Κεφάλαιο 3

ΔΟΚΟΙ - ΠΛΑΙΣΙΩΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

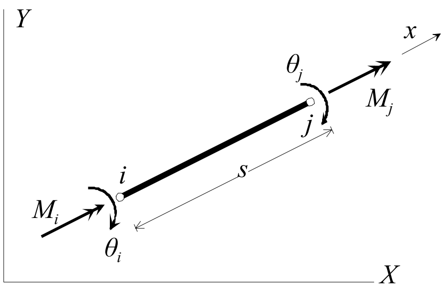
3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων όπως γνωρίζουμε προήλθε από μια γενίκευση των μεθόδων επίλυσης των ραβδωτών φορέων, σε προβλήματα μηχανικής που αφορούν τα επίπεδα παραμορφώσιμα σώματα [1-5]. Στη συνέχεια η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων απέκτησε οικουμενικό χαρακτήρα σε τρόπο που να μπορεί πλέον να επιλύει μια μεγάλη σειρά προβλημάτων των παραμορφώσιμων σωμάτων. Οι μέθοδοι αυτοί είναι εφαρμόσιμοι και στην περίπτωση των ραβδωτών φορέων. Έτσι οι ακαμψίες των στοιχείων (ράβδων) προκύπτουν με τη βοήθεια των παρεμβολικών τύπων που περιγράψαμε και όχι βάσει θεωρήσεων που στηρίζονται στην αντοχή των υλικών (δηλαδή στις σχέσεις κομβικών φορτίων-κομβικών μετατοπίσεων που δίνει η εξίσωση ελαστικής γραμμής).

3.2. ΡΑΒΔΟΙ ΣΕ ΣΤΡΕΨΗ

Θα μελετηθεί η καταπόνηση μιας ευθύγραμμης ράβδου με κυκλική διατομή A και μήκος s που υποβάλλεται στα άκρα της i,j στις στρεπτικές ροπές M_i, M_j (Σχ. 3.1), (όπου για λόγους ισορροπίας $M_i = -M_j$).

Όπως στην §1.2, θεωρούμε το τοπικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο i τέτοιο ώστε ο άξονας των x να συμπίπτει με τη διεύθυνση της ράβδου και με φορά από i προς j. Επομένως, μια οποιαδήποτε στροφή της διατομής στο το-



Σχήμα 3.1 Ράβδος σε στρέψη

πικό σύστημα αξόνων είναι

$$\theta(x) = (1-\xi)\theta_i + \xi\theta_j \qquad \xi = \frac{x}{s} \tag{3.1}$$

Οπότε

$$\theta(x) = \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix}, \qquad \xi = \frac{x}{s}$$

ή

$$\theta(x) = \begin{bmatrix} N_i(x) & N_j(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\boldsymbol{\theta}^e \tag{3.2}$$

Οι παραμορφώσεις θα δίνονται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\gamma} = r\varphi = r\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{r}{s}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

ή σε μητρωϊκή μορφή

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\theta}^e \tag{3.3}$$

όπου $\boldsymbol{\gamma}$ η διατμητική παραμόρφωση, r η ακτίνα και φ η ανά μονάδα μήκους στροφή (συστροφή). Και οι τάσεις είναι

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mu r}{s}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{\theta}^e$$

ή

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}_1\boldsymbol{\theta}^e \tag{3.4}$$

όπου $\mathbf{D}$ είναι ένα μητρώο (1×1), δηλαδή

$$\mathbf{D} = \mu \tag{3.5}$$

Με μ συμβολίζουμε το μέτρο διάτμησης. Παρατηρούμε την αναλογία που υπάρχει μεταξύ ράβδου σε στρέψη και ράβδου δικτυώματος, οπότε κατ' αναλογία το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου e (πρβλ. σχέση (3.19)) θα είναι

$$\mathbf{k}^e = \mu\int_{V^e} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \frac{r^2}{s^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \, dV = \frac{\mu}{s}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \int_A r^2 dA$$

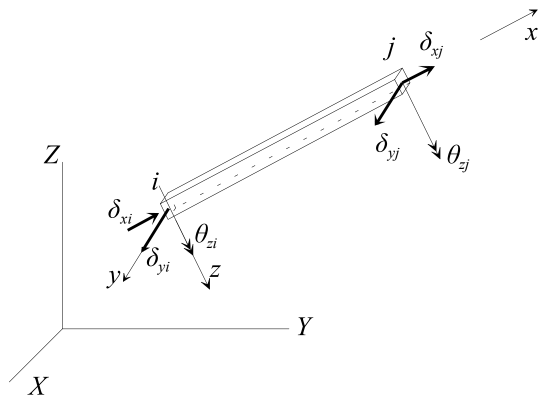
επομένως

$$\mathbf{k}^e = \frac{\mu J}{s}\begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m & -\ell^2 & -\ell m \\ \ell m & m^2 & -\ell m & -m^2 \\ -\ell^2 & -\ell m & \ell^2 & \ell m \\ -\ell m & -m^2 & \ell m & m^2 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

όπου, μJ η ακαμψία της δοκού σε στρέψη και J η πολική ροπή αδράνειας.

