$q(x) = u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_{m+1} x^m + \ldots \tag{2.1}$$

όπου $q(x)$ η μετατόπιση ενός σημείου του e.

Η (2.1) γράφεται

$$q(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^m & \ldots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

ή

$$q(x) = \mathbf{M}(x)\boldsymbol{\alpha} \tag{2.2}$$

Οι όροι α_i είναι σταθεροί, προκύπτουν ανάλογα με το στοιχείο και ονομάζονται ***γενικευμένες συντεταγμένες***, επειδή δεν είναι απαραίτητα μόνο συνδεδεμένοι με τις μετατοπίσεις των κόμβων του στοιχείου. Αυτές μπορεί να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός ορισμένων κομβικών μετατοπίσεων και ενδεχομένως παραγώγων τους όπως συμβαίνει στα καμπτόμενα στοιχεία (δηλαδή δοκούς, πλάκες και κελύφη). Ο αριθμός των όρων α_ι πρέπει να είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό των κομβικών παραμέτρων του στοιχείου. Οι συναρτήσεις $\mathbf{M}(x)$ ονομάζονται ***συναρτήσεις μετατόπισης***.

Στην περίπτωση της επίπεδης έντασης ή της επίπεδης παραμόρφωσης υπάρχουν δύο συνιστώσες $u(x,y)$ και $\upsilon(x,y)$ της μετατόπισης. Το πολυώνυμο της παρεμβολής για κάθε μετατόπιση είναι της μορφής

$$\begin{aligned} u(x,y) &= a_1 + a_2\,x + a_3\,y + a_4\,x^2 + a_5\,x\,y + a_6\,y^2 + \ldots \\ \upsilon(x,y) &= b_1 + b_2\,x + b_3\,y + b_4\,x^2 + b_5\,x\,y + b_6\,y^2 + \ldots \end{aligned} \tag{2.3}$$

που με μητρωϊκή γραφή είναι

$$\mathbf{q}(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ \upsilon(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x & y & x^2 & \ldots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

ή

$$\mathbf{q}(x,y) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(x,y) & 0 \\ 0 & \mathbf{G}(x,y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

όπου

$$\mathbf{G}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & \ldots \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}. \tag{2.5}$$

Τελικά η (2.4) μπορεί να τεθεί υπό τη μορφή

$$\mathbf{q}(x) = \mathbf{M}(x,y)\boldsymbol{\alpha} \tag{2.6}$$

Αντίστοιχα, στην τρισδιάστατη κατάσταση ισχύει

$$\mathbf{q}(x,y,z) = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ \upsilon(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(x,y,z) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}(x,y,z) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}(x,y,z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

με

$$\mathbf{G}(x,y,z)=\begin{bmatrix}1 & x & y & z & x^2 & xy & \dots & \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\end{Bmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{Bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\end{Bmatrix} \quad \mathbf{c}=\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

Σημειώνεται ότι ο αριθμός των συντεταγμένων a_i όπως και των b_i και c_i των σχέσεων (2.5) και (2.8) είναι ίσος με τον αριθμό των κόμβων του στοιχείου.

Η (2.7) γράφεται

$$\mathbf{q}(x,y,z)=\mathbf{M}(x,y,z)\boldsymbol{\alpha} \tag{2.9}$$

όπου, **α** είναι το μητρώο στήλη των συντελεστών a_i,b_i,c_i. Παρατηρείται ότι η (2.9) είναι ανάλογη με τη σχέση (2.2) που βρέθηκε για τα μονοδιάστατα στοιχεία.

Η σχέση (2.9) δίνει τις μετατοπίσεις κάθε σημείου ενός στοιχείου *e* (στην περίπτωση της τρισδιάστατο ελαστικότητας και όχι στην περίπτωση των καμπτόμενων κατασκευών). Επομένως δίνει τις μετατοπίσεις $\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_j,\mathbf{q}_m,\dots$ των κόμβων $i,j,m,\dots$ του στοιχείου *e,* αν εφαρμοσθεί για τιμές των (x,y,z) ίσες με τις συντεταγμένες (x_i,y_i,z_i), (x_j,y_j,z_j), $(x_m,y_m,z_m),\dots$ των κόμβων του *e*. Προκύπτουν λοιπόν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_i &= \mathbf{M}(x_i\ ,y_i\ ,z_i)\boldsymbol{\alpha}\\
\mathbf{q}_j &= \mathbf{M}(x_j\ ,y_j\ ,z_j)\boldsymbol{\alpha}\\
\mathbf{q}_m &= \mathbf{M}(x_m,y_m,z_m)\boldsymbol{\alpha}\\
\vdots & \qquad \vdots
\end{aligned}$$

που η μητρωϊκή γραφή είναι

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{q}_i\\\mathbf{q}_j\\\mathbf{q}_m\\\vdots\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}(x_i\ ,y_i\ ,z_i\ )\\\mathbf{M}(x_j\ ,y_j\ ,z_j)\\\mathbf{M}(x_m,y_m,z_m)\\\vdots\end{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}$$

ή σε πιο συμπυκνωμένη μορφή

$$\mathbf{q}^e=\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} \tag{2.10}$$

Στη γενική περίπτωση η σχέση (2.10) μπορεί να αντιστραφεί, εκφράζοντας τις γενικευμένες συντεταγμένες συναρτήσει των μετατοπίσεων των κόμβων έχουμε

$$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}^e \tag{2.11}$$

όπου, $\mathbf{A}^{-1}$ είναι ένα μητρώο μετασχηματισμού των μετατοπίσεων. Από την σχέση (2.11) φαίνεται ότι ο ολικός αριθμός των γενικευμένων συντεταγμένων είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό των βαθμών ελευθερίας του στοιχείου *e*. Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.11) στ σχέση (2.9) βρίσκουμε

$$\mathbf{q}(x,y,z)=\mathbf{N}(x,y,z)\mathbf{q}^e \tag{2.12}$$

ή

$$\mathbf{q}(x,y,z) = \left[\mathbf{N}_i(x,y,z) \quad \mathbf{N}_j(x,y,z) \quad \mathbf{N}_m(x,y,z) \quad \ldots\right]\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_m \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

όπου

$$\mathbf{N}(x,y,z) = \mathbf{M}(x,y,z)\,\mathbf{A}^{-1} \tag{2.13}$$

Τα $\mathbf{N}_\ell(x,y,z)$ (ℓ=$i,j,m,\ldots$) γράφονται

$$\mathbf{N}_\ell(x,y,z) = \begin{bmatrix} v_\ell(x,y,z) & 0 & 0 \\ 0 & v_\ell(x,y,z) & 0 \\ 0 & 0 & v_\ell(x,y,z) \end{bmatrix} = v_\ell(x,y,z)\,\mathbf{I}\,,\ \ell = i,j,\ldots \tag{2.14}$$

όπου, **I** το μοναδιαίο μητρώο.

Οι συναρτήσεις $v_\ell\ (x,y,z)$ (ℓ=$i,j,m,\ldots$) είναι πολυώνυμα και ονομάζονται ***συναρτήσεις σχήματος*** και εξαρτώνται από τη γεωμετρία του στοιχείου και τον παρεμβολικό τύπο που χρησιμοποιήθηκε. Από την (2.14) προκύπτει ότι οι συναρτήσεις $v_\ell(x,y,z)$ (ℓ=1, 2,…,n) ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} &v_i(x_i, y_i, z_i) = 1 \\ &v_j(x_i, y_i, z_i) = v_m(x_i, y_i, z_i) = \cdots = 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Η (2.12) δίνει κατευθείαν τις μετατοπίσεις μέσα στο τυχόν στοιχείο e συναρτήσει των μετατοπίσεων των κόμβων του στοιχείου. Το βασικό πρόβλημα της προτεινόμενης διαδικασίας είναι ότι δεν είναι πάντα δυνατή η αντιστροφή του μητρώου **A.** Λύση στο πρόβλημα αποτελεί η απ’ ευθείας εισαγωγή της συνάρτησης σχήματος χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες. Δηλαδή η εισαγωγή μιας συνάρτησης που να πληροί τις συνθήκες (2.15) ενώ συγχρόνως θα ικανοποιεί τις απαιτήσεις σύγκλισης. Η τελευταία αυτή διαδικασία προτιμάται εκτός των άλλων και για λόγους οικονομίας (δεν απαιτείται ο σχηματισμός του **A).**

2.3.2. *Παραμορφώσεις* και *τάσεις* του στοιχείου

Οι παραμορφώσεις στο τυχόν στοιχείο e συνδέονται, ως γνωστόν, με τις μετατοπίσεις $\mathbf{q}(x,y,z)$ (στην περίπτωση της τρισδιάστατης ελαστικότητας) με την σχέση

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

Η σχέση (2.16) σε τελεστική γραφή παίρνει τη μορφή

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \aleph \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ \upsilon(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} = \aleph\, \mathbf{q}(x,y,z) \tag{2.17}$$

όπου, $\aleph$ ένα **μητρώο τελεστής** της μορφής

$$\aleph = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Αντίστοιχα ορίζονται οι παραμορφώσεις στη μονοδιάστατη κατάσταση ή στην διδιάστατη. Δηλαδή η σχέση (2.17) αποτελεί μια γενική έκφραση. Αντικαθιστώντας στην (2.18) τις μετατοπίσεις $\mathbf{q}(x,y,z)$ από την σχέση (2.12) έχουμε

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\,\mathbf{q}^e \tag{2.19}$$

όπου

$$\mathbf{B} = \aleph \mathbf{N}(x,y,z) \tag{2.20}$$

Από τη σχέση (2.19) έχουμε τις παραμορφώσεις στο τυχόν στοιχείο e συναρτήσει των μετατοπίσεων των κόμβων $\mathbf{q}^e$ και του μητρώου **B** που όμως προσδιορίζεται πολύ απλά εφόσον οι μετατοπίσεις έχουν εκφρασθεί συναρτήσει των κομβικών παραμέτρων και των συναρτήσεων σχήματος. Αν μάλιστα οι συναρτήσεις σχήματος $\mathbf{N}(x,y,z)$ είναι γραμμικές τότε οι παραμορφώσεις θα είναι σταθερές σε κάθε σημείο του e.

Αν $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ οι *αρχικές παραμορφώσεις* του στοιχείου *e* δηλαδή οι παραμορφώσεις που οφείλονται στην ανομοιόμορφη αλλαγή της θερμοκρασίας στη συστολή ή διόγκωση, κλπ, στις οποίες είναι δυνατό να έχει υποβληθεί ο χώρος D^h, τότε οι τάσεις θα προέρχονται από την διαφορά μεταξύ πραγματικών και αρχικών παραμορφώσεων. Οπότε

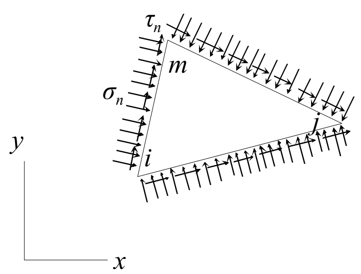
$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_0\right) \tag{2.21}$$

όπου, **D** το μητρώο των ελαστικών σταθερών (Παράρτημα Ι).

