Κεφάλαιο 5

Τρισδιάστατη Εντατική Κατάσταση

5.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι βασικές έννοιες που για πρώτη φορά εισάγαμε στο Κεφάλαιο 2 μπορούν πολύ εύκολα να εφαρμοσθούν στην τρισδιάστατη εντατική κατάσταση. Όμως εάν αυτή η εφαρμογή γίνει εντελώς απλοϊκά, όπως θα δούμε στη συνέχεια παρουσιάζονται σοβαρές δυσκολίες που μειώνουν την πρακτική σημασία της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στην τρισδιάστατη ελαστικότητα. Οι δυσκολίες αυτές κυρίως μεταφράζονται στην υπερβολική (πολλές φορές) αύξηση του απαραίτητου για την επίλυση, χρόνου μηχανής ή σε ακραίες καταστάσεις σε εξαιρετικά επίπονες διαδικασίες για την εξοικονόμηση θέσεων στη μνήμη.

Για να αντιληφθούμε τη μορφή των προβλημάτων που παρουσιάζονται στην τρισδιάστατη ελαστικότητα υποθέτουμε ότι κάποιος τετραγωνικός χώρος χωρίζεται σε έναν αριθμό ίσων στοιχείων με $30\times30=900$ κόμβους. Ο αριθμός των εξισώσεων είναι περίπου ίσος με 1800 εφόσον έχουμε δύο μετατοπίσεις σε κάθε κόμβο. Το πλάτος της λωρίδας είναι περίπου 60. Επιπλέον, δεχόμαστε ότι η ακρίβεια ενός τριγωνικού στοιχείου στη διδιάστατη ανάλυση είναι συγκρίσιμη με την ακρίβεια ενός τετραεδρικού στην τρισδιάστατη ανάλυση. Επομένως, ένας ισοδύναμος τρισδιάστατος χώρος είναι αυτός ενός κύβου $30\times30\times30=27.000$ κόμβους. Ο αριθμός των εξισώσεων είναι περίπου 81.000 δεδομένου ότι κάθε κόμβος έχει τρεις δυνατές μετατοπίσεις. Επιπλέον το πλάτος της λωρίδας είναι περίπου ίσο με $30\times30\times3=2.700$.

Αυτού του είδους οι δυσκολίες μας επιβάλλουν να καταφεύγουμε πολλές φορές σε θεωρίες (όπως η θεωρία πλακών, κελυφών, σωμάτων εκ περιστροφής, κλπ) που είναι πολυπλοκότερες αλλά σε αντιστάθμισμα δίνουν πολύ μικρότερο αριθμό εξισώσεων.

Το απλούστερο από τα στοιχεία για την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στην τρισδιάστατη ελαστικότητα είναι το τετράεδρο [1-4] (δες Πίνακα 4.1.2, Παράρτημα 4). Με το απλό τετραεδρικό στοιχείο (δηλαδή το στοιχείο που έχει κόμβους μόνο στις κορυφές) θα ασχοληθούμε αποκλειστικά σ' αυτό το Κεφάλαιο.

5.2. ΑΠΛΑ ΤΕΤΡΑΕΔΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

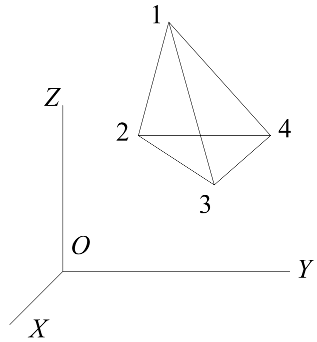
5.2.1. Συνάρτηση των Μετατοπίσεων

Στο Σχ.5.1 εμφανίζεται ένα τετραεδρικό στοιχείο e με κορυφές 1,2,3,4 που αναφέρονται στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων $OXYZ$.

Οι μετατοπίσεις κάθε σημείου ορίζονται από τις τρεις συνιστώσες u,v και w που είναι παράλληλες αντίστοιχα προς τους άξονες X,Y,Z.