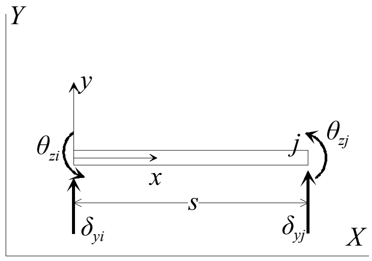
3.3. ΔΟΚΟΣ ΣΕ ΑΠΛΗ ΚΑΜΨΗ

Δίνεται μια δοκός *e* μήκους *s*, σταθερής διατομής *A*, μέτρου ελαστικότητας *E*, αφόρτιστη στο άνοιγμά της (*ij*). Θεωρείται όπως και προηγούμενα ένα τοπικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο *i* τέτοιο ώστε ο άξονας των *x* να συμπίπτει με τη ράβδο *ij* με φορά από το *i* στο *j*. Οι άξονες *y,z* συμπίπτουν με τους κύριους άξονες της διατομής (Σχ. 1.2).



Σχήμα 3.2

Το πεδίο των μετατοπίσεων ορίζεται από μια αξονική μετατόπιση δ_x κατά την διεύθυνση του άξονα *Ox* και ένα βέλος δ_y κατά τον άξονα *Oy*. Έστω ότι προσωρινά αγνοούμε τις αξονικές επιδράσεις. Οπότε, η δοκός θα έχει σε κάθε άκρο της δυο βαθμούς ελευθερίας (Σχ. 1.3), δηλαδή τα βέλη δ_{yi},δ_{yj} και τις στροφές θ_{zi},θ_{zj}, όπου



Σχήμα 3.3

$$\theta_{zi} = \frac{d\delta_{yi}}{dx} \quad , \quad \theta_{zj} = \frac{d\delta_{yj}}{dx} \tag{3.7}$$

Το βέλος $\delta_y(x)$ εκφράζεται από τη σχέση

$$\delta_y(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \tag{3.8}$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες βρίσκουμε

$$\delta_y(x) = \left(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3\right)\delta_{yi} + \xi^2(3 - 2\xi)\delta_{yj} + s\xi\left(1 - 2\xi + \xi^2\right)\theta_{zi} + s\xi^2(\xi - 1)\theta_{zj} \tag{3.9}$$

όπου

$$\xi = \frac{x}{s} \tag{3.10}$$

Αν λάβουμε υπόψη και την αξονική δύναμη, τότε σύμφωνα με τη σχέση (1.6) η αξονική μετατόπιση είναι

$$\delta_x(x) = (1 - \xi)\delta_{xi} + \xi\delta_{xj} \tag{3.11}$$

Επομένως η συνολική έκφραση για τη μετατόπιση είναι

$$\begin{Bmatrix} \delta_x(x) \\ \delta_y(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & s\xi\left(1-2\xi+\xi^2\right) & 0 & \xi^2(3-2\xi) & s\xi^2(\xi-1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ \delta_{xj} \\ \delta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}$$

ή

$$\delta(x) = \mathbf{N}(x)\,\boldsymbol{\delta}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i(x) & \mathbf{N}_j(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ \delta_{xj} \\ \delta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

Οπότε, οι παραμορφώσεις δίνονται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \delta_x(x)}{\partial x} \\ -\left(\dfrac{\partial^2 \delta_y(x)}{\partial x^2}\right) y \end{Bmatrix} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} -s & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & -6(2\xi-1)y & -2s(3\xi-2)y & 0 & -6(1-2\xi)y & -2s(3\xi-1)y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ \delta_{xj} \\ \delta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}$$

ή

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\delta}^e \tag{3.13}$$

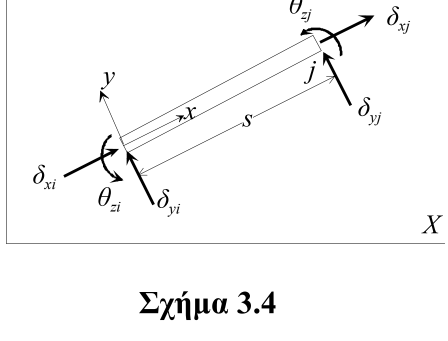
Επίσης, οι τάσεις δίνονται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{E}{s^2} \begin{bmatrix} -s & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & -6(2\xi-1)y & -2s(3\xi-2)y & 0 & -6(1-2\xi)y & -2s(3\xi-1)y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ \delta_{xj} \\ \delta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}$$

ή

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\mathbf{B}_1\,\boldsymbol{\delta}^e = E\mathbf{B}_1\boldsymbol{\delta}^e \tag{3.14}$$