2.3.3. Υπολογισμός του *μητρώου ακαμψίας* του στοιχείου

Στην περίπτωση των ραβδωτών φορέων ανάλογα με το είδος του στοιχείου (ράβδος δικτυώματος, δοκός σε επίπεδη κάμψη, δοκός στο χώρο, κλπ) προκύπτουν αναλυτικά (κάνοντας χρήση απλών θεωρημάτων της αντοχής υλικών) το μητρώο ακαμψίας και οι δράσεις στους κόμβους.

Στην περίπτωση επιφανειακών κλπ φορέων το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου δεν μπορεί να προκύψει αναλυτικά. Το μητρώο ακαμψίας θα προκύψει από την εφαρμογή της αρχής δυνατών έργων στο στοιχείο *e*.



Σχήμα 1.4. Ένα επίπεδο στοιχείο *e* και τα φορτία με τα οποία καταπονείται.

Για το λόγο αυτό απομονώνουμε από την κατασκευή ένα στοιχείο *e* (Σχ. 1.4). Τότε στο σύνορο του στοιχείου θα δρουν κάποιες τάσεις που προέρχονται από τα γειτονικά στοιχεία. Τις τάσεις αυτές μπορούμε να τις θεωρήσουμε σαν μια κατανομή επιφανειακών τάσεων $\mathbf{T}=[T_x,T_y,T_z]^{\mathrm{T}}$. Ακόμα στο στοιχείο *e* δρα και το διάνυσμα $\mathbf{f}=[f_x,f_y,f_z]^{\mathrm{T}}$ των καθολικών δυνάμεων. Τέλος έστω ότι στον κάθε κόμβο *i* του στοιχείου δρουν οι συγκεντρωμένες δυνάμεις $\mathbf{P}_i=[P_{xi},P_{yi},P_{zi}]^{\mathrm{T}}$(*) οπότε σε όλους τους κόμβους του στοιχείου θα δρουν οι δυνάμεις $\mathbf{F}_P^e=\left[\mathbf{P}_i,\mathbf{P}_j,\mathbf{P}_m,\ldots\right]^{\mathrm{T}}$.

Εφαρμόζοντας τώρα την αρχή των δυνατών έργων στο στοιχείο *e* που έχει όγκο V^e και συνολική επιφάνεια S^e βρίσκουμε

$$\left\{\delta\mathbf{q}^e\right\}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_P^e+\int_{V^e}\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\,dV+\int_{S^e}\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\,dS=\int_{V^e}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,dV \tag{2.22}$$

Οι δυνατές μετατοπίσεις $\delta\mathbf{q}$ και οι δυνατές παραμορφώσεις $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ δίνονται από τους ίδιους τύπους (2.12), (2.19) με τις πραγματικές μετατοπίσεις και παραμορφώσεις με αντικατάσταση του $\mathbf{q}^e$ με $\delta\mathbf{q}^e$. Δηλαδή,

$$\delta\mathbf{q}=\mathbf{N}\delta\mathbf{q}^e$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}\delta\mathbf{q}^e$$

(*) Πρέπει να τονίσουμε ότι στην περίπτωση της κάμψης στις δυνάμεις $\mathbf{P}_i$ περιλαμβάνονται και οι ροπές M_{xi},M_{yi},M_{zi}.

Επομένως ο δεύτερος όρος του αριστερού μέλους της (2.22) που παριστάνει το δυνατό έργο των καθολικών δυνάμεων γράφεται

$$\int_{V^e} \delta \mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}\, dV = \left(\delta \mathbf{q}^e\right)^{\mathrm{T}} \int_{V^e} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}\, dV \tag{2.23}$$

Το διάνυσμα

$$\mathbf{F}_f^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}\, dV$$

όπως φαίνεται από την (2.23), παριστάνει τις **στατικά ισοδύναμες** κομβικές δυνάμεις. Δηλαδή δυνάμεις εφαρμοσμένες στους κόμβους του στοιχείου *e* που παράγουν ισοδύναμο έργο με τις καθολικές **f** που δρουν σε όλους τους κόκκους του στοιχείου *e*. Μ' αυτό τον τρόπο μπορούν να αντικατασταθούν οι καθολικές δυνάμεις **f** με δυνάμεις $\mathbf{F}_f^e$.

Με την ίδια διαδικασία μπορούν να αντικατασταθούν και οι επιφανειακές τάσεις **T** με τις *στατικά ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις*

$$\mathbf{F}_{\mathrm{T}}^e = \int_{S^e} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{T}\, dS$$

Επομένως, η σχέση (2.22) λαμβάνοντας υπόψη και την (2.21) παίρνει τη μορφή

$$\left(\delta \mathbf{q}^e\right)^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{F}_f^e + \mathbf{F}_T^e + \mathbf{F}_{\varepsilon_0}^e + \mathbf{F}_P^e - \mathbf{k}^e\, \mathbf{q}^e\right) = 0 \tag{2.24}$$

όπου

$$\mathbf{F}_{\varepsilon_0}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{D}\, \boldsymbol{\varepsilon}_0\, dV$$

οι στατικά ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις που ισορροπούν το έργο των αρχικών παραμορφώσεων και

$$\mathbf{k}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{D}\, \mathbf{B}\, dV \tag{2.25}$$

παριστάνει το ***μητρώο ακαμψίας*** του στοιχείου *e*.

Εφόσον το $\delta\mathbf{q}^e$ είναι τυχαίο διάνυσμα διάφορο του μηδενός η (2.24) γράφεται

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{k}^e\, \mathbf{q}^e \tag{2.26}$$

όπου

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F}_f^e + \mathbf{F}_T^e + \mathbf{F}_P^e + \mathbf{F}_{\varepsilon_0}^e \tag{2.27}$$

είναι το διάνυσμα της συνισταμένης των γενικευμένων κομβικών δυνάμεων του στοιχείου *e*.

Παρατηρείται ότι χρησιμοποιώντας την αρχή των δυνατών έργων στο τυχαίο στοιχείο *e*, οι γενικοί τύποι για το μητρώο ακαμψίας και τα διανύσματα των γενικευμένων κομβικών δυνάμεων παραμένουν οι ίδιοι ανεξάρτητα από το στοιχείο που χρησιμοποιείται.

2.3.4. Παρατηρήσεις σχετικά με το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου

Με βάση τα όσα αναφέραμε στη §1.3.4 παραπάνω μπορούμε να εκφράσουμε μερικά γενικά συμπεράσματα σχετικά με το μητρώο ακαμψίας:

i. Τα στοιχεία k_{ij} του μητρώου ακαμψίας είναι η δύναμη $\mathbf{P}_i$ που απαιτείται για μετατόπιση του κόμβου j ίση με μονάδα (δ_j=1) όταν οι υπόλοιποι κόμβοι θεωρούνται παγιωμένοι (δ_i=0, $\forall i \neq j$).

ii. Κάθε στήλη του μητρώου ακαμψίας $\mathbf{k}^e$ του στοιχείου παριστάνει δυνάμεις που ισορροπούν.

Ισχύει δηλαδή ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι μηδέν:

$$\sum_j k_{ij} = 0 \tag{2.28}$$

iii. Το **μητρώο ακαμψίας του στοιχείου είναι συμμετρικό** δηλαδή, $k_{ij}=k_{ji}$. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από το θεώρημα της αμοιβαιότητας.

iv. Το μητρώο ακαμψίας είναι ημιθετικά ορισμένο(*) αφού αν πολλαπλασιάσουμε την (2.26) επί $(\mathbf{q}^e)^{\mathrm{T}}/2$ έχουμε

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{q}^e\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e = \frac{1}{2}\left(\mathbf{q}^e\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{F}^e$$

Δεδομένου ότι το δεύτερο μέλος παριστάνει ενέργεια άρα είναι θετικό ή μηδέν, έπεται ότι και το πρώτο είναι θετικό ή μηδέν (όταν $\mathbf{q}^e$=0).

v. Όλοι οι διαγώνιοι συντελεστές είναι θετικοί αφού σε θετική μετατόπιση αντιστοιχεί θετική δύναμη.

vi. Το μητρώο ακαμψίας είναι *ιδιόμορφο*. Αυτό είναι κατανοητό αφού αν προσθέσουμε κατά στήλες τα στοιχεία του $\mathbf{k}^e$ λόγω της (2.28) έχουμε ότι οι γραμμές του $\mathbf{k}^e$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Η φυσική επεξήγηση είναι ότι αν δεν μπουν οι κατάλληλες συνθήκες στήριξης το στοιχείο έχει δυνατότητα μετατόπισης στερεού σώματος.

2.4. ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΤΕΛΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ

Η διαμόρφωση του τελικού συστήματος ακαμψίας μπορεί να γίνει είτε με τη διαδικασία ισορροπίας των επιμέρους κόμβων είτε με την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων, όπως είπαμε και στην §1.3. Η διαδικασία της ισορροπίας των επί μέρους κόμβων περιγράφτηκε και είδαμε ότι καταλήγει στο γραμμικό σύστημα **Kr**=**R**, όπου **K** το μητρώο ακαμψίας όλου του φορέα, **r** διάνυσμα των μετατοπίσεων των κόμβων και **R** οι ισοδύναμες εξωτερικές δυνάμεις στους κόμβους.

Στην επόμενη παράγραφο περιγράφεται η διαμόρφωση του τελικού συστήματος ακαμψίας με τη βοήθεια της αρχής των δυνατών έργων. Η αρχή των

(*) Δηλαδή για κάθε διάνυσμα **x** ισχύει η σχέση $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}^e\mathbf{x} \geq 0$.

δυνατών έργων, όπως έχουμε τονίσει , εκφράζει την ισορροπία του συνόλου του σώματος ή καλύτερα την ισορροπία του συνόλου των κόμβων του σώματος. Άρα, δεν διαφέρει θα έλεγε κανένας, από την κόμβο προς κόμβο ισορροπία.

2.4.1. Σχηματισμός του ολικού μητρώου ακαμψίας με εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων σ' ολόκληρο το σώμα ¶

2.4.1.1. Συναθροισμένο μητρώο ακαμψίας

Η διαμόρφωση του τελικού συστήματος ακαμψίας μπορεί όπως είπαμε να βασισθεί σε μια εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων σε όλη την κατασκευή. Μ' αυτόν τον τρόπο είναι δυνατό να αποφύγουμε και όλα τα ενδιάμεσα στάδια. Για το σκοπό αυτό υποθέτουμε ότι η κατασκευή έχει χωρισθεί σε N πεπερασμένα στοιχεία και ότι τα πεδία μετατοπίσεων, παραμορφώσεων και τάσεων είναι αρκούντως ομαλά(*) ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε τα δυνατά έργα ως άθροισμα των δυνατών έργων των επιμέρους στοιχείων.

$$\sum_{e=1}^{N}\left[\int_{V^e}\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\,dV+\int_{S^e}\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\,dS\right]=\sum_{e=1}^{N}\int_{V^e}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,dV \tag{2.29}$$

Οπότε, λαμβάνοντας υπόψη τις (2.19), (2.21) προκύπτει

$$\sum_{e=1}^{N}\left(\delta\mathbf{q}^{e}\right)^{\mathrm{T}}\left\{\int_{V^e}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\,dV+\int_{S^e}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\,dS+\int_{V^e}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\,dV-\left(\int_{V^e}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,dV\right)\mathbf{q}^{e}\right\}=0 \tag{2.30}$$

Αν F^e το διάνυσμα της συνισταμένης του ισοδύναμου συστήματος των γενικευμένων κομβικών δυνάμεων του στοιχείου e, η (2.30) γράφεται (θεωρώντας την ίδια διαδικασία όπως και στην §2.3.3).

$$\sum_{e=1}^{N}\left(\delta\mathbf{q}^{e}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{F}^{e}-\mathbf{k}^{e}\mathbf{q}^{e}\right)=0 \tag{2.31}$$

Επίσης, η (2.31) μπορεί να γραφεί

$$\begin{Bmatrix}\delta\mathbf{q}^1\\ \delta\mathbf{q}^2\\ \vdots\\ \delta\mathbf{q}^e\\ \vdots\\ \delta\mathbf{q}^N\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}F^1\\ F^2\\ \vdots\\ F^e\\ \vdots\\ F^N\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{k}^1 & 0 & & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathbf{k}^2 & & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \mathbf{k}^e & & 0\\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \mathbf{k}^N\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{q}^1\\ \mathbf{q}^2\\ \vdots\\ \mathbf{q}^e\\ \vdots\\ \mathbf{q}^N\end{Bmatrix}\right)=0$$

ή σε πιο συμπυκνωμένη μορφή

$$\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{F}-\mathbf{K}^{*}\mathbf{q}\right)=0 \tag{2.32}$$

¶ Μπορείτε να παραλείψετε όλη την §2.4.1 χωρίς καμία απώλεια.

