Κεφάλαιο 4

Επίπεδοι φορείς

4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα προβλήματα της επίπεδης ελαστικότητας ήταν τα πρώτα παραδείγματα επιτυχούς εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων [1,2].

Η επίπεδη ελαστικότητα περιλαμβάνει την κατάσταση των επίπεδων τάσεων και των επίπεδων παραμορφώσεων. Και στις δύο περιπτώσεις η εντατική κατάσταση μπορεί να προσδιορισθεί από τις μετατοπίσεις u και υ κατά τις κατευθύνσεις x και y ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Και στις δύο επίσης περιπτώσεις οι μόνες τάσεις και παραμορφώσεις που χρειάζεται να λάβει κανείς υπόψη είναι αυτές που βρίσκονται στο επίπεδο XOY. Σημειώνουμε ότι όταν έχουμε επίπεδες τάσεις δεν έχουμε επίπεδες παραμορφώσεις και αντίστροφα.

4.2. ΑΠΛΟ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ

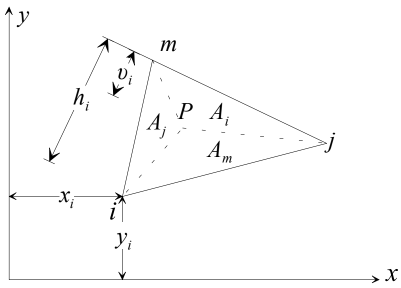
Ο σχηματισμός του μητρώου ακαμψίας αλλά και του μητρώου των φορτίων στην περίπτωση του απλού τριγωνικού στοιχείου έχει ήδη γίνει στο κεφάλαιο 2. Εδώ δίνουμε τα ίδια αποτελέσματα αλλά με ένα διαφορετικό τρόπο, που στηρίζεται στην εισαγωγή ενός νέου τύπου συστήματος συντεταγμένων που ονομάζονται ***εμβαδικές συντεταγμένες*** [3-4]. Οι συντεταγμένες αυτές δεν έχουν μεγάλη σημασία για το απλό τριγωνικό στοιχείο, έχουν όμως τεράστια σημασία για τα πιο σύνθετα τριγωνικά στοιχεία, όπου ο βαθμός του πολυωνύμου παρεμβολής είναι μεγαλύτερος. Η σημασία τους γίνεται καθοριστική στις πλάκες και τα κελύφη.

Έστω ένα επίπεδο τριγωνικό στοιχείο e (Σχ. 4.1).

Κάθε σημείο $P(x,y)$ του στοιχείου e ορίζει τρία τρίγωνα που έχουν όρια τις πλευρές του e και τα τρία ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν το P με τις κορυφές i,j,m.

Έστω A_i, A_j, A_m τα εμβαδά των τριών τριγώνων (Σχ. 4.1). Τότε τα αδιάστατα μεγέθη που ορίζονται από τη σχέση (1.41) ορίζουν ένα νέο σύστημα συντεταγμένων. Επομένως έχουμε

$$p_\ell = \frac{A_\ell}{A} = \frac{\upsilon_\ell}{h_\ell} \quad , \quad \ell = i, j, m \qquad (4.1)$$



Σχήμα 4.1. Επίπεδο τριγωνικό στοιχείο *e*.

όπου, υ_ℓ, h_ℓ τα ύψη από το σημείο P και την κορυφή ℓ αντίστοιχα προς την απέναντι πλευρά της κορυφής ℓ, και A το ολικό εμβαδό της επιφάνειας του στοιχείου *e*.

Το παραπάνω σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται *εμβαδικό.* Παρατηρείται ότι τα p_ℓ (ℓ=i,j,m) δεν είναι ανεξάρτητα αλλά ικανοποιούν τη σχέση

$$p_i + p_j + p_m = 1 \qquad (4.2)$$

Μελετώντας τις ιδιότητες των p_i, p_j, p_m παρατηρείται ότι αυτά συμπίπτουν με τις συναρτήσεις σχήματος (1.40) του απλού τριγωνικού στοιχείου, δηλαδή

$$p_i = v_i \quad , \quad p_j = v_j \quad , \quad p_m = v_m \qquad (4.3)$$

Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε τη σχέση

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i & 0 & p_j & 0 & p_m & 0 \\ 0 & p_i & 0 & p_j & 0 & p_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_m \\ y_m \end{Bmatrix}$$

ή λαμβάνοντας υπόψη τις (4.3)

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(x, y) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_m \\ y_m \end{Bmatrix} \text{¶} \qquad (4.4)$$

Δηλαδή, με μια μορφή ανάλογη της (1.38).