Υποθέτοντας ότι η δοκός e αποτελεί τμήμα ενός επίπεδου φορέα (η παραδοχή αυτή είναι απόλυτα δικαιολογημένη αφού οι τάσεις και οι μετατοπίσεις ενεργούν πάνω σ' ένα επίπεδο), το διάνυσμα των τοπικών μετατοπίσεων $\boldsymbol{\delta}^e$ συνδέεται με το διάνυσμα των μετατοπίσεων στο καθολικό σύστημα $\mathbf{q}^e$ (Σχ. 3.4) με μια σχέση της μορφής



Σχήμα 3.4

$$\begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ \delta_{xj} \\ \delta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \upsilon_i \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ \upsilon_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}$$

ή

$$\boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{a}_1 \mathbf{q}^e \tag{3.15}$$

όπου $\boldsymbol{\alpha}_1$ το μητρώο στροφής από το τοπικό σύστημα στο καθολικό και

$$\ell = \cos\varphi = \frac{X_j - X_i}{s} \qquad m = \sin\varphi = \frac{Y_j - Y_i}{s} \tag{3.16}$$

τα συνημίτονα κατεύθυνσης της δοκού.

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.16) στις σχέσεις (3.13) και (3.14) έχουμε

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}^e = \mathbf{B}\mathbf{q}^e$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}^e = \mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathbf{q}^e$$

Επομένως το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου είναι ίσο με

$$\mathbf{k}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B}\, dV = E \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \left(\int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_1 \, dV \right) \boldsymbol{\alpha}_1$$

ή

$$\mathbf{k}^e = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{k}}^e \boldsymbol{\alpha}_1 \quad , \quad \overline{\mathbf{k}}^e = E \int_{V^e} \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_1 \, dV \tag{3.17}$$

όπου $\overline{\mathbf{k}}^e$ το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου στο τοπικό σύστημα αξόνων.

Η σχέση (3.17) μπορεί να χρησιμοποιηθεί απ’ ευθείας (χωρίς να αποδειχθεί) και επιτρέπει την αναγωγή ενός μητρώου-τανυστή από ένα σύστημα αξόνων σε ένα άλλο. Άρα, το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου μπορεί να υπολογισθεί κατ’ αρχάς στο τοπικό σύστημα αξόνων και κατόπιν με τη βοήθεια του τύπου αναγωγής (3.17) να προσδιορισθεί στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων(*).

Η αναλυτική έκφραση του μητρώου ακαμψίας $\overline{\mathbf{k}}^e$ στο τοπικό σύστημα αξόνων δίνεται από τη σχέση

$$\overline{\mathbf{k}}^e = \frac{E}{s} \begin{bmatrix} A & & & & & \\ 0 & \frac{12I}{s^2} & & & & \\ 0 & \frac{6I}{s} & 4I & & \textit{συμμετρικό} & \\ -A & 0 & 0 & A & & \\ 0 & -\frac{12I}{s^2} & -\frac{6I}{s} & 0 & \frac{12I}{s^2} & \\ 0 & \frac{6I}{s} & 2I & 0 & -\frac{6I}{s} & 4I \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

(*) Όπως μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητό, η πρώτη από τις σχέσεις (3.17) για αναγωγή από το τοπικό στο καθολικό σύστημα έχουν γενική εφαρμογή και ισχύει για κάθε είδος στοιχείου.

όπου, I η κύρια ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z της διατομής.

Οπότε, το μητρώο ακαμψίας στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\overline{\mathbf{k}}^e = \frac{E}{s}\begin{bmatrix} A\ell^2+\frac{12I}{s^2}m^2 & & & & & \\ \left(A-\frac{12I}{s^2}\right)\ell m & Am^2+\frac{12I}{s^2}\ell^2 & & & & \\ -\frac{6I}{s}m & \frac{6I}{s}\ell & 4I & \text{συμμετρικό} & & \\ -\left(A\ell^2+\frac{12I}{s^2}m^2\right) & -\left(A-\frac{12I}{s^2}\right)\ell m & -\frac{6I}{s}m & A\ell^2+\frac{12I}{s^2}m^2 & & \\ -\left(A-\frac{12I}{s^2}\right)\ell m & -\left(Am^2+\frac{12I}{s^2}\ell^2\right) & -\frac{6I}{s}\ell & \left(A-\frac{12I}{s^2}\right)\ell m & Am^2+\frac{12I}{s^2}\ell^2 & \\ -\frac{6I}{s}m & \frac{6I}{s}\ell & 2I & \frac{6I}{s}m & -\frac{6I}{s}\ell & 4I \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Επίσης οι κομβικές δυνάμεις του στοιχείου e που οφείλονται σε κατανεμημένα φορτία $[T_x, T_y]^{\mathrm{T}}$ είναι