(*) Η ομαλότητα των πεδίων αυτών θα εξετασθεί στα κριτήρια σύγκλισης της μεθόδου.

όπου, $\mathbf{K}^*$ συμβολίζει το διαγώνιο υπερμητρώο (δηλαδή το μητρώο τα στοιχεία του οποίου είναι μητρώα) με στοιχεία τα

$$\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2, \ldots, \mathbf{k}^e, \ldots, \mathbf{k}^N$$

Επίσης, $\mathbf{F}$ είναι το υπερ-μητρώο διάνυσμα με στοιχεία $\mathbf{F}^1, \ldots, \mathbf{F}^e, \ldots, \mathbf{F}^N$ δηλαδή τις γενικευμένες κομβικές δυνάμεις των N πεπερασμένων στοιχείων και $\mathbf{q}$ το υπερ-μητρώο διάνυσμα με στοιχεία $\mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^e, \ldots, \mathbf{q}^N$ δηλαδή τις γενικευμένες κομβικές μετατοπίσεις των N πεπερασμένων στοιχείων. Τα μητρώα $\mathbf{F}, \mathbf{K}^*$ και $\mathbf{q}$ λέγονται ***συναθροισμένα.***

2.4.1.2. Σχηματισμός του ολικού μητρώου ακαμψίας από το συναθροισμένο του.

Τα στοιχεία του μητρώου $\mathbf{q}$ (σχέση (2.32)) δεν είναι μεταξύ τους εντελώς ανεξάρτητα (επειδή κάθε κόμβος ανήκει σε περισσότερα από ένα στοιχεία). Έστω $\mathbf{r}$ το μητρώο-διάνυσμα των kn μετατοπίσεων των n κόμβων του σώματος (όπου k ο αριθμός των κομβικών παραμέτρων κάθε κόμβου) και $\mathbf{R}$ το μητρώο διάνυσμα των kn κομβικών δυνάμεων. Το διάνυσμα $\mathbf{q}$ συνδέεται με το διάνυσμα $\mathbf{r}$ με μια σχέση της μορφής

$$\mathbf{q} = \mathbf{t}_1 \mathbf{r} \tag{2.33}$$

όπου, $\mathbf{t}_1$ είναι ένα λογικό μητρώο (Boolean) συνδέσεως (connectivity) ή μετασχηματισμού (transformation) ανάλογα με την περίπτωση, διαστάσεων ($2sN \times 2n$) (όπου, s ο αριθμός των κόμβων κάθε στοιχείου). Άρα το δυνατό έργο που παράγουν οι δυνάμεις $\mathbf{F}$ κατά τις δυνατές μετατοπίσεις $\delta\mathbf{q}$ θα πρέπει να είναι ίσο με το έργο των δυνάμεων $\mathbf{R}$ κατά τις δυνατές μετατοπίσεις $\delta\mathbf{r}$**.** Δηλαδή

$$\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{F} = \delta\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \mathbf{R} \tag{2.34}$$

ή χρησιμοποιώντας την (2.33)

$$\delta\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{t}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{F} - \mathbf{R} \right) = 0 \tag{2.35}$$

οπότε προκύπτει

$$\mathbf{R} = \mathbf{t}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{F} \tag{2.36}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.33), (2.36) στην (2.33) βρίσκουμε

$$\delta\mathbf{r}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{R} - \mathbf{t}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{K}^* \mathbf{t}_1 \mathbf{r} \right) = 0 \tag{2.37}$$

Έχοντας ότι το $\delta\mathbf{r}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα διάφορο του μηδενός, έχουμε

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{R} \tag{2.38}$$

όπου

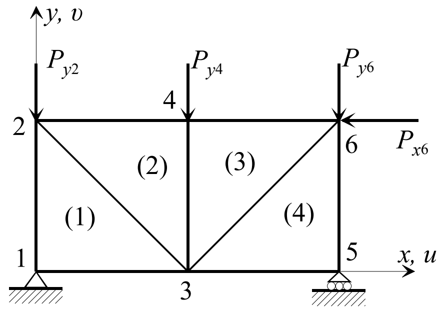
$$\mathbf{K} = \mathbf{t}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{K}^* \mathbf{t}_1 \tag{2.39}$$

είναι το ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής.

Στην ουσία το μητρώο $\mathbf{t}_1$ δεν κάνει τίποτα άλλο στην σχέση (2.39) παρά να δημιουργεί ένα μητρώο $\mathbf{K}$ διαστάσεων ($kn \times kn$) που αποτελεί σύνθεση των μητρώων ακαμψίας $\mathbf{k}^e$ των επιμέρους στοιχείων. Όπως είδαμε στην §2.4.1 το μητρώο $\mathbf{K}$ επίσης μπορεί να δημιουργηθεί χρησιμοποιώντας την απ' ευθείας μέθοδο ακαμψίας (παίρνοντας την ισορροπία κάθε κόμβου της κατασκευής).

Παράδειγμα

Θεωρείται η επίπεδη αμφιέρειστη δοκός στο παράδειγμα της §1.4.1, με δεδομένη φόρτιση που διαιρείται σε 4 τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία.



Ο σχηματισμός του ολικού μητρώου ακαμψίας θα γίνει βάσει του μητρώου συνδέσεως $\mathbf{t}_1$.

Το συναθροισμένο μητρώο $\mathbf{q}$ με στοιχεία τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου είναι

$$\mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \left[q_1 \quad q_3 \quad q_2 \;\vdots\; q_2 \quad q_3 \quad q_4 \;\vdots\; q_4 \quad q_3 \quad q_5 \;\vdots\; q_4 \quad q_5 \quad q_6 \right]$$

(Οι διακεκομμένες γραμμές καθορίζουν εποπτικά το διάνυσμα μετατοπίσεων κάθε στοιχείου).

Επαληθεύοντας την σχέση (2.33) προκύπτει ότι το μητρώο $\mathbf{t}_1$ είναι της μορφής

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε, το ολικό μητρώο ακαμψίας προκύπτει από τη σχέση (2.39). Το μητρώο αυτό είναι

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^1 + k_{23}^2 & k_{24}^2 & 0 & 0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 + k_{32}^2 & k_{33}^1 + k_{33}^2 + k_{33}^3 & k_{34}^2 + k_{34}^3 & k_{35}^3 & 0 \\ 0 & k_{42}^2 & k_{43}^2 + k_{43}^3 & k_{44}^2 + k_{44}^3 + k_{44}^4 & k_{45}^3 + k_{45}^4 & k_{46}^4 \\ 0 & 0 & k_{53}^3 & k_{54}^3 + k_{54}^4 & k_{55}^3 + k_{55}^4 & k_{56}^4 \\ 0 & 0 & 0 & k_{64}^4 & k_{65}^4 & k_{66}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

2.4.2. Παρατηρήσεις σχετικά με το *ολικό μητρώο ακαμψίας*

Το ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής παρουσιάζει ακριβώς τα ίδια χαρακτηριστικά με το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου. Έτσι σε σχέση με όσα είπαμε στην §1.3.4, το μόνο που αλλάζει είναι ότι αντί για ένα στοιχείο σε αυτή την παράγραφο μιλάμε για όλη την κατασκευή. Φυσικά τα συμπεράσματα παραμένουν τα ίδια.

Επιπλέον όμως το ολικό μητρώο ακαμψίας έχει πολλά μηδενικά στοιχεία αφού στην ισορροπία κάθε κόμβου συμμετέχουν μόνο τα στοιχεία που περιλαμβάνουν τον υπόψη κόμβο (βλ. §1.4.1). Τα μηδενικά αυτά στοιχεία, ανάλογα με τον τρόπο αρίθμησης των κόμβων καταλαμβάνουν το άνω δεξιά και κάτω αριστερά τριγωνικό μέρος του μητρώου ακαμψίας, δηλαδή το ολικό μητρώο ακαμψίας έχει τη μορφή μητρώου-λωρίδα. Το πλάτος της λωρίδας μπορεί με κατάλληλη αρίθμηση (όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 17) να μειωθεί.

2.4.3. Υπολογισμός των *ανηγμένων μητρώων φορτίσεως* και *ακαμψίας*

Όπως είπαμε στην §2.4.2 το ολικό μητρώο ακαμψίας είναι ιδιάζον. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι χωρίς να μπουν οι οριακές συνθήκες του προβλήματος (στηρίξεις) το σώμα εμφανίζει κινητότητα.

Αν σε έναν αριθμό σημείων (επαρκή για το εξεταζόμενο πρόβλημα) είναι γνωστές οι μετατοπίσεις (πχ. μηδέν, αν οι στηρίξεις είναι ανένδοτες) τότε το πρόβλημα (2.38) επιδέχεται μοναδική λύση.

Βέβαια αν οι ℓ μετατοπίσεις $r_{i1},\ldots,r_{i\ell}$ είναι γνωστές(*), τότε οι άγνωστοι στο σύστημα (2.38) από kn γίνονται $(kn-\ell)$. Οι γραμμές $i_1, i_2,\ldots,i_\ell$ του συστήματος προσδιορίζουν τις αντιδράσεις $R_{i1},R_{i2},\ldots,R_{i\ell}$ των στηρίξεων. Άρα αυτές οι γραμμές πρέπει να απαλειφούν από το αρχικό σύστημα. Κάτι τέτοιο όμως θα απαιτούσε πλήρη αναδιάταξη του συστήματος και το κόστος στον υπολογιστή θα ήταν μεγάλο. Έτσι όταν γίνεται απ' ευθείας επίλυση του συστήματος (2.38) χρησιμοποιούνται δύο τεχνικές που θα περιγράψουμε πιο κάτω.