Από τις (4.1), (4.2) και λαμβάνοντας υπόψη τις (1.41) τελικά προκύπτει

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & x_j & x_m \\ y_i & y_j & y_m \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \\ p_m \end{Bmatrix} \qquad (4.5)$$

¶ Τη σχέση αυτή θα την συναντήσουμε πιο κάτω στα ισοπαραμετρικά στοιχεία.

Επομένως μια σχέση ως προς x,y μπορεί να γραφεί ως μια σχέση του ιδίου βαθμού ως προς p_ℓ. Η σχέση μάλιστα που θα προκύψει ως προς p_ℓ είναι ομογενής, γιατί αρκεί να πολλαπλασιάσουμε του όρους που δεν είναι του ίδιου βαθμού με τη σχέση $(p_i+p_j+p_m)^k$ που είναι μονάδα (όπου k είναι κατάλληλος εκθέτης).

Από την αντιστροφή της σχέσης (4.5) προκύπτει:

$$\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \\ p_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{A}\begin{bmatrix} y_j - y_m & x_m - x_j & x_j y_m - x_m y_j \\ y_m - y_i & x_i - x_m & x_m y_i - x_i y_m \\ y_i - y_j & x_j - x_i & x_i y_j - x_j y_i \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{4.6}$$

ή εισάγοντας τα σύμβολα x_{mj}, y_{jm}, z_i που ορίσθηκαν με τις σχέσεις (1.36) έχουμε

$$\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \\ p_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{jm} & x_{mj} & z_i \\ y_{mi} & x_{im} & z_j \\ y_{ij} & x_{ji} & z_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

Οπότε οι εμβαδικές συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου είναι

$$\begin{aligned} i&: \ (1,0,0) \\ j&: \ (0,1,0) \\ m&: \ (0,0,1) \end{aligned}$$

Αντίστοιχα οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου είναι

$$\begin{aligned} &\text{πλευρά} \quad ij: \ p_m = 0 \\ &\text{πλευρά} \quad jm: \ p_i = 0 \\ &\text{πλευρά} \quad mi: \ p_j = 0 \end{aligned}$$

Οι ***εμβαδικές συντεταγμένες*** είναι εντελώς ανεξάρτητες από τη μορφή ή τον προσανατολισμό των τριγωνικών στοιχείων σε τρόπο που οι ολοκληρώσεις και οι παραγωγήσεις να γίνονται εύκολα σ' αυτά.

Συνεπώς οι *εμβαδικές* συντεταγμένες είναι πάρα πολύ χρήσιμες ιδίως στα τριγωνικά στοιχεία.

Λαμβάνοντας υπόψη την (4.4) έχουμε

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{q}^e \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{N}\mathbf{q}^e$$

Οπότε το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου e

$$\mathbf{k}^e = t\int_\Delta \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,dxdy$$

στην περίπτωση της επίπεδης έντασης προκύπτει η σχέση (1.62) και στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης προκύπτει η σχέση (1.63).

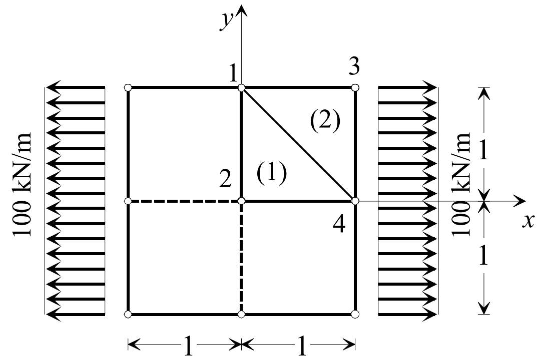
Επίσης οι τάσεις που αναπτύσσονται στο τριγωνικό στοιχείο δίνονται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q}^e$$

στην περίπτωση της επίπεδης έντασης προκύπτει η σχέση (1.48) ενώ στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης προκύπτει η σχέση (1.49).

Παράδειγμα.