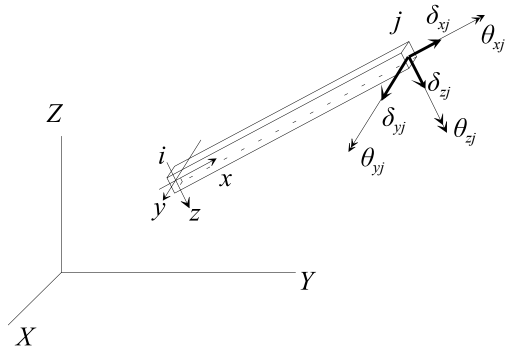
$$\mathbf{F}_T^e = \int_0^s \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{s} & 0 \\ 0 & 1-3\frac{x^2}{s^2}+2\frac{x^3}{s^3} \\ 0 & x\left(1-2\frac{x}{s}+\frac{x^2}{s^2}\right) \\ \frac{x}{s} & 0 \\ 0 & \frac{x^2}{s^2}\left(3-2\frac{x}{s}\right) \\ 0 & \frac{x^2}{s}\left(\frac{x}{s}-1\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} dx \tag{3.20}$$

Στην περίπτωση ομοιόμορφα κατανεμημένων φορτίων T_x και T_y η (3.20) παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{F}_T^e = \begin{bmatrix} x\left(1-\frac{x}{2s}\right) & 0 \\ 0 & x\left(1-\frac{x^2}{s^2}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{s^3}\right) \\ 0 & \frac{x^2}{2}\left(1-\frac{4}{3}\frac{x}{s}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{s^2}\right) \\ \frac{x^2}{2s} & 0 \\ 0 & \frac{x^3}{s^2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{x}{s}\right) \\ 0 & \frac{1}{4}\frac{x^3}{s}\left(\frac{x}{s}-\frac{4}{3}\right) \end{bmatrix} \Bigg|_0^s \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

3.4. ΔΟΚΟΣ ΣΕ ΣΥΝΘΕΤΟ ΚΑΜΨΗ ΚΑΙ ΣΤΡΕΨΗ

Η γενική αυτή περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί απλά σαν επαλληλία των προηγούμενων περιπτώσεων (§3.2 και 3.3). Αν λοιπόν το μητρώο των μετατοπίσεων στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων είναι (Σχ. 3.5)



Σχήμα 3.5

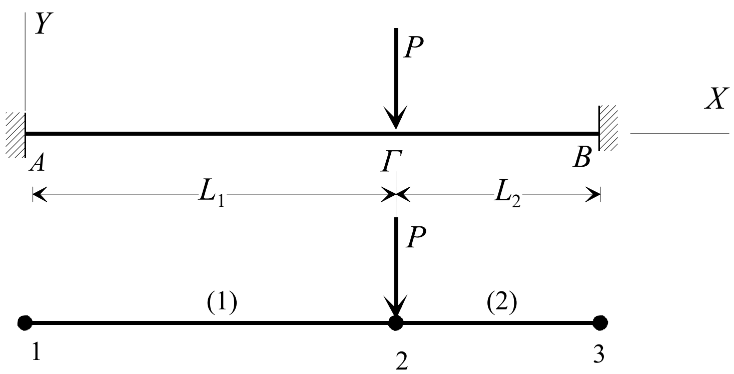
$$\boldsymbol{\delta}^{e\,T} = \begin{bmatrix} \delta_{xi} & \delta_{yi} & \delta_{zi} & \theta_{xi} & \theta_{yi} & \theta_{zi} & \delta_{xj} & \delta_{yj} & \delta_{zj} & \theta_{xj} & \theta_{yj} & \theta_{zj} \end{bmatrix} \qquad (3.22)$$

Τότε το μητρώο ακαμψίας στο τοπικό σύστημα αξόνων [6] είναι

$$\bar{\mathbf{k}}^e = \frac{E}{s}\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
A & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12I_z}{s^2} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{12I_y}{s^2} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{\mu J}{E} & & & & & \text{συμμετρικό} & & & \\
0 & 0 & -\frac{6I_y}{s} & 0 & 4I_y & & & & & & & \\
0 & \frac{6I_z}{s} & 0 & 0 & 0 & 4I_z & & & & & & \\
\hline
-A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & & & & & \\
0 & -\frac{12I_z}{s^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{s} & 0 & \frac{12I_z}{s^2} & & & & \\
0 & 0 & -\frac{12I_y}{s^2} & 0 & \frac{6I_z}{s} & 0 & 0 & 0 & \frac{12I_y}{s^2} & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{\mu J}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu J}{E} & & \\
0 & 0 & -\frac{6I_y}{s} & 0 & 2I_y & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_y}{s} & 0 & 4I_y & \\
0 & \frac{6I_z}{s} & 0 & 0 & 0 & 2I_z & 0 & -\frac{6I_z}{s} & 0 & 0 & 0 & 4I_z
\end{array}\right] \qquad (3.23)$$

Παράδειγμα 3.1

Να λυθεί η αμφίπακτη δοκός του σχήματος που φορτίζεται με το φορτίο P .