Για την περιγραφή των μεθόδων θεωρείται ένα σύστημα n εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \ldots & K_{1j} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \ldots & K_{2j} & \ldots & K_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ K_{j1} & K_{j2} & \ldots & K_{jj} & \ldots & K_{jn} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nj} & \ldots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} \tag{2.40}$$

Έστω ότι η μετατόπιση r_j είναι γνωστή και ίση με c που μπορεί να είναι ίση με το μηδέν ή όχι.

1η Μέθοδος

Η πρώτη μέθοδος συνίσταται στο να μεταβάλλουμε το διάνυσμα φόρτισης παίρνονται σαν καινούρια στοιχεία τα

(*) Στην παράγραφο αυτή υποθέτουμε ότι είναι γνωστές οι μετατοπίσεις στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις (πχ. λοξές κυλίσεις κλπ.) όπου οι μετατοπίσεις είναι γνωστές σ'ένα τοπικό σύστημα. Σ'αυτή την περίπτωση πρέπει να γίνει στροφή του συστήματος (με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς της εξίσωσης (2.38)) και να εισαχθούν οι οριακές συνθήκες στο τοπικό σύστημα. Περισσότερες λεπτομέρειες δίνονται στην §2.5.

$$\overline{R}_j = c \quad , \qquad \overline{R}_i = R_i - K_{ij} c \qquad (i \neq j) \tag{2.41}$$

Μηδενίζεται στη συνέχεια η γραμμή και η στήλη στο μητρώο ακαμψίας **K** που αντιστοιχεί στη γνωστή μετατόπιση ενώ τίθεται ο διαγώνιος όρος ίσος με τη μονάδα (στο παράδειγμά μας όπου r_j=c, K_{ij}=K_{ji}=0 (i≠j), (K_{jj}=1).

Η μέθοδος αυτή στην ουσία δεν είναι τίποτα άλλο από μια αντικατάσταση του r_j με τη δεδομένη τιμή του c και τη μεταφορά του γινομένου $K_{ij}c$ στο δεύτερο μέλος.

Στην περίπτωση, όπου c=0, η σχέση δεν αλλάζει αλλά όπως φαίνεται και από τη σχέση (2.41) δεν χρειάζεται να μεταβληθεί παρά μόνο το j στοιχείο του διανύσματος φόρτισης που επιπλέον είναι ίσο με το μηδέν.

2η Μέθοδος

Η δεύτερη αυτή μέθοδος συνίσταται από δύο βήματα:

α. Να πολλαπλασιασθεί ο διαγώνιος όρος του μητρώου ακαμψίας K που θα αντιστοιχεί στη μετατόπιση που έχει δοθεί με αριθμό κατάλληλα μεγάλο (το μέγεθός του εξαρτάται από την ικανότητα της μηχανής) ας πούμε 10^8 και

β. να μεταβληθεί το αντίστοιχο στοιχείο του μητρώου φόρτισης.

Στην περίπτωσή μας θα έχουμε δηλαδή

$$\begin{aligned} \overline{K}_{jj} &= 10^8 \ K_{jj} & \qquad \overline{R}_j &= 10^8 \ K_{jj} c \\ \overline{K}_{im} &= K_{im} (i = m \neq j) & \overline{R}_i &= R_i (i \neq j) \end{aligned}$$

Η μέθοδος αυτή οδηγεί σε μια λύση που το r_j είναι πάρα πολύ κοντά στο c. Επιπλέον, είναι πολύ εύκολη στον προγραμματισμό και μπορεί εύκολα να εφαρμοσθεί για μητρώα που αποθηκεύονται σαν μητρώα-λωρίδες.

Οπότε, χρησιμοποιώντας μια οποιαδήποτε από τις μεθόδους που περιγράψαμε πιο πάνω η σχέση (2.34) γίνεται

$$\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{K}}\,\overline{\mathbf{r}} \tag{2.42}$$

όπου, οι επιγραμμίσεις σημαίνουν τα ***ανηγμένα*** μεγέθη που ήδη έχουμε ορίσει. Από την (2.42) προκύπτει

$$\overline{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{D}}\,\overline{\mathbf{R}} \tag{2.43}$$

όπου, $\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{K}}^{-1}$ είναι το ανηγμένο μητρώο ***ευκαμψίας.***

Εάν ζητούνται οι αντιδράσεις των στηρίξεων (πχ. στις στηρίξεις των γεφυρών κλπ) τότε αφού υπολογισθούν οι άγνωστες μετατοπίσεις αντικαθίστανται στην αρχική εξίσωση και έχουμε πχ για την αντίδραση στον κόμβο j

$$R_j = \sum_{i=1}^{n} K_{ji} r_i \tag{2.44}$$

όπου, r_j=c.

2.5. ΤΟ ΦΥΣΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ Π.Σ.

Μία κατασκευή ή ένα στοιχείο κατασκευής που υποβάλλεται σε φόρτιση αποτελεί το «φυσικό πρόβλημα» που καλείται να υπολογίσει ένας μηχανικός. Για να μπορέσει κανείς να υπολογίσει την κατασκευή πρέπει να κατασκευασθεί το μαθηματικό μοντέλο. Πρέπει να παρασταθεί η γεωμετρία του σώματος. Η διαδικασία αυτή εμπεριέχει προσέγγιση αφού η επιφάνεια προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο. Πρέπει ακόμα να παρασταθεί η συμπεριφορά του υλικού με τα υπάρχοντα μοντέλα. Το ίδιο πρέπει να γίνει με την παράσταση των φορτίων και των συνοριακών συνθηκών.

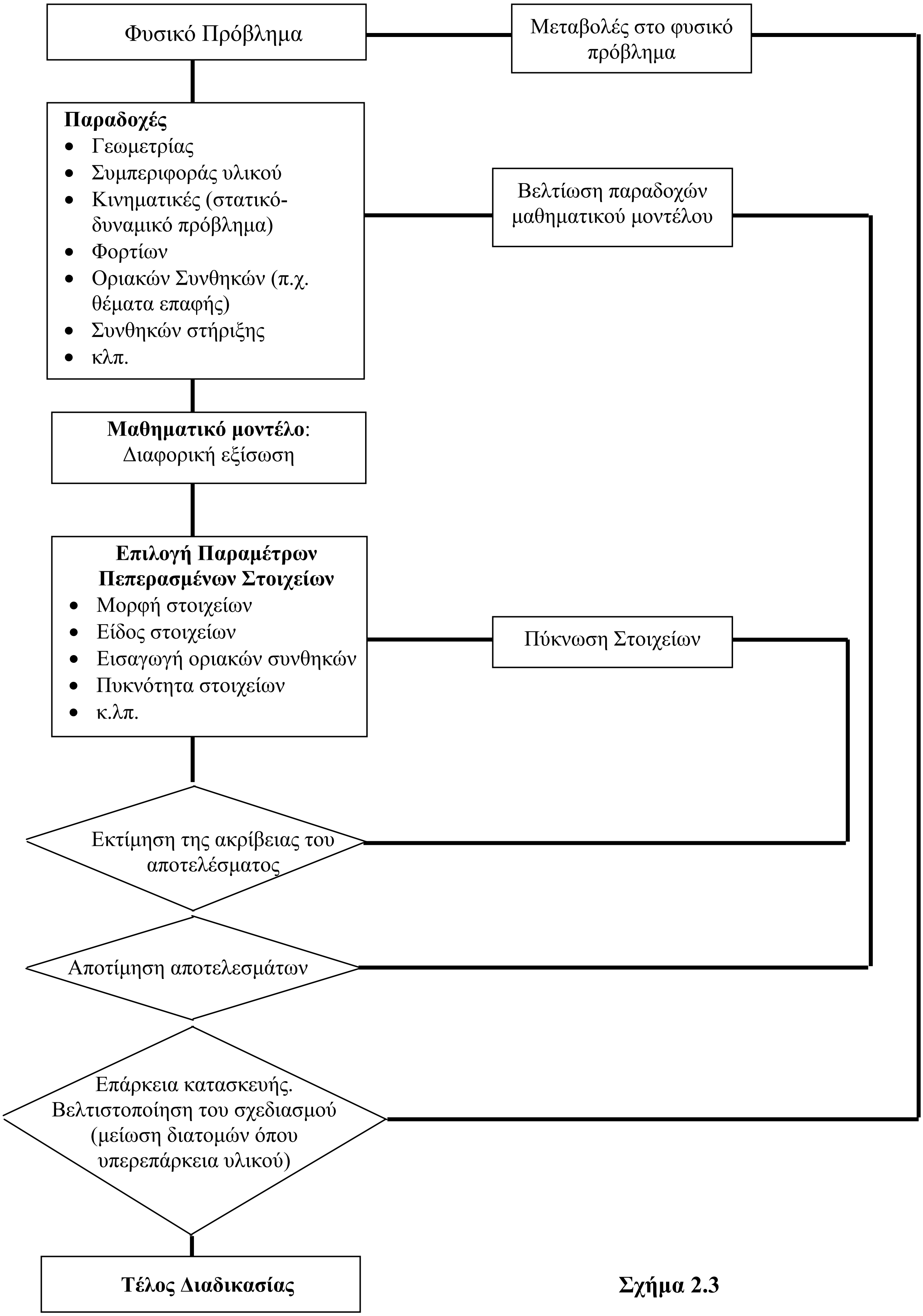
Η διαδικασία συνολικά παριστάνεται στο Σχ. 2.3. Μετά τις προσεγγίσεις αυτές είναι δυνατό να κατασκευασθεί το μαθηματικό μοντέλο δηλαδή να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα. Είναι βέβαια κατανοητό ότι και το πιο εξελιγμένο μαθηματικό μοντέλο δεν αναπαράγει ακριβώς το φυσικό πρόβλημα. Εκείνο που ελπίζουμε είναι να το προσεγγίσει κατά τον καλύτερο τρόπο.

Πρέπει βέβαια το μαθηματικό μοντέλο να είναι «αποτελεσματικό», δηλαδή να πετυχαίνει τη λύση με ικανοποιητική ακρίβεια και λογικό κόστος. Πρέπει επίσης να είναι «αξιόπιστο», δηλαδή να μπορεί να πετύχει τη λύση με μία προκαθορισμένη ακρίβεια.

Είναι επικύνδυνο να ξεκινήσει κανείς από ένα πολύ σύνθετο μοντέλο γιατί τότε δεν μπορεί να ελέγξει καθόλου το αποτέλεσμα. Συνήθως ξεκινάμε από ένα απλοϊκό μοντέλο για να καταλήξουμε στο πιο σύνθετο με διαδοχικά βήματα. Το απλοϊκό μοντέλο χρησιμοποιείται για να έχουμε ένα πρώτο έλεγχο του αποτελέσματος.

Γενικά θεωρούμε ότι το πιο αποτελεσματικό μοντέλο είναι αυτό που μας δίνει απαντήσεις στο πρόβλημά μας με τον πιο αξιόπιστο τρόπο (δηλαδή με ένα αποδεκτό σφάλμα) και με την λιγότερη προσπάθεια.