Δίνεται μια τετραγωνική πλάκα που φορτίζεται (Σχ.4.2) σε συνθήκες επίπεδης έντασης με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο. Ζητείται η επίλυση της πλάκας χρησιμοποιώντας τριγωνικά στοιχεία (E=182kN/m^2, ν=0,3 και t=0,01m το πάχος της)



Σχήμα 4.2

Επειδή η πλάκα παρουσιάζει διπλή συμμετρία μπορεί να εξεταστεί μόνο το τέταρτο αυτής. Χωρίζοντας το τέταρτο σε δύο τριγωνικά στοιχεία, προσδιορίζουμε κατ' αρχάς το μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου (σχέση (1.62)). Θεωρώντας σαν φορά διαγραφής των κόμβων του στοιχείου, την αντίθετη της φοράς του ρολογιού, έχουμε

Στοιχείο 1

$$\mathbf{k}^1 = \frac{Et}{2\left(1-\nu^2\right)} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & \upsilon_1 & u_2 & \upsilon_2 & u_3 & \upsilon_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\nu) & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ -\frac{1}{2}(1-\nu) & -\nu & 1+\frac{1}{2}(1-\nu) & \textit{συμμετρικό} & & \\ -\frac{1}{2}(1-\nu) & -1 & \nu+\frac{1}{2}(1-\nu) & 1+\frac{1}{2}(1-\nu) & & \\ 0 & \nu & -1 & -\nu & 1 & \\ \frac{1}{2}(1-\nu) & 0 & -\frac{1}{2}(1-\nu) & -\frac{1}{2}(1-\nu) & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \end{array}$$

Στοιχείο 2

$$\mathbf{k}^2 = \frac{Et}{2\left(1-\nu^2\right)} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & \upsilon_1 & u_3 & \upsilon_3 & u_4 & \upsilon_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) & & & & \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) & \frac{1}{2}(1-\nu) & & \textit{συμμετρικό} & \\ \nu & 0 & 0 & 1 & & \\ -1 & -\frac{1}{2}(1-\nu) & -\frac{1}{2}(1-\nu) & -\nu & 1+\frac{1}{2}(1-\nu) & \\ -\nu & -\frac{1}{2}(1-\nu) & -\frac{1}{2}(1-\nu) & -1 & \nu+\frac{1}{2}(1-\nu) & 1+\frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \end{array}$$

Έχοντας ότι το μητρώο των μετατοπίσεων όλων των κόμβων της κατασκευής είναι

$$\mathbf{r}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} u_1 & \upsilon_1 & u_2 & \upsilon_2 & u_3 & \upsilon_3 & u_4 & \upsilon_4 \end{bmatrix}$$

το ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής (χρησιμοποιώντας την απευθείας μέθοδο ακαμψίας, §1.4.1), προκύπτει ως εξής

$$
\mathbf{K}=\frac{Et}{2\left(1-v^2\right)}\times\begin{bmatrix}
\frac{3-v}{2} & & & & & & & \\
0 & \frac{3-v}{2} & & & & & & \\
-\frac{1}{2}(1-v) & -v & \frac{3-v}{2} & \textit{συμμετρικό} & & & & \\
-\frac{1}{2}(1-v) & -1 & \frac{1+v}{2} & \frac{3-v}{2} & & & & \\
0 & \frac{1+v}{2} & -1 & -v & \frac{3-v}{2} & & & \\
\frac{1+v}{2} & 0 & -\frac{1}{2}(1-v) & -\frac{1}{2}(1-v) & 0 & \frac{3-v}{2} & & \\
-1 & -\frac{1}{2}(1-v) & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(1-v) & -v & \frac{3-v}{2} & \\
-v & -\frac{1}{2}(1-v) & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(1-v) & -1 & \frac{1+v}{2} & \frac{3-v}{2}
\end{bmatrix}
$$

Επειδή το εξεταζόμενο πρόβλημα ισορροπεί ως προς τις *x,y* διευθύνσεις, θα πρέπει σε κάθε στήλη του μητρώου ακαμψίας το άθροισμα των όρων που αντιστοιχούν στις περιττές γραμμές να είναι μηδέν και το άθροισμα των όρων που αντιστοιχούν στις ζυγές γραμμές να είναι επίσης μηδέν.

Οι οριακές συνθήκες που υπεισέρχονται στο εξεταζόμενο πρόβλημα και είναι συνέπεια της διπλής συμμετρίας που θεωρήσαμε, έτσι

$$u_1 = u_2 = \upsilon_2 = \upsilon_3 = 0$$

Επίσης, επειδή οι μετατοπίσεις μεταβάλλονται γραμμικά κατά μήκος των σταθερής παραμόρφωσης τριγωνικών στοιχείων θα έχουμε ότι η *u* μετατόπιση είναι μηδέν κατά μήκος της ακμής 2-3. Άρα, το πρόβλημα έχει συνολικά τέσσερις βαθμούς ελευθερίας και το ανηγμένο μητρώο των μετατοπίσεών του είναι

$$\overline{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \upsilon_1 & u_3 & u_4 & \upsilon_4 \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα, το ανηγμένο ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής, δηλαδή το μητρώο ακαμψίας **K** αφού αφαιρεθούν από αυτό οι γραμμές και οι στήλες που αντιστοιχούν στις μηδενικές μετατοπίσεις και αντικατασταθούν οι τιμές των *E,v,t* θα είναι