Για την ανάλυση με τη μέθοδο των

πεπερασμένων στοιχείων η δοκός χωρίζεται σε δυο πεπερασμένα στοιχεία, που ορίζονται από τους κόμβους 1,2 και 2,3 αντίστοιχα. Επίσης θεωρείται το καθολικό σύστημα συντεταγμένων *XAY*.

Θεωρώντας τις σχέσεις (3.18), (3.19) ή ακόμα την (3.23) και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι στρεπτικές και αξονικές δυνάμεις δεν υπεισέρχονται στο πρόβλημα (και άρα οι βαθμοί ελευθερίας του κάθε κόμβου είναι 2), το μητρώο ακαμψίας των στοιχείων (1) και (2) είναι

$$\mathbf{k}^1=\frac{EI}{L_1}\begin{bmatrix} \frac{12}{L_1^2} & & & \\ \frac{6}{L_1} & 4 & \textit{συμμετρικό} & \\ -\frac{12}{L_1^2} & -\frac{6}{L_1} & \frac{12}{L_1^2} & \\ \frac{6}{L_1} & 2 & -\frac{6}{L_1} & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k}^2=\frac{EI}{L_2}\begin{bmatrix} \frac{12}{L_2^2} & & & \\ \frac{6}{L_2} & 4 & \textit{συμμετρικό} & \\ -\frac{12}{L_2^2} & -\frac{6}{L_2} & \frac{12}{L_2^2} & \\ \frac{6}{L_2} & 2 & -\frac{6}{L_2} & 4 \end{bmatrix}$$

Έτσι η σχέση που συνδέει τις μετατοπίσεις στους κόμβους με τα εξωτερικά φορτία που ασκούνται στους κόμβους είναι

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = EI\begin{bmatrix} \frac{12}{L_1^3} & \frac{6}{L_1^2} & -\frac{12}{L_1^3} & \frac{6}{L_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{6}{L_1^2} & \frac{4}{L_1} & -\frac{6}{L_1^2} & \frac{2}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L_1^3} & -\frac{6}{L_1^2} & 12\left(\frac{1}{L_1^3}+\frac{1}{L_2^3}\right) & 6\left(\frac{1}{L_2^2}+\frac{1}{L_1^2}\right) & -\frac{12}{L_2^3} & \frac{6}{L_2^2} \\ \frac{6}{L_1^2} & \frac{2}{L_1} & 6\left(\frac{1}{L_2^2}+\frac{1}{L_1^2}\right) & 4\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right) & -\frac{6}{L_2^2} & \frac{2}{L_2} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{L_2^3} & -\frac{6}{L_2^2} & \frac{12}{L_2^3} & -\frac{6}{L_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{L_2^2} & \frac{2}{L_2} & -\frac{6}{L_2^2} & \frac{4}{L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \upsilon_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Η επίλυση του συστήματος δίνει

$$\upsilon_2 = \frac{-PL_1^3L_2^3}{3EI\left[L_1^3+L_2^3+3L_1L_1\left(L_1+L_2\right)\right]}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\frac{P}{EI}\frac{L_1L_2\left(L_1-L_2\right)}{\left[L_1^3+L_2^3+3L_1L_2\left(L_1+L_2\right)\right]}$$

Έχοντας υπολογίσει τις μετατοπίσεις των κόμβων, οι δυνάμεις που αναπτύσσονται σε μεμονωμένα στοιχεία προκύπτουν από τη σχέση (2.60), που συνδέει τις δυνάμεις με τις μετατοπίσεις των κόμβων του στοιχείου. Στην περίπτωση του στοιχείου (1) προκύπτει

$$
\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L_1}
\begin{bmatrix}
\frac{12}{L_1^2} & \frac{6}{L_1} & -\frac{12}{L_1^2} & \frac{6}{L_1} \\
\frac{6}{L_1} & 4 & -\frac{6}{L_1} & 2 \\
-\frac{12}{L_1^2} & -\frac{6}{L_1} & \frac{12}{L_1^2} & -\frac{6}{L_1} \\
\frac{6}{L_1} & 2 & -\frac{6}{L_1} & 4
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \upsilon_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}
$$

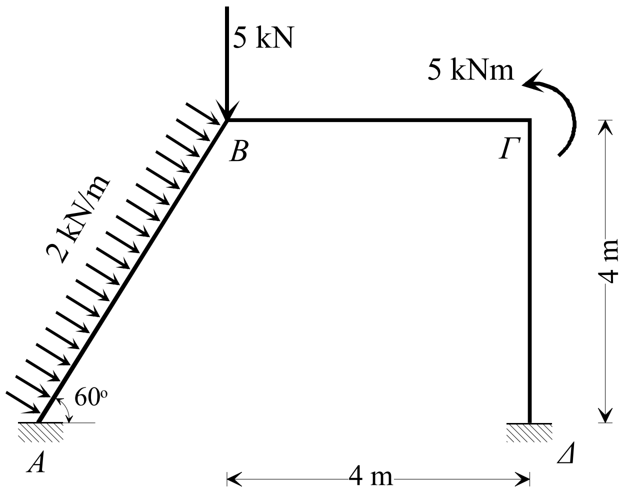
Αντίστοιχα, υπολογίζονται και οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στον κόμβο 3 χρησιμοποιώντας την εξίσωση που αφορά το στοιχείο (2).