Είναι προφανές ότι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων εφαρμόζεται στο μαθηματικό πρόβλημα που επιλέξαμε και δεν μπορεί να δώσει λύση στο αρχικό, φυσικό πρόβλημα. Όπως δείχνουμε στο σχήμα, αν η ακρίβεια στα αποτελέσματα του μαθηματικού προβλήματος που επιλέξαμε δεν είναι επαρκής τότε προσφεύγουμε σε πύκνωση των στοιχείων και νέα επίλυση του προβλήματος. Η διαδικασία αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί 2-3 φορές. Αν τα αποτελέσματα της τελευταίας επίλυσης και της προηγούμενης δεν διαφέρουν σημαντικά, θεωρούμε ότι η επίλυση συνέκλινε, αλλοιώς επαναλαμβάνουμε την διαδικασία πύκνωσης - επίλυσης.


Φυσικό Πρόβλημα
Μεταβολές στο φυσικό πρόβλημα
Παραδοχές
Γεωμετρίας
Συμπεριφοράς υλικού
Κινηματικές (στατικό-δυναμικό πρόβλημα)
Φορτίων
Οριακών Συνθηκών (π.χ. θέματα επαφής)
Συνθηκών στήριξης
κλπ.
Βελτίωση παραδοχών μαθηματικού μοντέλου
Μαθηματικό μοντέλο: Διαφορική εξίσωση
Επιλογή Παραμέτρων Πεπερασμένων Στοιχείων
Μορφή στοιχείων
Είδος στοιχείων
Εισαγωγή οριακών συνθηκών
Πυκνότητα στοιχείων
κ.λπ.
Πύκνωση Στοιχείων
Εκτίμηση της ακρίβειας του αποτελέσματος
Αποτίμηση αποτελεσμάτων
Επάρκεια κατασκευής. Βελτιστοποίηση του σχεδιασμού (μείωση διατομών όπου υπερεπάρκεια υλικού)
Τέλος Διαδικασίας

Σχήμα 2.3

Ένα άλλο σημείο που πρέπει να ελεγχθεί είναι η επάρκεια των διατομών που έχουμε επιλέξει για τα κατασκευαστικά μας στοιχεία. Είναι πολύ πιθανό σε κάποια διατομή οι τάσεις να ξεπερνούν τις ανεκτές. Τότε πρέπει να γίνει επανασχεδιασμός της κατασκευής. Σε επανασχεδιασμό της κατασκευής καταλήγει και η τυχόν βελτιστοποίηση του σχεδιασμού, δηλαδή η μείωση της διατομής στα σημεία που υπάρχει υπερεπάρκεια υλικού και άρα μικρές τάσεις και ενίσχυση της διατομής όπου οι τάσεις είναι εξαιρετικά ψηλές.

Σε περιπτώσεις σαν αυτές που περιγράψαμε, προβαίνουμε σε νέα κατάρτιση και του μαθηματικού μοντέλου και του μοντέλου των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Αν παρ' όλα αυτά τα αποτέλεσματα δεν ικανοποιούν βασικές προϋποθέσεις του φυσικού προβλήματος ή καταλήγουν σε «**αφύσικα**» παράλογα¶ αποτελέσματα τότε είναι αναγκάιο να καταφύγουμε σ' ένα βελτιωμένο μαθηματικό μοντέλο.

2.6. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ Π.Σ. ΣΑΝ ΣΥΣΤΑΤΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ

Αν και είναι ένα πολύ ενδιαφέρον πεδίο δραστηριότητας, η ανάλυση των κατασκευών αποτελεί μόνον ένα μικρό μέρος της διαδικασίας που λέγεται "Σχεδιασμός των Κατασκευών". Η ανάλυση βοηθάει στον εντοπισμό αξιόλογων νέων μεθόδων σχεδιασμού και μπορεί να οδηγήσει στην βελτίωση του σχεδιασμού, σε σχέση με την απόδοση και το κόστος.

Στα πρώτα χρόνια εφαρμογής της, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ), χρησιμοποιήθηκε κυρίως για την ανάλυση αεροσκαφών και κατασκευών πολιτικού μηχανικού. Από τη στιγμή όμως που αποκαλύφθηκαν οι μεγάλες δυνατότητες της ΜΠΣ και οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές μπήκαν δυναμικά σον σχεδιασμό των κατασκευών, δόθηκε έμφαση στην ένταξη της ΜΠΣ στον συνολικό σχεδιασμό των κατασκευών, μηχανολόγου, πολιτικού και αεροναυπηγού μηχανικού.

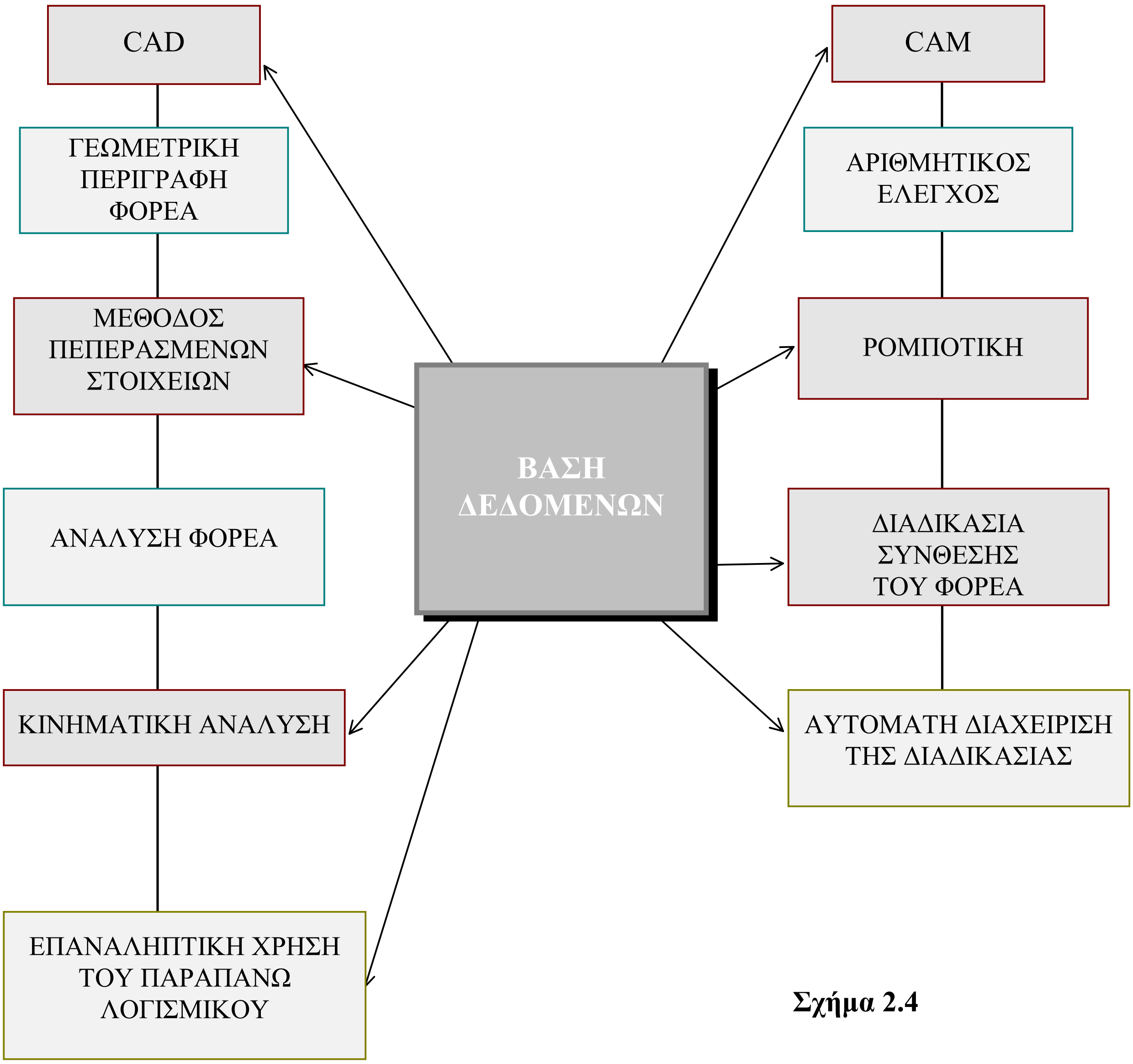
Η εικόνα δείχνει σχηματικά τα βήματα σε έναν τυπικό σχεδιασμό με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η ΜΠΣ περιλαμβάνεται σ' αυτόν. Βλέπουμε ότι το πρώτο βήμα στην εικόνα είναι η δημιουργία μιας γεωμετρικής αναπαράστασης της κατασκευής που πρόκειται να σχεδιαστεί. Πολλά και διαφορετικά προγράμματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το σκοπό αυτό. Το πιο δημοφιλές απ' αυτά είναι το AutoCAD. Σ' αυτό το βήμα ορίζονται, οι ιδιότητες του υλικού, τα επιβαλλόμενα φορτία και οι συνοριακές συνθήκες της κατασκευής. Επειδή η γεωμετρία και άλλα χαρακτηριστικά της πραγματικής κατασκευής μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκα, είναι συνήθως αναγκαίο να απλοποιήσουμε τη γεωμετρία και τα επιβαλλόμενα φορτία, έτσι ώστε να προκύψει ένα σχετικά απλό μαθηματικό

¶ Πολλές φορές εμφανίζουμε ως συγκεντρωμένη δύναμη τη επαφή δύο σωμάτων όταν η επιφάνεια είναι σχετικά μικρή ως προς τις διαστάσεις της κατασκευής. Μια συγκεντρωμένη δύναμη όμως σύμφωνα με τη θεωρία της ελαστικότητας δημιουργεί στο εξεταζόμενο σώμα άπειρες τάσεις. Μάλιστα οι τάσεις απειρίζονται και όταν ακόμα η ένταση της συγκεντρωμένης δύναμης είναι σχετικά μικρή.

προσομοίωμα. Βέβαια αυτό το μαθηματικό προσομοίωμα πρέπει να είναι αξιόπιστο για την ανάλυση που κάνουμε. Η ΜΠΣ λύνει αυτό το μαθηματικό προσομοίωμα, το οποίο και μπορούμε να τροποποιήσουμε στην πορεία.

Σ' αυτή τη διαδικασία, που γενικά πραγματοποιείται από σχεδιαστές και όχι μόνο από εξειδικευμένους μηχανικούς, διαπιστώνουμε ότι η ΜΠΣ πρέπει να είναι αξιόπιστη και αποτελεσματική. Η αξιοπιστία της ΜΠΣ σημαίνει ότι στην λύση ενός καλά ορισμένου προβλήματος, η ΜΠΣ πάντα θα δώσει με μια αποδεκτή διακεκριμενοποίηση μιά αποδεκτή λύση. Παραπέρα αν η διακεκριμενοποίηση είναι λεπτομερής, θα επιτευχθεί μιά ακριβής λύση. Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου σημαίνει ότι η ΜΠΣ θα πρέπει να δίνει μικρές αλλαγές στην λύση για μικρές αλλαγές των ιδιοτήτων του υλικού, των συνοριακών συνθηκών και των επιβαλλόμενων φορτίων.

Έτσι μιά αναξιόπιστη διακριτοποιήση ΠΣ μπορεί να οδηγήσει σε αποδεκτές λύσεις για μερικούς κανάβους στοιχείων, ενώ για αλλους κανάβους μπορεί να



Σχήμα 2.4

οδηγήσει σε μη αποδεκτές λύσεις. Όμοια, αν μια διακεκριμενοποίηση ΠΣ δίνει ακριβή αποτελέσματα για ένα σύνολο ιδιοτήτων υλικού, τότε εφόσον η ίδια διακεκριμενοποίηση δίνει μικρή αλλαγή στη λύση για μικρή αλλαγή των ιδιοτήτων, η λύση του προβλήματος με το ελαφρά αλλαγμένο υλικό είναι ακριβής.