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \upsilon_1 & u_3 & u_4 & \upsilon_4 \end{array} \\
\overline{\mathbf{K}} = 10^6 & \begin{bmatrix}
1,35 & & & \\
0,65 & 1,35 & \textit{συμμετρικό} & \\
-0,35 & -0,35 & 1,35 & \\
-0,35 & -0,35 & 0,65 & 1,35
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Λόγω της αρχικής φόρτισης, κομβικές δυνάμεις λόγω του κατανεμημένου φορτίου έχουμε μόνο στο στοιχείο (2). Εάν το κατανεμημένο φορτίο στην ακμή (3-4) διανεμηθεί εξίσου στους κόμβους 3 και 4 προκύπτει:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} u_1 & \upsilon_1 & u_3 & \upsilon_3 & u_4 & \upsilon_4 \end{array} \\
\mathbf{F}^{2^{\mathrm{T}}} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 & 50 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Οπότε το ανηγμένο μητρώο φόρτισης όλης της κατασκευής είναι

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \upsilon_1 & u_3 & u_4 & \upsilon_4 \end{array} \\ \mathbf{R}^{\mathrm{T}} = & \begin{bmatrix} 0 & 50 & 50 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Συνεπώς η σχέση που συνδέει τις μετατοπίσεις με τις τάσεις σ' όλη την κατασκευή είναι

$$10^6 \begin{bmatrix} 1{,}35 & & & \\ 0{,}65 & 1{,}35 & \text{συμμετρικό} & \\ -0{,}35 & -0{,}35 & 1{,}35 & \\ -0{,}35 & -0{,}35 & 0{,}65 & 1{,}65 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \upsilon_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ \upsilon_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει

$$\upsilon_1 = -\frac{0,3}{18200}\,\mathrm{m} \quad , \quad u_3 = \frac{1}{18200}\,\mathrm{m} \quad , \quad u_4 = \frac{1}{18200}\,\mathrm{m} \quad , \quad \upsilon_4 = -\frac{0,3}{18200}\,\mathrm{m}$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι τάσεις που αναπτύσσονται στα στοιχεία (1), (2), (σχέση (1.48)):

Στοιχείο 1

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{182\times10^6}{0{,}91\times18200} \begin{bmatrix} 0{,}0 & 0{,}3 & -1{,}0 & -0{,}3 & 1{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 1{,}0 & -0{,}3 & -1{,}0 & 0{,}3 & 0{,}0 \\ 0{,}35 & 0{,}0 & -0{,}35 & -0{,}35 & 0{,}0 & 0{,}35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}0 \\ -0{,}3 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 1{,}0 \\ 0{,}0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10^4 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{Bmatrix} \mathrm{kNm^{-2}}$$

Στοιχείο 2

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10^4 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{Bmatrix} \mathrm{kNm^{-2}}$$

Άρα η λύση με τα πεπερασμένα στοιχεία δίνει μια ομοιόμορφη διαστολή όλης της κατασκευής στην x-διεύθυνση και μια ομοιόμορφη συστολή επίσης όλης της κατασκευής στην y-διεύθυνση. Ακόμα δίνει ένα ομοιόμορφο τασικό πεδίο με σταθερή ένταση σ_{xx}.

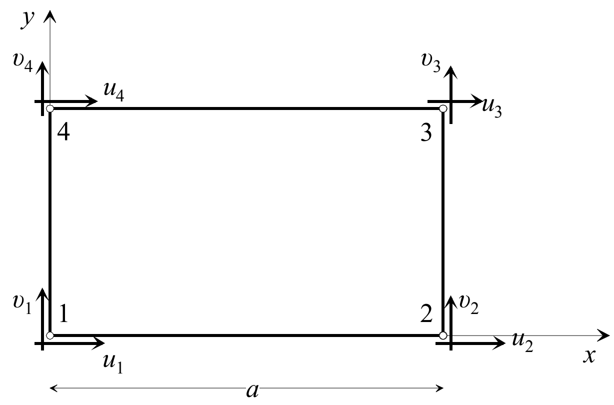
Η ακριβής λύση του ανωτέρω προβλήματος με τη βοήθεια της ελαστικότητας είναι

$$\begin{array}{lll} \sigma_{xx} = \sigma = 10^4\,\mathrm{kN/m^2} & , \quad \sigma_{yy} = 0 & , \quad \sigma_{xy} = 0 \\ u = x\dfrac{\sigma_{xx}}{E} & , \quad \upsilon = -y\nu\dfrac{\sigma_{xx}}{E} & \end{array}$$

Παρατηρείται ότι η λύση των πεπερασμένων στοιχείων συμπίπτει με την ακριβή λύση. Αυτό όμως αναμενόταν επειδή η λύση των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκε μπορεί να αναπαραστήσει με απόλυτη ακρίβεια καταστάσεις σταθερής επίπεδης έντασης ή επίπεδης παραμόρφωσης.