Επομένως έχουμε

$$\mathbf{q}(x,y,z) = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} \tag{5.1}$$



Σχήμα 5.1

Οι μετατοπίσεις λοιπόν του κόμβου i (i=1,2,3,4) μπορούν να συμβολισθούν ως εξής

$$\mathbf{q}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad , \quad i = 1,2,3,4 \tag{5.2}$$

Οι 12 συνιστώσες των κομβικών μετατοπίσεων μπορούν να εμφανιστούν με τη μορφή ενός μητρώου διανύσματος ως εξής

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

Για να εκφράσουμε τις μετατοπίσεις στο εσωτερικό του τετραέδρου, εκλέγουμε όπως και για το τρίγωνο ένα πολυώνυμο και γνωρίζοντας ότι οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου είναι 12, η μετατόπιση θα δίνεται από τη σχέση

$$u(x,y,z) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \tag{5.4}$$

Οπότε, αν χρησιμοποιηθεί η μητρωϊκή γραφή, προκύπτει

$$\mathbf{q}_i(x,y,z)=\begin{Bmatrix} u_i(x,y,z) \\ \upsilon_i(x,y,z) \\ w_i(x,y,z) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.5\alpha)$$

ή

$$\mathbf{q}_i(x,y,z)=\mathbf{M}(x,y,z)\mathbf{a} \quad (5.5\beta)$$

Αντικαθιστώντας στην (5.5) όπου *x,y,z* τις συντεταγμένες των κόμβων έχουμε

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ \upsilon_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ \upsilon_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ \upsilon_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ \upsilon_4 \\ w_4 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.6\alpha)$$

ή

$$\mathbf{q}^e=\mathbf{A}\mathbf{a} \quad (5.6\beta)$$

Επιλύοντας ως προς **a** και αντικαθιστώντας το **a** στην (5.5) βρίσκεται

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x,y,z)=\begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ \upsilon(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} &= \mathbf{M}(x,y,z)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}^e=\mathbf{N}(x,y,z)\mathbf{q}^e \\ &=\left[\mathbf{N}_1(x,y,z) \quad \mathbf{N}_2(x,y,z) \quad \mathbf{N}_3(x,y,z) \quad \mathbf{N}_4(x,y,z)\right]\mathbf{q}^e \end{aligned} \quad (5.7)$$

με

$$\mathbf{N}_i(x,y,z)=\begin{bmatrix} v_i(x,y,z) & 0 & 0 \\ 0 & v_i(x,y,z) & 0 \\ 0 & 0 & v_i(x,y,z) \end{bmatrix}=v_i(x,y,z)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad i=1,2,3,4 \quad (5.8)$$

και

$$v_i(x,y,z) = \frac{s_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \quad , \quad i = 1,2,3,4 \tag{5.9}$$

όπου

$$s_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \tag{5.10}$$

$$b_1 = -\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \tag{5.11}$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix} \tag{5.12}$$

$$d_1 = -\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{5.13}$$

για τις υπόλοιπες σταθερές αρκεί η απλή κυκλική εναλλαγή.

Έστω, V ο όγκος του τετραέδρου (1,2,3,4) που δίνεται από τη σχέση

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \tag{5.14}$$

Η σχέση (5.9) (για i=1) γράφεται

$$v_1(x,y,z) = \frac{1}{6V}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \frac{V_1}{V} \tag{5.15}$$

όπου, V_1 είναι ο όγκος που ορίζεται από το σημείο P με συντεταγμένες x,y,z και τα σημεία 2,3,4 (Σχ.5.2).

Είναι φανερό ότι ισχύει

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1 \tag{5.16}$$

Όλα όσα είπαμε δείχνουν την πλήρη αναλογία του τετραεδρικού με το τριγωνικό στοιχείο. Είναι λοιπόν προφανές ότι μπορούν να εισαχθούν και έδω ανάλογες φυσικές συντεταγμένες που δεν θα ονομάζονται εμβαδικές και θα έχουν παρόμοιες ιδιότητες. Οι συντεταγμένες αυτές ονομάζονται «συντεταγμένες όγκου».

5.2.2. Παραμορφώσεις

Παρατηρείται ότι οι μετατοπίσεις μεταβάλλονται γραμμικά στις πλευρές του τετραέδρου. Δεδομένου λοιπόν ότι υπάρχει συμβιβαστότητα των κομβικών μετατοπίσεων των κοινών κορυφών δύο στοιχείων σε επαφή, υπάρχει συμβιβαστότητα μετατοπίσεων και στην κοινή πλευρά τους. Επομένως το πεδίο των μετατοπίσεων είναι κινηματικά αποδεκτό και ορίζει μια ***σύμμορφη προσέγγιση***. Το πεδίο των παραμορφώσεων είναι επίσης κινηματικά αποδεκτό και ορίζεται

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial z}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\aleph}\mathbf{N}(x,y,z)\mathbf{q}^e=\mathbf{B}\,\mathbf{q}^e=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4\end{bmatrix}\mathbf{q}^e \qquad (5.17)$$