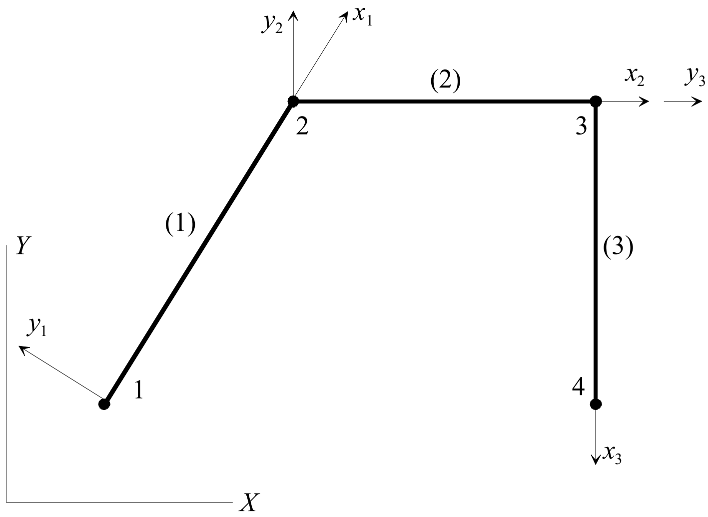
Παράδειγμα 3.2

Δίδεται το πλαίσιο του σχήματος, όπου A=0,1 m^2, I=0,00133 m^4 και E=20GN/m^2 σταθερά για όλα τα μέλη του πλαισίου.

Το πλαίσιο υποδιαιρείται σε τρία πεπερασμένα στοιχεία. Έστω (XY) το καθολικό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο αναφέρεται το πλαίσιο και (x_i,y_i) τα τοπικά συστήματα συντεταγμένων των στοιχείων.

Λαμβάνοντας υπόψη την (3.19), τα μητρώα ακαμψίας των στοιχείων του πλαισίου στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων είναι





$$\mathbf{k}^1=20\times10^7\begin{bmatrix} 0{,}55341 & & & & & \\ 0{,}93049 & 1{,}62785 & & \textit{συμμετρικό} & & \\ -0{,}0324 & 0{,}01870 & 0{,}11518 & & & \\ -0{,}55341 & -0{,}93049 & -0{,}03240 & 0{,}55341 & & \\ -0{,}93049 & -1{,}62785 & -0{,}01870 & 0{,}93049 & 1{,}62785 & \\ -0{,}03234 & 0{,}01870 & 0{,}05759 & 0{,}03234 & -0{,}01870 & 0{,}11518 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^2=20\times10^7\begin{bmatrix} 2{,}16507 & & & & & \\ 0 & 0{,}0162 & & \textit{συμμετρικό} & & \\ 0 & 0{,}03741 & 0{,}1518 & & & \\ -2{,}16507 & 0 & 0 & 2{,}16057 & & \\ 0 & -0{,}0162 & -0{,}3741 & 0 & 0{,}0162 & \\ 0 & 0{,}03741 & 0{,}05759 & 0 & -0{,}03741 & 0{,}11518 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^2=20\times10^7\begin{bmatrix} -0{,}0162 & & & & & \\ 0 & 2{,}16507 & & \textit{συμμετρικό} & & \\ 0{,}03741 & 0 & 0{,}11518 & & & \\ -0{,}0162 & 0 & 0{,}03741 & 0{,}0162 & & \\ 0 & -2{,}16507 & 0 & 0 & 2{,}16507 & \\ 0{,}03741 & 0 & 0{,}05759 & -0{,}03741 & 0 & 0{,}11518 \end{bmatrix}$$

Το ομοιόμορφο φορτίο στο στοιχείο 1 κατανέμεται εξίσου στους κόμβους 1 και 2. Δηλαδή, το μητρώο των εξωτερικών φορτίων στο στοιχείο 1 στο τοπικό σύστημα του στοιχείου, είναι

$$\mathbf{S}^1=\begin{Bmatrix} 0 \\ -4618{,}8 \\ -3555{,}6 \\ 0 \\ -4618{,}8 \\ 3555{,}6 \end{Bmatrix}$$

Επομένως, το μητρώο των εξωτερικών φορτίων του στοιχείου 1 στο καθολικό σύστημα είναι (για $\varphi=60^o$).

$$\mathbf{F}^1=\boldsymbol{\alpha}_1^T\mathbf{S}^1=\begin{bmatrix} \cos60^o & -\sin60^o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin60^o & \cos60^o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos60^o & -\sin60^o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin60^o & \cos60^o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -4618{,}8 \\ 0 \\ 0 \\ -4618{,}8 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 4000{,}0 \\ -2309{,}4 \\ -3555{,}6 \\ 4000{,}0 \\ -2309{,}4 \\ 3555{,}6 \end{Bmatrix}$$