4.3. ΑΠΛΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ

Θεωρείται το απλό ορθογωνικό στοιχείο του Σχ.4.3. Οι μετατοπίσεις κάθε κόμβου *i* (*i*=1,2,3,4) έχουν δύο συνιστώσες. Επιπλέον λαμβάνεται το τοπικό σύστημα *x*1*y*. Οι οκτώ συνιστώσες των μετατοπίσεων του στοιχείου *e* γράφονται με τη μορφή μητρώου διανύσματος ως εξής



$$\boldsymbol{\delta}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \boldsymbol{\delta}_3 \\ \boldsymbol{\delta}_4 \end{Bmatrix} \qquad (4.8)$$

Σχήμα 4.3

όπου

$$\boldsymbol{\delta}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ \upsilon_i \end{Bmatrix}, \qquad i = 1,2,3,4 \qquad (4.9)$$

Εφόσον το στοιχείο *e* έχει οκτώ βαθμούς ελευθερίας (2 βαθμοί σε κάθε κόμβο) το πεδίο των μετατοπίσεων στο τοπικό σύστημα είναι

$$\begin{aligned} u(x,y) &= a_1 + a_2 x + a_3 xy + a_4 y \\ \upsilon(x,y) &= a_5 + a_6 x + a_7 xy + a_8 y \end{aligned} \qquad (4.10)$$

ή σε μητρωϊκή μορφή

$$\boldsymbol{\delta}_i(x,y) = \begin{Bmatrix} u_i(x,y) \\ \upsilon_i(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & xy & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & xy & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \qquad (4.11)$$

ή

$$\boldsymbol{\delta}_i(x,y) = \mathbf{M}(x,y)\mathbf{a} \qquad (4.12)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.11) όπου *x,y* τις συντεταγμένες των κόμβων προκύπτει

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ \upsilon_1 \\ u_2 \\ \upsilon_2 \\ u_3 \\ \upsilon_3 \\ u_4 \\ \upsilon_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha b & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha b & b \\ 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \tag{4.13}$$

ή

$$\boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{A}\,\mathbf{a} \tag{4.14}$$

Λύνοντας ως προς **a** την (4.13) έχουμε

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha b} & 0 & -\frac{1}{\alpha b} & 0 & \frac{1}{\alpha b} & 0 & -\frac{1}{\alpha b} & 0 \\ -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha b} & 0 & -\frac{1}{\alpha b} & 0 & \frac{1}{\alpha b} & 0 & -\frac{1}{\alpha b} \\ 0 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \upsilon_1 \\ u_2 \\ \upsilon_2 \\ u_3 \\ \upsilon_3 \\ u_4 \\ \upsilon_4 \end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

Αντικαθιστώντας το διάνυσμα **a** από την (4.15) στην (4.11) και χρησιμοποιώντας τις αδιάστατες συντεταγμένες

$$\xi = \frac{x}{\alpha} \quad , \quad \eta = \frac{y}{b}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_i(x,y) &= \begin{Bmatrix} u_i(x,y) \\ \upsilon_i(x,y) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(\xi,\eta)\,\boldsymbol{\delta}^e = \\ &= \left[\mathbf{N}_1(\xi,\eta) \quad \mathbf{N}_2(\xi,\eta) \quad \mathbf{N}_3(\xi,\eta) \quad \mathbf{N}_4(\xi,\eta)\right]\boldsymbol{\delta}^e \end{aligned} \tag{4.16}$$

όπου

$$\mathbf{N}_i(\xi,\eta) = v_i(\xi,\eta)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad i = 1,2,3,4 \tag{4.17}$$

με

$$
\begin{aligned}
v_1(\xi,\eta) &= (1-\xi)(1-\eta) \\
v_2(\xi,\eta) &= \xi(1-\eta) \\
v_3(\xi,\eta) &= \xi\eta \\
v_4(\xi,\eta) &= \eta(1-\eta)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Παρατηρούμε ότι οι μετατοπίσεις u και υ μεταβάλλονται γραμμικά κατά μήκος των πλευρών του ορθογωνίου. Εφόσον λοιπόν υπάρχει συμβιβαστότητα των κομβικών μετατοπίσεων των κοινών κορυφών δύο στοιχείων σε επαφή, θα υπάρχει συμβιβαστότητα μετατοπίσεων και στην κοινή πλευρά τους. Επομένως το πεδίο των μετατοπίσεων είναι κινηματικά αποδεκτό και επιπλέον οι μετατοπίσεις είναι συνεχείς στις κοινές πλευρές των στοιχείων.