όπου

$$\mathbf{B}_i=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial v_i}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\partial v_i}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial v_i}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v_i}{\partial y} & \dfrac{\partial v_i}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial v_i}{\partial z} & \dfrac{\partial v_i}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v_i}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial v_i}{\partial x}\end{bmatrix}=\frac{1}{6V}\begin{bmatrix}b_i & 0 & 0\\ 0 & c_i & 0\\ 0 & 0 & d_i\\ c_i & b_i & 0\\ 0 & d_i & c_i\\ d_i & 0 & b_i\end{bmatrix},\ i=1,2,3,4 \qquad (5.18)$$

και $\boldsymbol{\aleph}$ ένα μητρώο τελεστής.

5.2.3. Τάσεις

Γενικά το υλικό μπορεί να έχει υποβληθεί σε *αρχικές παραμορφώσεις* δηλαδή παραμορφώσεις που οφείλονται στην ανομοιόμορφη αλλαγή της θερμοκρασίας, στη συστολή ή διόγκωση, κλπ.

Εάν συμβολισθούν με $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ αυτές οι παραμορφώσεις τότε οι τάσεις δίνονται από τη σχέση

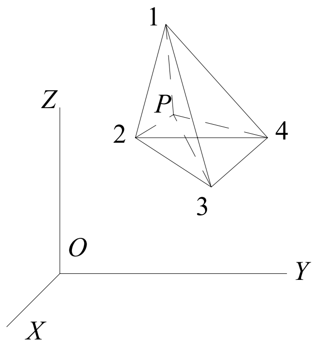
$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_0) \qquad (5.19)$$

όπου, **D** είναι πάλι το μητρώο ελαστικότητας, που στην περίπτωση ενός γραμμικού, ισότροπου και ελαστικού υλικού (Παράρτημα 3, σχέση (3.3.3)) είναι

$$\mathbf{D}=\frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \textit{συμμετρικό} & & \frac{1-2v}{2(1-v)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2v}{2(1-v)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

5.3. ΤΑ ΑΠΛΑ ΤΕΤΡΑΕΔΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΟΓΚΟΥ

Κάθε σημείο *P(x,y,z)* μέσα στο στοιχείο *e* ορίζει τέσσερα τετράεδρα που έχουν σαν όριο τις πλευρές του *e* και τα τέσσαρα τμήματα που ενώνουν το *P* με τις κορυφές 1,2,3,4. Έστω, V_i (i=1,2,3,4) ο όγκος του τετραέδρου που ορίζεται από το *P* και τις κορυφές εκτός τις i(i=1,2,3,4) (Σχ.5.2) και V^e ο όγκος του στοιχείου *e*.



Σχήμα 5.2

Τότε τα αδιάστατα μεγέθη:

$$p_i=\frac{V_i}{V^e} \quad , \quad i=1,2,3,4 \tag{5.21}$$

ορίζουν ένα νέο σύστημα συντεταγμένων που ονομάζονται ***συντεταγμένες όγκου.***

Παρατηρείται ότι τα p_i δεν είναι ανεξάρτητα αλλά επαληθεύουν την σχέση

$$p_1+p_2+p_3+p_4=1 \tag{5.22}$$

Επίσης, παρατηρείται ότι οι συντεταγμένες *όγκου* p_i(i=1,2,3,4) συμπίπτουν με τις συναρτήσεις σχήματος v_i(i=1,2,3,4) ενός τετραεδρικού στοιχείου *e,* δηλαδή

$$p_1=v_1 \quad p_2=v_2 \quad p_3=v_3 \quad p_4=v_4 \tag{5.23}$$

Εύκολα επαληθεύεται η παρακάτω σχέση που συνδέει τις καρτεσιανές με τις συντεταγμένες *όγκου*

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} \tag{5.24}$$

και από την αντιστροφή έχουμε

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & s_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & s_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & s_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & s_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.25}$$

όπου, s_1, b_1, c_1, d_1 και V δίνονται από τις σχέσεις (5.10)-(5.14) για τις υπόλοιπες αρκεί η απλή κυκλική εναλλαγή.

Η σχέση (5.25) μπορεί να γραφεί

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & p_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{Bmatrix} \tag{5.26}$$

ή

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(x,y,z)\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{Bmatrix} \tag{5.27}$$

Δηλαδή, με μορφή ανάλογη της (5.7).