Οπότε η σχέση που συνδέει τις μετατοπίσεις στους κόμβους με τα εξωτερικά φορτία που εξασκούνται σ’ αυτούς είναι

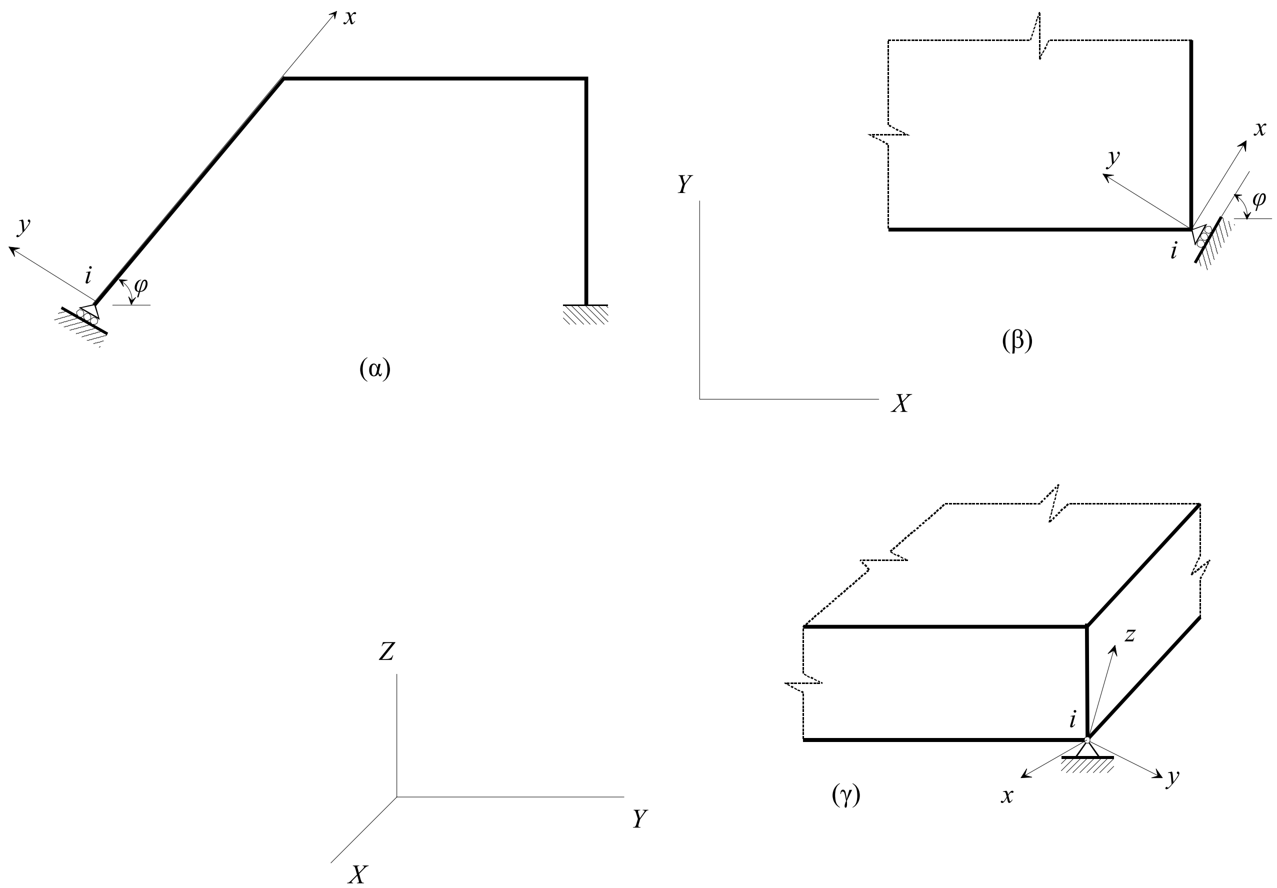
$$\begin{Bmatrix} 4000 \\ -2309.4 \\ -3555.6 \\ 4000 \\ -7309.4 \\ 3555.6 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 20\times10^{7} \begin{bmatrix} 0.55341 & 0.93049 & -0.03240 & -0.55341 & -0.93049 & -0.03234 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.93049 & 1.62785 & 0.01870 & -0.93049 & -1.62785 & 0.01870 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0324 & 0.01870 & 0.11515 & -0.0324 & -0.0187 & 0.05759 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.55341 & -0.93049 & -0.0324 & 2.71848 & 0.93049 & 0.03234 & -2.16507 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.93049 & -1.62785 & -0.0187 & 0.93049 & 1.64405 & 0.01871 & 0 & -0.0162 & 0.03741 & 0 & 0 & 0 \\ -0.03234 & 0.01870 & 0.05759 & 0.03234 & 0.01871 & 0.23036 & 0 & -0.03741 & 0.05759 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.16057 & 0 & 0 & 2.18127 & 0 & 0.03741 & -0.0162 & 0 & 0.03741 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0162 & -0.03741 & 0 & 2.18127 & -0.03741 & 0 & -2.16507 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.03741 & 0.05759 & 0.03741 & -0.03741 & 0.23036 & 0.03741 & 0 & 0.05759 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0162 & 0 & 0.03741 & 0.0162 & 0 & -0.03741 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.16507 & 0 & 0 & 2.16507 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.03741 & 0 & 0.05759 & -0.03741 & 0 & 0.11518 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ \upsilon_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \upsilon_3 \\ \theta_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Από την επίλυση του συστήματος προκύπτουν τα u_2, υ_2, θ_2, u_3, υ_3, θ_3.