Το πεδίο των παραμορφώσεων ορίζεται ως εξής

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \upsilon \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_1\,\boldsymbol{\delta}^e \tag{4.19}
$$

όπου

$$
\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1-\eta}{\alpha} & 0 & \dfrac{1-\eta}{\alpha} & 0 & \dfrac{\eta}{\alpha} & 0 & -\dfrac{\eta}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1-\xi}{b} & 0 & -\dfrac{\xi}{b} & 0 & \dfrac{\xi}{b} & 0 & \dfrac{1-\xi}{b} \\ -\dfrac{1-\xi}{b} & -\dfrac{1-\eta}{\alpha} & -\dfrac{\xi}{b} & \dfrac{1-\eta}{\alpha} & \dfrac{\xi}{b} & \dfrac{\eta}{\alpha} & \dfrac{1-\xi}{b} & -\dfrac{\eta}{\alpha} \end{bmatrix} \tag{4.20}
$$

$$
\boldsymbol{\delta}^{e^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} u_1 & \upsilon_1 & u_2 & \upsilon_2 & u_3 & \upsilon_3 & u_4 & \upsilon_4 \end{bmatrix}
$$

Το πεδίο των τάσεων δίνεται από τη σχέση

$$
\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{D}\mathbf{B}_1\boldsymbol{\delta}^e \tag{4.21}
$$

όπου, **D** το μητρώο των ελαστικών σταθερών στην περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης. Άρα το **σ** δίνεται τελικά από τη σχέση

$$
\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1-v^2} \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} -\dfrac{1-\eta}{\alpha} & -v\dfrac{1-\xi}{b} & \dfrac{1-\eta}{\alpha} & -v\dfrac{\xi}{b} & \dfrac{\eta}{\alpha} & v\dfrac{\xi}{b} & -\dfrac{\eta}{\alpha} & v\dfrac{1-\xi}{b} \\ -v\dfrac{1-\eta}{\alpha} & -\dfrac{1-\xi}{b} & v\dfrac{1-\eta}{\alpha} & -\dfrac{\xi}{b} & v\dfrac{\eta}{\alpha} & \dfrac{\xi}{b} & -v\dfrac{\eta}{\alpha} & \dfrac{1-\xi}{b} \\ -\dfrac{(1-v)(1-\xi)}{2b} & -\dfrac{(1-v)(1-\eta)}{2\alpha} & -\dfrac{(1-v)\xi}{2b} & \dfrac{(1-v)(1-\eta)}{2\alpha} & \dfrac{(1-v)\xi}{2b} & \dfrac{(1-v)\eta}{2\alpha} & \dfrac{(1-v)(1-\xi)}{2b} & -\dfrac{(1-v)\eta}{2\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \upsilon_1 \\ u_2 \\ \upsilon_2 \\ u_3 \\ \upsilon_3 \end{Bmatrix} \tag{4.22}
$$

Επίσης, το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων δίνεται από τη σχέση (2.25).

$$
\overline{\mathbf{k}}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B}_1\, dV = t\int_0^a \int_0^b \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B}_1\, dxdy \tag{4.23}
$$

όπου, t το πάχος του στοιχείου.