Οι συντεταγμένες λοιπόν των κόμβων (κορυφών του τετραέδρου) δίνονται βάσει των συντεταγμένων *όγκου*

$$\begin{aligned} &\text{κόμβος 1:} && (1,0,0,0) \\ &\text{κόμβος 2:} && (0,1,0,0) \\ &\text{κόμβος 3:} && (0,0,1,0) \\ &\text{κόμβος 4:} && (0,0,0,1) \end{aligned}$$

Θεωρώντας σαν ανεξάρτητες μεταβλητές μόνο τις p_1, p_1, p_3 ισχύει η σχέση

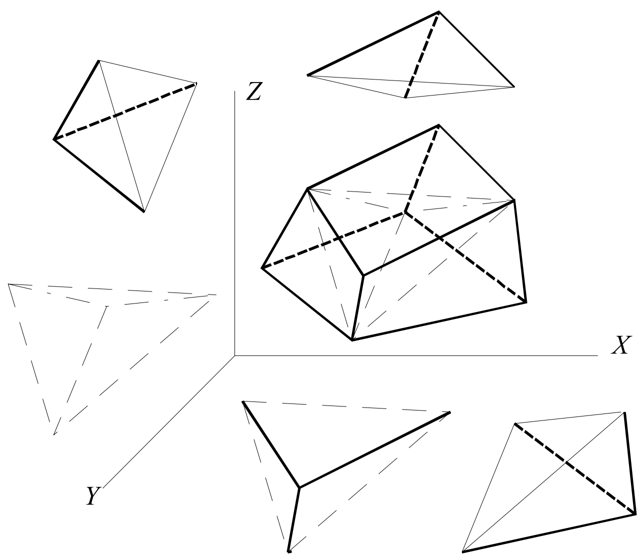
$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6D} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial p_3} \end{Bmatrix} \tag{5.28}$$

Επίσης, για την ολοκλήρωση ισχύει ο τύπος

$$\int_{V^e} p_1^{\alpha} p_2^{\beta} p_3^{\gamma} p_4^{\delta} \, dV = \frac{\alpha! \beta! \gamma! \delta!}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + 3)!} 6V \tag{5.29}$$

5.4. ΟΚΤΑΚΟΜΒΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Πολλές φορές είναι πολύ δύσκολο να προσομοιώσουμε ένα τριδιάστατο στερεό με τετραεδρικά στοιχεία χωρίς να έχουμε υπέρθεση των στοιχείων μεταξύ τους ή να έχουν ξεχαστεί τμήματα χωρίς να προσομοιωθούν. Ακόμη, η υποδιαίρεση του στερεού με ανεξάρτητα τετραεδρικά στοιχεία συχνά δημιουργεί προβλήματα διάκρισης των στοιχείων μεταξύ τους και κατά συνέπεια λάθος αρίθμησης των κόμβων. Εάν όμως τα τετράεδρα κατ' αρχάς συντεθούν ώστε να αποτελέσουν εξάεδρα, η διακεκριμενοποίηση των τρισδιάστατων στερεών καταλήγει να γίνεται πολύ πιο εύκολα με την χρήση ενός απλού προγράμματος Η/Υ. Η δημιουργία ενός στερεού εξάεδρου από πέντε τετράεδρα φαίνεται στο Σχ.5.3. Αυτό είχε σαν συνέπεια να δημιουργηθούν τα ***οκτακομβικά τρισδιάστατα*** (ή ***brick***) ***στοιχεία*** (Σχ.5.4) [2,5]. Καθένα από αυτά τα στοιχεία συντίθεται από 8 κόμβους των οποίων η αρίθμηση λαμβάνει χώρα ως προς ένα καθολικό σύστημα συντεταγμένων που έχει υιοθετηθεί. Άρα, οι κομβικοί αριθμοί πρέπει να δίνονται με την ίδια τάξη πχ. 1,2,…,8 κλπ (Σχ. 5.4), σε όλα τα στοιχεία του σώματος. Επίσης τα στοιχεία πρέπει να διευθύνονται έτσι ώστε η πλευρά 1-2-3-4 να είναι παράλληλη ως προς το *Y-Z* επίπεδο, η πλευρά 1-5-6-2 ως προς το *X-Z* επίπεδο κλπ, αλλά πάντα με τον ίδιο τρόπο για όλα τα στοιχεία.