Στον σχεδιασμό κατασκευών είναι πολύ σημαντικό, η ΜΠΣ να είναι αξιόπιστη και αποτελεσματική. Αποτελεσματικότητα και αξιοπιστία είναι αναγκαίες διότι ο μηχανικός έχει σχετικά λίγο χρόνο για την διαδικασία της ανάλυσης και πρέπει να μπορεί να πετύχει ακριβή λύση στο επιλεγμένο μοντέλο γρήγορα και "με την πρώτη".

Σημαντικό στοιχείο της ΜΠΣ είναι η εκτίμηση του σφάλματος, δηλαδή η εκτίμηση του πόσο κοντά είναι η λύση των ΠΣ στην ακριβή λύση του μαθηματικού προσομοιώματος. Η εκτίμηση αυτή θα δείξει και αν η λύση με την ΜΠΣ θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Θα θέλαμε να σχολιάσουμε λίγο τις προοπτικές ολοκλήρωσης της ΜΠΣ στον σχεδιασμό κατασκευών με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Είναι σίγουρο ότι πολλοί μηχανικοί δεν έχουν το χρόνο να μελετήσουν την ΜΠΣ σε βάθος. Ο μόνος στόχος τους είναι να χρησιμοποιήσουν την ΜΠΣ για να γίνει βέλτιστη η κατασκευή που σχεδιάζουν. Έτσι, η ολοκλήρωση της ΜΠΣ στον σχεδιασμό με υπολογιστή, θα περιλαμβάνει σε όλο και μικρότερο βαθμό την λεπτομερή εξέταση των επιλογών διακεκριμενοποίησης. Αντίθετα προβλέπουμε ότι στην γραμμικά ελαστική ανάλυση με ΠΣ, οι κάναβοι ΠΣ θα δημιουργούνται αυτόματα για να ταιριάζουν στο δεδομένο μαθηματικό προσομοίωμα. Οι λύσεις θα υπολογίζονται μαζί με την εκτίμηση του σφάλματος και θα επιλέγεται τελικά η λύση που δίνει το μικρότερο σφάλμα. Όλα αυτά θα γίνονται χωρίς την παρέμβαση του μηχανικού. Σε μιά τέτοια προοπτική, ο μηχανικός θα μπορεί να επικεντρώνει την προσοχή του στην επιλογή του κατάλληλου μαθηματικού προσομοιώματος για την ανάλυση της κατασκευής, έχοντας στα χέρια του ένα εργαλείο - την ΜΠΣ - πολύ αποτελεσματικό. Αντίθετα, η μη γραμμική και η δυναμική ανάλυση στερεών και ρευστών με ΠΣ, θα συνεχίσει να απαιτεί μεγαλύτερη παρέμβαση και γνώση από τον μηχανικό στην διαδικασία της ΜΠΣ, για αρκετά χρόνια ακόμη.

Μ' αυτές τις παρατηρήσεις θέλουμε να αναδείξουμε τις πραγματικές σημερινές δυνατότητες αλλά και τις αξιόλογες μελλοντικές προοπτικές της ΜΠΣ για την εργασία του μηχανικού.

2.7. ΕΚΛΟΓΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ

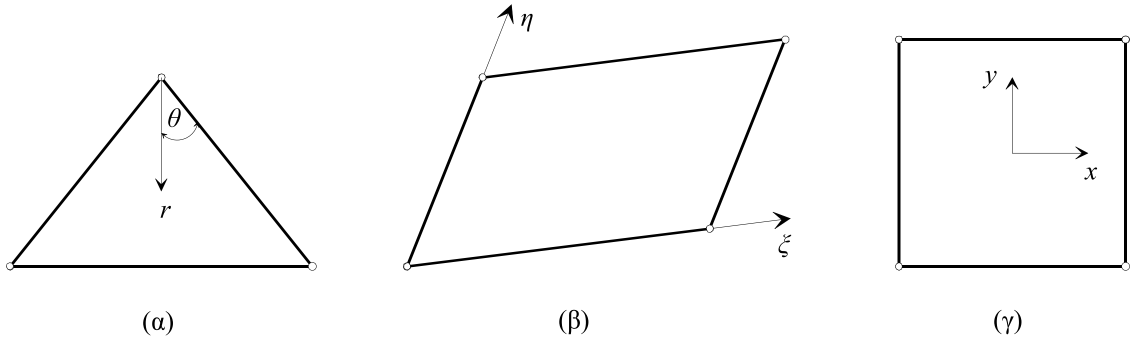
Ένα από τα βασικά προβλήματα που εμφανίζονται στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι η εκλογή της συνάρτησης μετατόπισης. Πράγματι, εφόσον εκλεγεί το στοιχείο που θα χρησιμοποιηθεί, το επόμενο βήμα αφορά την συνάρτηση μετατόπισης που θα χαρακτηρίζει το στοιχείο αυτό. Εάν η συνάρτηση μετατόπισης έχει τη μορφή ενός απλού πολυωνύμου θα πρέπει ο αριθμός των σταθερών συντελεστών του πολυωνύμου να είναι ίσος με τον ολικό αριθμό των κομβικών παραμέτρων του στοιχείου. Άρα, η προσοχή θα πρέπει να επικεντρωθεί στον αριθμό των κομβικών παραμέτρων που χαρακτηρίζουν κάθε κόμβο. Ο αριθμός αυτός αφενός δεν θα πρέπει να είναι μικρότερος από έναν ελάχιστο αριθμό (το βαθμό ελευθερίας κίνησης), που εξασφαλίζει ότι η σχετική παραμόρφωση του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων αναπαριστάνεται ικανοποιητικά, αφετέρου δεν θα πρέπει να είναι πολύ μεγάλος ώστε να κάνει την υπολογιστική διαδικασία σύνθετη και χρονοβόρα, ακόμη και αν αυτή η αύξηση των κομβικών παραμέτρων βελτιώνει την ακρίβεια του χρησιμοποιούμενου στοιχείου. Πχ. ενώ στα διδιάστατα ή τρισδιάστατα προβλήματα της ελαστικότητας σαν κομβικές παράμετροι λαμβάνονται μόνον οι κομβικές μετατοπίσεις, στα προβλήματα δοκαριών και πλακών που καταπονούνται σε κάμψη θα πρέπει εκτός των κομβικών μετατοπίσεων να ληφθούν και οι στροφές (πρώτες παράγωγοι των μετατοπίσεων) σαν κομβικές παράμετροι έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η διατήρηση της συνέχειας μεταξύ των στοιχείων.

Ένα άλλο σημείο που θα πρέπει να ληφθεί υπόψη στην εκλογή της συνάρτησης μετατόπισης είναι το τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο αυτή θα αναπαρασταθεί. Αυτό συμβαίνει γιατί διαφορετικά στοιχεία, απαιτούν για την καλύτερη αναπαράστασή τους διαφορετικά τοπικά συστήματα. Πχ. για ένα στοιχείο σε σχήμα κυκλικού τομέα (Σχ.2.5α) η συνάρτηση μετατόπισης θα πρέπει να δοθεί σε πολικές συντεταγμένες και όχι σε καρτεσιανές. Επίσης, για ένα παραλληλόγραμμο στοιχείο (Σχ.2.5β) θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων ενώ για το ορθογωνικό στοιχείο (Σχ.2.5γ), το τοπικό καρτεσιανό σύστημα είναι αυτό που επιβάλλεται, με τη συνάρτηση μετατόπισης να έχει τη μορφή $a_1+a_2x_1+a_3y_1+a_4x_1y_1$.

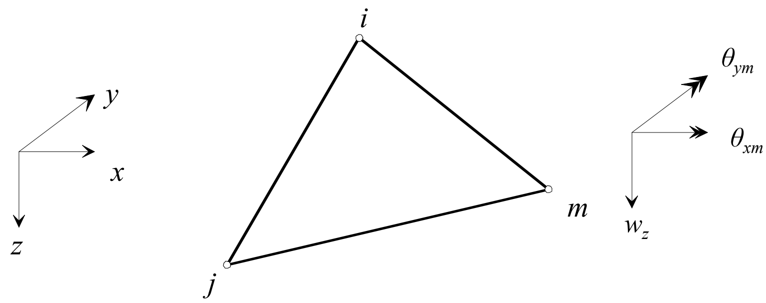
Δηλαδή το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του στοιχείου εκλέγεται λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρία του στοιχείου και τη συνάρτηση μετατόπισης που θα χρησιμοποιηθεί σ’ αυτό. Έχοντας εκλέξει το τοπικό σύστημα συντεταγμένων και τη συνάρτηση μετατόπισης στη συνέχεια προσδιορίζεται το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου. Για να γίνει όμως η σύνθεση του τελικού συστήματος των εξισώσεων θα πρέπει τα μητρώα ακαμψίας των στοιχείων να υπολογισθούν ως προς ένα καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Εν γένει το καθολικό σύστημα που έχει θεωρηθεί για ολόκληρο το σώμα δεν συμπίπτει με το τοπικό κάθε ενός στοιχείου. Οπότε το μητρώο ακαμψίας $\overline{\mathbf{k}}^e$ του στοιχείου e υπολογίζεται κατ’ αρχάς στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων που έχει θεωρηθεί στο e και στη συνέχεια με στροφή προκύπτει η έκφραση του $\mathbf{k}^e$ στο καθολικό (βλ. Κεφάλαιο 3), όπου

$$\mathbf{k}^e = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\, \overline{\mathbf{k}}^e\, \boldsymbol{\alpha}_1$$

με $\boldsymbol{\alpha}_1$ το μητρώο στροφής (η μορφή του μητρώου στροφής φαίνεται στην παράγραφο 1.4 (σχέσεις (1.6), (1.7), (1.9), (1.10), (1.12)), περισσότερες λεπτομέρειες δίνονται στο Κεφάλαιο 3)).



Σχήμα 2.5. Διαφορετικά τοπικά συστήματα συντεταγμένων σε διαφορετικά στοιχεία.



Σχήμα 2.6 Τριγωνικό καμπτόμενο στοιχείο.

Έχοντας τον αριθμό των κομβικών παραμέτρων δεν είναι πάντα εύκολο να εκλέξουμε τους ακριβείς πολυωνυμικούς όρους που θα χρησιμοποιηθούν. Πχ. στην περίπτωση του τριγωνικού καμπτόμενου στοιχείου (Σχ. 2.6) υπάρχουν εννιά κομβικοί παράμετροι ενώ το πλήρες κυβικό πολυώνυμο περιέχει δέκα όρους.

Άρα, στην περίπτωση του τριγωνικού καμπτόμενου στοιχείου η εκλογή των πολυωνυμικών όρων δεν είναι προφανής.