Οπότε, τελικά έχουμε

$$\overline{\mathbf{k}}^e = \frac{Et}{12(1-v^2)}\begin{bmatrix} 2\left[\frac{2}{c}+c(1-v)\right] & & & & & & & \\ \frac{3}{2}(1+v) & 2\left[2c+\frac{1}{c}(1-v)\right] & & & & & & \\ \left[-\frac{4}{c}+(1-v)c\right] & \frac{3}{2}(1-3v) & 2\left[\frac{2}{c}+c(1-v)\right] & & & & & \\ -\frac{3}{2}(1-3v) & 2\left[c+\frac{1}{c}(1-v)\right] & -\frac{3}{2}(1-v) & 2\left[2c+\frac{1}{c}(1-v)\right] & & \textit{συμμετρικό} & & \\ \left[-\frac{2}{c}-(1-v)c\right] & -\frac{3}{2}(1+v) & 2\left[\frac{1}{c}-c(1-v)\right] & \frac{3}{2}(1-3v) & 2\left[\frac{2}{c}+c(1-v)\right] & & & \\ -\frac{3}{2}(1+v) & \left[-2c+\frac{1-v}{c}\right] & -\frac{3}{2}(1-3v) & \left[-4c+\frac{1-v}{c}\right] & \frac{3}{2}(1+v) & 2\left[2c+\frac{1}{c}(1-v)\right] & & \\ 2\left[\frac{1}{c}-c(1-v)\right] & \left[-\frac{3}{2}(1-3v)\right] & \left[-\frac{2}{c}-(1-v)c\right] & \frac{3}{2}(1+v) & \left[-\frac{4}{c}+(1-v)c\right] & \frac{3}{2}(1-3v) & 2\left[\frac{2}{c}+c(1-v)\right] & \\ \frac{3}{2}(1-3v) & \left[-4c+\frac{1-v}{c}\right] & \frac{3}{2}(1+v) & \left[-2c-\frac{1-v}{c}\right] & -\frac{3}{2}(1-3v) & 2\left[c+\frac{1}{c}(1-v)\right] & -\frac{3}{2}(1+v) & 2\left[2c+\frac{1}{c}(1-v)\right] \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου είναι κατά τα γνωστά

$$\mathbf{k}^e = \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{k}}^e \boldsymbol{\alpha}_1 \tag{4.25}$$

όπου, $\boldsymbol{\alpha}_1$ είναι το μητρώο στροφής που στην γενικότερη μορφή του, δηλαδή όταν τα δύο συστήματα συντεταγμένων είναι εντελώς τυχαία, δίνεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

όπου

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \ell_x & m_x & n_x \\ \ell_y & m_y & n_y \\ \ell_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

με (ℓ_x, m_x, n_x), (ℓ_y, m_y, n_y) (ℓ_z, m_z, n_z) τα διευθύνοντα συνημίτονα των αξόνων x,y,z ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων X,Y,Z. Στην περίπτωση που το επίπεδο (x,y) είναι παράλληλο προς το (X,Y) τότε

$$\mathbf{T}_1 = \begin{Bmatrix} \ell & m \\ -m & \ell \end{Bmatrix} \tag{4.28}$$

όπου

$$\begin{aligned} \ell &= \cos\varphi\alpha = \frac{X_2 - X_1}{\alpha} \\ m &= \sin\varphi = \frac{Y_2 - Y_1}{\alpha} \end{aligned} \tag{4.29}$$

με φ την γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση της πλευράς (12) του ορθογωνικού στοιχείου με τον X άξονα του καθολικού συστήματος.

Η διαφορά του ορθογωνικού στοιχείου από το τριγωνικό στοιχείο είναι ότι η ύπαρξη ενός πεδίου κινηματικά αποδεκτού στο ορθογωνικό δεν συνεπάγεται γενικά την ύπαρξη σ' αυτό ενός πεδίου *στατικά αποδεκτού*. Αντίστοιχα η ύπαρξη ενός στατικά αποδεκτού δεν συνεπάγεται γενικά την ύπαρξη ενός πεδίου κινηματικά αποδεκτού.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] TURNER M.J., CLOUGH R.W., MARTIN H.C. & TOPP L.J., *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures,* J.Aero.Sci., Vol.23, pp.805-823, (1965).

[2] CLOUGH R.W., *The Finite Element in Plane Stress Analysis,* Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation Pittsburg, Pa., (Sept.1960).

[3] ARGYRIS J.H., *Continua and Discontinua,* Proc.Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, (1965).

[4] BAZELEY G.P., GHEUNG Y.K., IRONS B.M. & ZIENKIEWICZ O.C., *Triangular Element in Bending-Conforming and Non-Conforming Solutions,* Proc.Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, (1965).

[5] FRIED I., *Some Aspects of the Natural Coordinate System in the Finite Element Method,* A.I.A.A. Jour., Vol.10, pp.1366-1368, (1969).