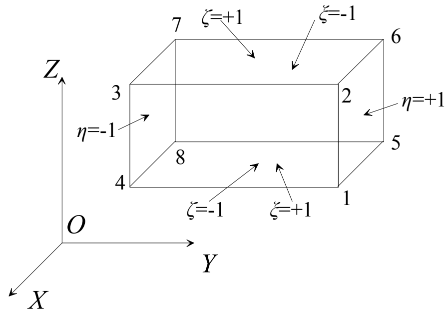


Σχήμα 5.3. Σύνθετα στοιχεία από οκτώ κόμβους και η υποδιαίρεσή του σε τετράεδρα.

Οι μετατοπίσεις κάθε σημείου ορίζονται από τρεις συνιστώσες *u,υ,* και *w* που είναι παράλληλες αντίστοιχα ως προς τους άξονες *X,Y,Z.* Για να εκφράσουμε τις μετατοπίσεις στο εσωτερικό του εξάεδρου, εκλέγουμε ένα πολυώνυμο και γνωρίζοντας ότι οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου είναι 3×8, η μετατόπιση *u* θα δίνεται από την σχέση

$$u(x,y,z) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 xy + a_6 yz + a_7 zx + a_8 xyz \tag{5.30}$$

Στη συνέχεια δουλεύοντας όπως στην §5.2.1 μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου. Παρατηρείται ότι το πεδίο των μετατοπίσεων είναι κινηματικά παραδεκτό και ορίζει μια *σύμμορφη* προσέγγιση.



Σχήμα 5.4. Πρισματικό ορθογώνιο στοιχείο.

Στην περίπτωση των πρισματικών ορθογωνικών στοιχείων διευκολύνει πολύ να εισαχθούν οι αδιάστατες τοπικές συντεταγμένες (ξ,η,ζ) με αρχή τους στο κέντρο βάρους (x_0,y_0,z_0) του στοιχείου (Σχ.5.4). Οι συντεταγμένες του κέντρου του στοιχείου ορίζονται ως εξής:

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_4) \quad y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \quad z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_5) \tag{5.31}$$

Οι αδιάστατες συντεταγμένες ορίζονται συναρτήσεις των καθολικών συντεταγμένων από τις σχέσεις

$$\xi = \frac{1}{c}(x - x_0) \quad , \quad \eta = \frac{1}{a}(y - y_0) \quad , \quad \zeta = \frac{1}{b}(z - z_0) \tag{5.32}$$

όπου *a,b,c* τα ημιμήκη των πλευρών του στοιχείου.

Από την (5.32) προκύπτει ότι $-1 \le \xi \le 1$, $-1 \le \eta \le 1$, $-1 \le \zeta \le 1$. Αντικαθιστώντας τις (5.32) στις (5.30) και ακολουθώντας την διαδικασία της §5.2.1 τελικά προκύπτουν

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \qquad & N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\
N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \qquad & N_6 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\
N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \qquad & N_7 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\
N_4 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \qquad & N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

οι συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου συναρτήσει των αδιάστατων συντεταγμένων.

Με την πρόοδο στους Η/Υ τα οκτακομβικά στοιχεία έχουν αναπτυχθεί πάρα πολύ. Ειδικά προγράμματα δημιουργίας κανάβων [6,7] βοηθούν ώστε τρισδιάστατες κατασκευές να προσομοιωθούν με επιτυχία με τη βοήθεια οκτακομβικών στοιχείων.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] GALAGHER R.H., PADLOG J. & BIJLAARD P.P., *Stress Analysis of Heated Complex Shapes*, A.R.S. Journal, pp.700-707, (1962).

[2] MELOSH R.J., *Structural Analysis of Solids*, Proc.Amer. Soc.Civ.Eng., S.T.4, pp. 205-223, (Aug.1963).

[3] ARGYRIS J.H., *Matrix Analysis of Three-Dimensional Elastic Media-Small and Large Displacements*, J.A.I.A.A., Vol.3, pp.45-51, (1965).

[4] ARGYRIS J.H., *Three-Dimensional Anisotropic and Inhomogeneous Media-Matrix Analysis for Small and Large Displacements*, Ingenieur Archiv., Vol.34, pp.33-55, (1965).

[5] CLOUGH R.W., *Comparison of Three-Dimensional Finite Elements,* Proc., Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, Vanderbilt University, Nashville, Tech, (published by ASCE), pp.1-26, (1969).

[6] PISSANETZKY S., *Kubik: An Automatic Three Dimensional Finite Element Mesh Generator*, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.17, pp.255-269, (1981).

[7] NGUYEN, V.P., *Automatic Mesh Generation with Tetrahedron Elements*, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.18, pp.273-289, (1982).