Κατόπιν χρησιμοποιώντας την σχέση $\mathbf{S}^{e} = \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{k}^{e} \mathbf{q}^{e}$ $\left(\mathbf{S}^{e\mathrm{T}} = \left[N_i \quad Q_i \quad M_i \quad N_j \quad Q_j \quad M_j \right]\right)$ υπολογίζονται οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στους κόμβους των στοιχείων.

3.5. ΛΟΞΕΣ ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ

Έστω ότι το επίπεδο πλαίσιο του Σχ. 3.6α, ή στην επίπεδη εν γένει κατασκευή του



Σχήμα 3.6 Σχηματισμός με λοξές στηρίξεις

Σχ. 3.6β (δες επίσης Σχ.3.6γ) είναι γνωστές οι μετατοπίσεις του κόμβου *i* στο τοπικό σύστημα *x,y,z*. Η κύλιση του κόμβου *i* που το επίπεδο κύλισής της δεν είναι κάθετο σ' έναν από τους άξονες του καθολικού συστήματος συντεταγμένων ονομάζεται **λοξή στήριξη**. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να γίνει στροφή του συστήματος και μετά να εισαχθούν οι οριακές συνθήκες στο τοπικό σύστημα.

Η σχέση που συνδέει τις μετατοπίσεις των λοξών στηρίξεων $(\bar{u}_i, \bar{\upsilon}_i, \bar{w}_i, \ldots)$ στο τοπικό σύστημα *x,y,z* με τις μετατοπίσεις στο καθολικό σύστημα *X,Y,Z*, ενός οποιουδήποτε στοιχείου *e* είναι

$$\bar{\mathbf{q}}^e = \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{q}^e \tag{3.24}$$

όπου $\boldsymbol{\alpha}_1$ είναι το μητρώο στροφής που στη γενικότερη μορφή του, δίνεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \mathbf{T}_1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

όπου

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \ell_x & m_x & n_x \\ \ell_y & m_y & n_y \\ \ell_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

και (ℓ_x, m_x, n_x), (ℓ_y, m_y, n_y), (ℓ_z, m_z, n_z), τα διευθύνοντα συνημίτονα των αξόνων *x,y,z* ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων *X,Y,Z*. Στην περίπτωση επίπεδου προβλήματος

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο μητρωϊκός πολλαπλασιασμός (3.24) επηρεάζει μόνον εκείνους τους κόμβους του *e* όπου υπάρχουν λοξές στηρίξεις.

Οπότε, η σχέση (2.26) που συνδέει τις γενικευμένες κομβικές δυνάμεις του *e* με τις γενικευμένες μετατοπίσεις παίρνει τη μορφή

$$\bar{\mathbf{k}}^e \bar{\mathbf{q}}^e = \bar{\mathbf{F}}^e \tag{3.28}$$

όπου

$$\bar{\mathbf{k}}^e = \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{k}^e \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \quad , \quad \bar{\mathbf{F}}^e = \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{F}^e \tag{3.29}$$

Ο μετασχηματισμός (3.28) πρέπει να εφαρμόζεται σε κάθε στοιχείο όπου οι λοξές στηρίξεις εμφανίζονται πριν να προχωρήσουμε στο σχηματισμό του ολικού μητρώου ακαμψίας.

3.6. ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΚΑΜΨΗ

Βλέπε σχετική παράγραφο στο βιβλίο.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1]. PRZEMIENIECKI J.S. (1968) *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York.

[2]. GHALI A. & NEVILLE A.M. (1977) *Structural Analysis*, Second Edition, Chapman and Hall, London.

[3]. McGUIRE W. & GALLAGHER R.H. (1979) *Matrix Structural Analysis*, Wiley New York.

[4]. COATES R.C., COUTIE M.G. & KONG F.K. (1979) *Structural Analysis*, Nelsons.

[5]. DAWE D.J. (1984) *Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structures*, Clarendon Press-Oxford.

[6]. ARMENAKAS A.E. (1991) *Modern Structural Analysis-The Matrix Method Approach*, McGraw-Hill.

[7]. MINDLIN R.D. (1951) *Influence of Rotary Inertia and Shear and Flexural Motion of Isotropic Elastic Plates*, J. Appl.Mech., pp. 31-38.