$$
\mathrm{k}^{e}=\frac{Et}{4\varDelta\left(1-v^{2}\right)}\begin{bmatrix}
y_{jm}^{2}+\frac{1-v}{2}x_{mj}^{2} & . & . & . & . & . \\
\frac{1+v}{2}x_{mj}y_{jm} & x_{mj}^{2}+\frac{1-v}{2}y_{jm}^{2} & . & . & . & . \\
y_{jm}y_{mi}+\frac{1-v}{2}x_{im}x_{mj} & vx_{mj}y_{mi}+\frac{1-v}{2}x_{im}y_{jm} & y_{mi}^{2}+\frac{1-v}{2}x_{im}^{2} & . & . & . \\
vx_{im}y_{jm}+\frac{1-v}{2}x_{mj}y_{mi} & x_{im}x_{mj}+\frac{1-v}{2}y_{jm}y_{mi} & \frac{1+v}{2}x_{im}y_{mi} & x_{im}^{2}+\frac{1-v}{2}y_{mi}^{2} & . & . \\
y_{ij}y_{jm}+\frac{1-v}{2}x_{ji}x_{mj} & vx_{mj}y_{ij}+\frac{1-v}{2}x_{ji}y_{jm} & y_{ij}y_{mi}+\frac{1-v}{2}x_{im}x_{ji} & vx_{im}y_{ij}+\frac{1-v}{2}x_{ji}y_{mi} & y_{ij}^{2}+\frac{1-v}{2}x_{ji}^{2} & . \\
vx_{ji}y_{jm}+\frac{1-v}{2}x_{mj}y_{ij} & x_{ji}x_{mj}+\frac{1-v}{2}y_{ij}y_{jm} & vx_{ji}y_{mi}+\frac{1-v}{2}x_{im}y_{ij} & x_{im}x_{ji}+\frac{1-v}{2}y_{ij}y_{mi} & \frac{1+v}{2}x_{ij}y_{ij} & x_{ji}^{2}+\frac{1-v}{2}y_{ij}^{2}
\end{bmatrix}
$$

(4.10)

$$\overline{\mathbf{k}}^{e}=\frac{Et}{12\left(1-\nu^{2}\right)}\begin{bmatrix}
2\left[\frac{2}{c}+c(1-\nu)\right] & \frac{3}{2}(1+\nu) & \left[-\frac{4}{c}+(1-\nu)c\right] & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & \left[-\frac{2}{c}-(1-\nu)c\right] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2\left[\frac{1}{c}-c(1-\nu)\right] & \frac{3}{2}(1-3\nu) \\
\frac{3}{2}(1+\nu) & 2\left[2c+\frac{1}{c}(1-\nu)\right] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2\left[c+\frac{1}{c}(1-\nu)\right] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & \left[-2c+\frac{1-\nu}{c}\right] & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -4c+\frac{1-\nu}{c} \\
\left[-\frac{4}{c}+(1-\nu)c\right] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2\left[\frac{2}{c}+c(1-\nu)\right] & -\frac{3}{2}(1-\nu) & 2\left[\frac{1}{c}-c(1-\nu)\right] & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & \left[-\frac{2}{c}-(1-\nu)c\right] & \frac{3}{2}(1+\nu) \\
-\frac{3}{2}(1-3\nu) & 2\left[c+\frac{1}{c}(1-\nu)\right] & -\frac{3}{2}(1-\nu) & 2\left[2c+\frac{1}{c}(1-\nu)\right] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & \left[-4c+\frac{1+\nu}{c}\right] & \frac{3}{2}(1+\nu) & \left[-2c-\frac{1-\nu}{c}\right] \\
\left[-\frac{2}{c}-(1-\nu)c\right] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2\left[\frac{1}{c}-c(1-\nu)\right] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2\left[\frac{2}{c}+c(1-\nu)\right] & \frac{3}{2}(1+\nu) & \left[-\frac{4}{c}+(1-\nu)c\right] & -\frac{3}{2}(1-3\nu) \\
-\frac{3}{2}(1+\nu) & \left[-2c+\frac{1-\nu}{c}\right] & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & \left[-4c+\frac{1-\nu}{c}\right] & \frac{3}{2}(1+\nu) & 2\left[2c+\frac{1}{c}(1-\nu)\right] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2\left[c+\frac{1}{c}(1-\nu)\right] \\
2\left[\frac{1}{c}-c(1-\nu)\right] & \left[-\frac{3}{2}(1-3\nu)\right] & \left[-\frac{2}{c}-(1-\nu)c\right] & \frac{3}{2}(1+\nu) & \left[-\frac{4}{c}+(1-\nu)c\right] & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2\left[\frac{2}{c}+c(1-\nu)\right] & -\frac{3}{2}(1+\nu) \\
\frac{3}{2}(1-3\nu) & \left[-4c+\frac{1-\nu}{c}\right] & \frac{3}{2}(1+\nu) & \left[-2c-\frac{1-\nu}{c}\right] & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & 2\left[c+\frac{1}{c}(1-\nu)\right] & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2\left[2c+\frac{1}{c}(1-\nu)\right]
\end{bmatrix} \qquad (4.29)$$

όπου, $c=\alpha/b$.