Επιπλέον στις περισσότερες περιπτώσεις η συνάρτηση μετατόπισης θα πρέπει να εμπεριέχει όρους της ίδιας τάξης ως προς όλες τις διευθύνσεις που χρησιμοποιείται. Αυτό συμβαίνει επειδή τα περισσότερα στοιχεία θεωρούνται στοιχεία γενικής χρήσης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλές κατηγορίες προβλημάτων. Άρα εάν στο τριγωνικό καμπτόμενο στοιχείο (Σχ. 2.6) υπάρχει ο όρος x^2y θα πρέπει να υπάρχει και ο όρος xy^2. Αυτό βέβαια δεν αποκλείει την περίπτωση να χρησιμοποιηθούν συναρτήσεις μετατόπισης διαφορετικού βαθμού σε διαφορετικές διευθύνσεις. (Πχ. βλ. §7.3.1).

2.8. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ. ΣΥΜΜΟΡΦΗ-ΑΣΥΜΜΟΡΦΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

2.8.1. Σύμμορφη Προσέγγιση

Για τον σχηματισμό της εξίσωσης των δυνατών έργων υπεισέρχονται οι γενικευμένες τάσεις και οι γενικευμένες παραμορφώσεις. Οι γενικευμένες παραμορφώσεις σε πολλά προβλήματα περιλαμβάνουν παραγώγους πέραν της πρώτης τάξης. Τυπικό παράδειγμα είναι οι πλάκες όπου οι παραμορφώσεις είναι (Παράρτημα 3)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \right\}$$

όπου, w είναι το βέλος.

Επίσης, σε προβλήματα λυγισμού ή προβλήματα κελυφών συναντούμε παραγώγους πέραν της πρώτης τάξης στις παραμορφώσεις. Έστω πχ. p η μέγιστη τάξη της παραγώγου της μετατόπισης που υπεισέρχεται στην παραμόρφωση (p=1: γενική περίπτωση ελαστικότητας, p=2: περίπτωση λεπτών καμπτόμενων κατασκευών (δοκοί, πλάκες, κελύφη)).

Ορισμός: Καλούμε μια *προσέγγιση με πεπερασμένα στοιχεία* ***σύμμορφη*** (conforme) όταν οι παραμορφώσεις και οι διαδοχικές παράγωγοί τους μέχρι την τάξη $(p-1)$ είναι συνεχείς κατά μήκος της κοινής πλευράς δύο στοιχείων. Όταν δεν ικανοποιείται αυτή η συνθήκη η προσέγγιση λέγεται ***ασύμμορφη*** (non-conforme).

Παραδείγματα

(α) Στην περίπτωση **μεμβράνης** (λεπτής κατασκευής με συνεπίπεδη φόρτιση) η ασυνέχεια των μετατοπίσεων θα προκαλεί είτε αλληλοεπικάλυψη των στοιχείων είτε κενά μεταξύ των στοιχείων, με αλλά λόγια λύση της συνέχειας της κατασκευής.

(β) Στην περίπτωση **πλάκας** θα πρέπει:

($β_1$) Οι μετατοπίσεις (βέλη κάμψης) να είναι συνεχή, γιατί διαφορετικά τα στοιχεία θα βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα μεταξύ τους.

($β_2$) Η κάθετη κλίση μεταξύ των πλευρών των στοιχείων θα πρέπει να είναι ίδια γιατί διαφορετικά, μετά την παραμόρφωση της πλάκας, θα γινόταν μία περίεργη τεθλασμένη επιφάνεια, δηλαδή θα είχε καταλυθεί η έννοια της συνέχειας της επιφάνειας κάμψης. Αυτό σημαίνει ότι για να εξασφαλίζεται η συνέχεια των κλίσεων θα πρέπει να εξασφαλίζεται η συνέχεια των πρώτων παραγώγων των μετατοπίσεων και επειδή όπως είπαμε πιο πάνω, p=2, στην περίπτωση των πλακών, το $p-1=1$ και ο ορισμός που δόθηκε είναι αυτόματα κατανοητός.

2.8.2. Κριτήρια Σύγκλισης Σύμμορφων Προσεγγίσεων

Όπως είπαμε και στην εισαγωγή η εκλογή ενός ορισμένου αριθμού σημείων, έστω n, στα οποία γίνεται η προσέγγιση της συνάρτησης (στην προκειμένη περίπτωση των μετατοπίσεων) περιορίζει σε kn τους βαθμούς ελευθερίας του αρχικού συστήματος που είναι στην πραγματικότητα άπειρος. Είναι λοιπόν επόμενο ότι την πραγματική λύση δεν θα την βρούμε ποτέ, όσο και αν πυκνώσουμε τα σημεία (δηλαδή μικρύνουμε τις διαστάσεις των στοιχείων).

Είναι όμως δυνατό να ξέρουμε εκ των προτέρων πιο θα είναι το σφάλμα για δεδομένη μορφή στοιχείων και συναρτήσεων σχήματος. Αλλά αυτό που κυρίως ενδιαφέρει για τις πρακτικές εφαρμογές, είναι να εξασφαλισθούμε από τυχόν λύσεις που θα απέχουν πολύ από την πραγματικότητα ή από λύσεις που όσο και αν πυκνώσουμε τα σημεία δεν θα τείνουν προς την πραγματική λύση του προβλήματος.

Για ν' αποφύγουμε τέτοια ολισθήματα πρέπει οι συναρτήσεις των μετατοπίσεων να ικανοποιούν ορισμένα κριτήρια. Τα κριτήρια αυτά είναι:

***Κριτήριο* 1–** Θα πρέπει τα στοιχεία να είναι σύμμορφα.

***Κριτήριο* 2–** Θα πρέπει οι παράγωγοι των μετατοπίσεων έως την τάξη $(p+1)$ να είναι συνεχείς μέσα σε κάθε στοιχείο.

Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις σχήματος είναι πολυώνυμα τα παραπάνω κριτήρια ισοδυναμούν όπως εύκολα μπορούμε να δούμε, με την παρακάτω πρόταση [5].

Θεώρημα 2.1. Μια λύση $\mathbf{q}^h$ με τη βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων συγκλίνει προς την πραγματική λύση **q** τότε και μόνο τότε αν οι συναρτήσεις σχήματος είναι πλήρη πολυώνυμα m βαθμού με $m>p$.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αποτιμήσουμε και την ταχύτητα σύγκλισης [5]. Πράγματι η ενέργεια παραμόρφωσης $\varepsilon(\mathbf{q}-\mathbf{q}^h)$ της διαφοράς $(\mathbf{q}-\mathbf{q}^h)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\varepsilon\left(\mathbf{q}-\mathbf{q}^h\right) \le Ch^{2(m+1-p)}\left|\mathbf{q}\right|_{m+1}^2 \tag{2.45}$$

Άρα η ταχύτητα σύγκλισης όσον αφορά την ενέργεια παραμόρφωσης είναι $h^{2(m+1-p)}$, όπου h είναι η διάμετρος του στοιχείου (δηλαδή η μεγαλύτερη διάστασή του). Η ταχύτητα σύγκλισης βλέπουμε ότι εξαρτάται από την σταθερά C και τον όρο $\left|\mathbf{q}\right|_{m+1}^2$.

Η σταθερά C χαρακτηρίζει την ποιότητα του καννάβου, τη θέση των κόμβων και την όλη δομή του στοιχείου. Σημειώνουμε ότι η C εξαρτάται από το $1/\sin\theta$ όπου θ η μικρότερη οξεία γωνία ή η μεγαλύτερη αμβλεία γωνία των στοιχείων. Ακόμα κόμβοι πολύ κοντά στις κορυφές δημιουργούν παθογένειες και επιδρούν πολύ αρνητικά στην τιμή του C.

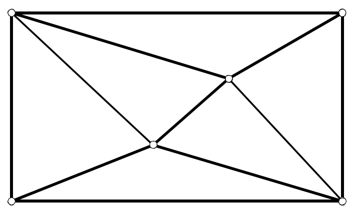
Ο όρος $\left|\mathbf{q}\right|_{m+1}^2$ που παριστάνει το μέτρο της $(m+1)$ παραγώγου της q, αντανακλά τις ιδιότητες του συγκεκριμένου προβλήματος, αν δηλαδή η λύση είναι ομαλή, χωρίς ανωμαλίες οπότε και μπορεί να προσεγγισθεί εύκολα, πχ. στην περίπτωση ρωγμών ή εγκοπών, η μετατόπιση q συμπεριφέρεται σ' ένα σημείο που απέχει απόσταση r από την άκρη της ρωγμής ή της εγκοπής όπως η $r^{\lambda+1}f(\theta)$, όπου $f(\theta)$ μία συνάρτηση της πολικής γωνίας θ και $0\le\lambda\le1$. Στην περίπτωση μιας ρωγμής, $(m+1)=2$ και $\lambda=1/2$, οπότε η δεύτερη παράγωγος της μετατόπισης απειρίζεται στο άκρο της ρωγμής και άρα το μέτρο $\left|\mathbf{q}\right|_{m+1}^2$ δεν είναι φραγμένο, δηλαδή η κλασική μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποκλίνει (Κεφάλαιο 18).

Σημειώνουμε ότι για να υπάρχει σύγκλιση πρέπει $m+1>p$. Αυτό σημαίνει ότι οι συναρτήσεις σχήματος μπορούν να αναπαραστήσουν οποιαδήποτε κατάσταση μετατοπίσεων του σώματος που είναι πολυώνυμο $(m+1)$ βαθμού. Αυτό συνεπάγεται ότι υπολογίζεται με ακρίβεια από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

i. η κατάσταση μετατόπισης στερεού σώματος, δηλαδή μία μεταφορά ή (και) μία περιστροφή όλου του σώματος.

ii. η κατάσταση σταθερής παραμόρφωσης του σώματος, δηλαδή η p τάξεως παράγωγος των μετατοπίσεων να έχει σταθερή τιμή σ' όλο το σώμα.

Στα τεχνικά βιβλία πεπερασμένων στοιχείων αυτά τα συμπεράσματα παίρνουν τη μορφή κριτηρίων σύγκλισης.


Σχήμα 2.7 Συρραφή στοιχείων

Αξίζει να τονίσουμε ότι και ασύμμορφα στοιχεία μπορεί να συγκλίνουν για ορισμένες ***συρραφές στοιχείων***(*) αν ικανοποιούνται κάποια κριτήρια.

Επειδή τα κριτήρια αυτά μπορούν να

(*) Συρραφή στοιχείων ονομάζουμε μια επαναλαμβανόμενη, μέσα στην κατασκευή, διάταξη στοιχείων όπως πχ. στο Σχήμα 2.7.

χρησιμοποιηθούν για έναν αποτελεσματικό έλεγχο σύγκλισης των σύμμορφων αλλά και των ασυμμόρφων στοιχείων θα τα αναφέρουμε και εμείς στην επόμενη παράγραφο.

2.8.3. Εμπειρικά Κριτήρια Σύγκλισης Σύμμορφων και Ασύμμορφων Στοιχείων

Τεχνικό κριτήριο 1	Οι συναρτήσεις μετατοπίσεων πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να μην επιτρέπουν να δημιουργείται ένταση σε οποιοδήποτε στοιχείο όταν οι κομβικές μετατοπίσεις οφείλονται σε μια μετατόπιση στερεού σώματος.
Τεχνικό κριτήριο 2	Οι συναρτήσεις των μετατοπίσεων πρέπει να έχουν τέτοια μορφή ώστε να μπορούν να αναπαραστήσουν μια κατάσταση σταθερών γενικευμένων παραμορφώσεων (δηλαδή παραγώγους των μετατοπίσεων μέχρι p τάξης).

Αξίζει να σημειώσουμε ότι το τελευταίο κριτήριο περιλαμβάνει και το προηγούμενο, γιατί σταθερή παραμόρφωση είναι και η μηδενική (δηλαδή η μετατόπιση στερεού σώματος).

Αν οι συναρτήσεις των μετατοπίσεων $\mathbf{M}(x,y,z)$ είναι απλά πολυώνυμα, το τεχνικό κριτήριο 1 ικανοποιείται αν περιλαμβάνονται όροι της μορφής ($a_1+a_2x+a_3y+a_4z$) οι όροι αυτοί μπορούν να παραστήσουν μετατόπιση στερεού σώματος. Θυμίζουμε ότι για την περίπτωση καμπτόμενων κατασκευών, γενικευμένες μετατοπίσεις είναι οι παράγωγοι των μετατοπίσεων μέχρι την ($p-1$) τάξη, δηλαδή μέχρι την πρώτη τάξη για δοκούς και πλάκες.

Αν όμως οι μετατοπίσεις δίνονται με τη βοήθεια των συναρτήσεων σχήματος, τότε ο απ' ευθείας έλεγχος αυτής της συνθήκης είναι σχετικά δύσκολος, γι' αυτό καταφεύγουμε στους ακόλουθους δύο ελέγχους:

i. Οι μετατοπίσεις στερεού σώματος είναι μια σταθερή μεταφορά ή μια περιστροφή στερεού σώματος. Στην περίπτωση της μεταφοράς κατά τον άξονα των x, δηλαδή $u=\alpha$, οι κόμβοι $i=1,2,\ldots,n$ θα πρέπει να έχουν την ίδια σταθερή μετατόπιση, $u=\alpha$, που πρέπει να εμφανίζει και όλο το σώμα. Αυτό σημαίνει ότι στη σχέση

$$\mathbf{q}=\mathbf{N}\mathbf{q}^e=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{N}_i\,\mathbf{q}_i^e$$

ή καλύτερα στη

$$u=\sum_{i=1}^{n}\nu_i\,u_i^e \tag{2.46α}$$

πρέπει να αντικαταστήσουμε την u και τις μετατοπίσεις των n κόμβων του στοιχείου $u_1^e,u_2^e,\ldots,u_n^e$ με τη σταθερά α οπότε

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\nu_i\,\alpha \quad\Rightarrow\quad 1=\sum_{i=1}^{n}\nu_i \tag{2.46β}$$

ii. Στην περίπτωση σταθερής περιστροφής εy, η μετατόπιση u_i^e κατά τον άξονα x κάθε κόμβου i με συντεταγμένες (x_i,y_i,z_i) θα είναι $u_i^e = \varepsilon y_i$, οπότε αντικαθιστώντας στη (2.46α) έχουμε

$$\varepsilon y = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \varepsilon y_i \quad \Rightarrow \quad y = \sum_{i=1}^{n} \nu_i y_i \tag{2.46γ}$$

Αντίστοιχα βρίσκουμε βέβαια

$$x = \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i \quad , \quad z = \sum_{i=1}^{n} \nu_i z_i \tag{2.46δ}$$

Οι σχέσεις (2.46) αποτελούν τις συνθήκες για την ικανοποίηση του κριτηρίου 3.

Σε στοιχεία όπου ο παραπάνω έλεγχος είναι δύσκολος (όπως πχ. σε καμπτόμενες κατασκευές) γίνεται ένας έμμεσος έλεγχος. Δίνουμε, δηλαδή μια μετατόπιση στερεού σώματος στο στοιχείο, οπότε είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τις αντίστοιχες μετατοπίσεις των κόμβων του στοιχείου. Χρησιμοποιώντας αυτές τις μετατοπίσεις σαν κομβικές παραμέτρους εξετάζουμε αν οι συναρτήσεις των μετατοπίσεων αναπαράγουν την ίδια ακριβώς μετατόπιση στερεού σώματος που θεωρήσαμε αρχικά. Ελέγχονται ακόμα οι παραμορφώσεις οι οποίες πρέπει να είναι μηδενικές.

Τεχνικό κριτήριο 3	Οι συναρτήσεις των μετατοπίσεων πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε το στοιχείο να είναι γεωμετρικά ισότροπο, χωρίς κυριαρχούσες διευθύνσεις (δηλαδή ανεξάρτητο από το σύστημα αναφοράς).

Αυτό είναι ένα επιθυμητό αλλά όχι απαραίτητο κριτήριο. Στα περισσότερα στοιχεία οι συναρτήσεις μετατόπισης είναι μη πλήρη αλλά γεωμετρικά ισότροπα πολυώνυμα. Έτσι π.χ. εάν ο όρος x^3y υπάρχει σε ένα στοιχείο πλακών, πρέπει επίσης να περικλείεται και ο όρος y^3x (δες επίσης §2.7). Προφανώς το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου είναι τελικά γεωμετρικά αμετάβλητο ως προς ένα καθολικό σύστημα συντεταγμένων (§2.7).

2.8.4. Κριτήρια Σύγκλισης Ασύμμορφων Προσεγγίσεων, Έλεγχος Συρραφής.

Στις περιπτώσεις στοιχείων που δεν εξασφαλίζεται η συνέχεια μεταξύ τους, η προσέγγιση δεν είναι σύμμορφη (§2.8.1). Έχει αποδειχθεί εν τούτοις ότι η προσέγγιση που επιτυγχάνει κανείς μ' αυτά τα στοιχεία είναι πάντα πολύ αξιόλογη και οπωσδήποτε αρκετή για τις εφαρμογές του μηχανικού. Ο έλεγχος που χρησιμοποιείται για να μελετηθεί η καταλληλότητα των ασύμμορφων πεπερασμένων στοιχείων και επομένως η προσέγγιση που μπορεί να επιτευχθεί μ' αυτά καλείται ***έλεγχος συρραφής***. Λέγοντας *συρραφή* εννοείται μία ομάδα πεπερασμένων στοιχείων συγκεντρωμένων μαζί, άρα ο *έλεγχος συρραφής* αφορά την καταλληλότητα των ασύμμορφων στοιχείων στο **σύνολο της κατασκευής**.

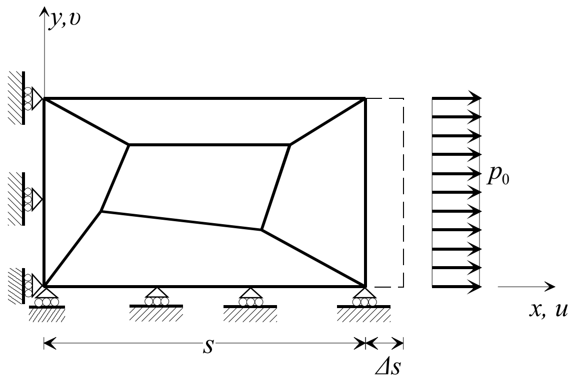
Η *συρραφή* των στοιχείων πρέπει να έχει τουλάχιστον έναν κόμβο που να περιβάλλεται εντελώς από στοιχεία. Η διαδικασία εφαρμογής του ελέγχου συρραφής έχει ως ακολούθως:

Οι κόμβοι των εξωτερικών συνόρων της συρραφής είτε υποβάλλονται σε μετατοπίσεις είτε καταπονούνται με ισοδύναμα εξωτερικά φορτία, που σε ακριβή ανάλυση έχουν σαν αποτέλεσμα μία κατάσταση σταθερής παραμόρφωσης. Εάν η ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων δείξει ότι όσο το μέγεθος των πεπερασμένων στοιχείων με την συγκεκριμένη συρραφή μικραίνει τόσο η λύση για τις κομβικές μετατοπίσεις καταλήγει σε μία κατάσταση σταθερών παραμορφώσεων με την απαιτούμενη λόγω υπολογιστή ακρίβεια, τότε η συρραφή θεωρείται επιτυχημένη [6,7].

Αν και ο *έλεγχος συρραφής* απαιτείται μόνον όταν το μέγεθος των στοιχείων της *συρραφής* γίνει πάρα πολύ μικρό, εν τούτοις είναι πολύ κοινό να εφαρμόζεται για κάθε μέγεθος στοιχείων που χρησιμοποιούνται ως μία ένδειξη της καταλληλότητάς των. Στην πραγματικότητα το *τεστ συρραφής* κάνει μία συνολική εκτίμηση των κριτηρίων που εισήχθησαν στις § 2.6.2 και 2.6.3. Όταν το μέγεθος του κανάβου των πεπερασμένων στοιχείων γίνει πάρα πολύ μικρό, τότε η κατάσταση της *σταθερής παραμόρφωσης* και η μεταξύ των στοιχείων *συμβιβαστότητα* συνυπάρχουν. Άρα το να ισχύει το *τεστ συρραφής* για πάρα πολύ *λεπτούς* κανάβους είναι μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για σύγκλιση [5].

Ένα στοιχείο που δεν έχει περάσει τον *έλεγχο συρραφής* δεν πρέπει να είναι της εμπιστοσύνης μας. Αλλά και ένα στοιχείο που έχει περάσει τον έλεγχο μπορεί να μην είναι ικανοποιητικό επειδή η *ταχύτητα σύγκλισης* του (rate of convergence) είναι πολύ αργή. Άρα η ικανοποίηση ή όχι του ελέγχου συρραφής αποτελεί μία ένδειξη μόνον για την καταλληλότητα ή όχι του στοιχείου.

Στο Σχ. 2.8 φαίνεται ένα απλό παράδειγμα *ελέγχου συρραφής*, όπου μία συρραφή πέντε επιπέδων τετραπλευρικών στοιχείων υποβάλλεται σε μία ομοιόμορφη μετατόπιση ή καταπονείται από ένα ομοιόμορφα διανεμημένο φορτίο p_0 στην πλευρά του, $x=s$. Στην περίπτωση ενός *ελέγχου συρραφής*, οι εσωτερικοί κόμβοι δεν πρέπει ούτε να φορτίζονται ούτε να είναι πακτωμένοι.



Σχήμα 2.8

2.9. ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Ανατρέξτε σχετικά στο CD.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] ZIENKIEWICZ O.C. & R.L. TAYLOR *The Finite Element Method,* McGraw-Hill, London (1987).

[2] COOK R.D. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Second Edition, Wiley, New York (1981).

[3] BATHE K.J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall Inc., (1982).

[4] HUGHES T.R.J. *The Finite Element Method*, Prentice-Hall Inc. (1987).

[5] STRANG G. & FIX J. *An Analysis of the Finite Element Method*- Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ. (1975).

[6] BAZELEY G.P., CHEUNG Y.K., IRONS B.M. & ZIENKIEWICZ O.C. *Triangular Elements in Plate Bending - Conforming and Non-Comforming Solutions*, Proceedings, Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Flight Dynamics Laboratory, TR-66-80, Fairborn, Ohio, pp.547-576 (1966).

[7] IRONS B.M. & RAZZAQUE A. *Experience with the Patch Test for Convergence of Finite Element Method*, *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations,* ed. A.K. Aziz, Academic Press Inc., New York, pp.557-587 (1972).