

## ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Μάθημα : ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΗΣ 2010

\*\*\*\*\* Διάρκεια Εξέτασης : 2.30 ώρες \*\*\*\*\*

### ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω το γενικό γραμμικό μοντέλο  $y = X\beta + \varepsilon$  με  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ανεξάρτητα μεταξύ τους.

- (i) Δείξτε ότι το άθροισμα τετραγώνων λόγω σφάλματος  $SSE = y'(I - H)y$ , όπου  $H = X(X'X)^{-1}X'$  ο πίνακας προβολής.
- (ii) Κάνοντας χρήση της ιδιότητας  $E(y'Ay) = \text{tr}(AV) + \mu'A\mu$ , όπου  $\mu = E(y)$ ,  $V = \text{Var}(y)$  και  $A = (I - H)$ , δείξτε ότι  $E(SSE) = (n - p)\sigma^2$ ,  $p = k + 1$ ,  $k$  ο αριθμός ανεξαρτήτων μεταβλητών στο μοντέλο.
- (iii) Με βάση την κατανομή της ε.ε.τ.  $\hat{\beta} \sim N_p(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$  και της  $\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi_{n-p}^2$  και δεδομένου ότι  $\hat{\beta}$  και  $\frac{SSE}{\sigma^2}$  είναι ανεξάρτητα, βρείτε ένα  $\gamma$ -διάστημα εμπιστοσύνης για μια παράμετρο  $\beta_j$  του μοντέλου. (Βαθμ.3.5)

### ΖΗΤΗΜΑ 2

Ένα τοξικό υλικό ρίχνεται σε μια λίμνη. Μηχανικοί ερευνούν τον τρόπο με τον οποίο το νερό μεταφέρει το τοξικό υλικό, μετρώντας το ποσοστό του υλικού που βρέθηκε σε οστρεοτροφεία τριών διαφορετικών περιοχών. Τα αποτελέσματα δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Περιοχή I	15	26	20	20	29	28	21	26	
Περιοχή II	19	15	10	26	11	20	13	15	18
Περιοχή III	22	26	24	26	15	17	24		

- (i) Μέσω ενός μοντέλου παλινδρόμησης  $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$ , όπου  $x_1 = \begin{cases} 1, & \text{αν περιοχή I} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$  και  $x_2 = \begin{cases} 1, & \text{αν περιοχή II} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$  να εξετάσετε αν υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των τριών περιοχών ως προς το ποσοστό του τοξικού υλικού ( $SSR = 225.63$ ).
- (ii) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας.

	$\hat{\beta}$	$se(\hat{\beta})$	t	p-τιμή
Σταθερά	22.000	1.805	12.19	0.000
x1	1.125	2.471	0.46	
x2	-5.667	2.407	-2.35	

Με βάση αυτά τα αποτελέσματα τι συμπεραίνετε για τις ανά δύο διαφορές των περιοχών; (Βαθμ.3.5)

### ΖΗΤΗΜΑ 3

- (i) Ερευνάται η σχέση μεταξύ  $y$  και  $x_1$ . Περιγράψτε πώς μέσω μιας δείκτριας μεταβλητής  $x_2$  στο μοντέλο  $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$  μπορούμε να ελέγξουμε αν στα δεδομένα χρειάζεται να προσαρμοστούν (Α) δύο διαφορετικές ευθείες ή (Β) δύο παράλληλες ευθείες ή (Γ) μια ευθεία, όπου  $x_3 = x_1 x_2$  η μεταβλητή που εκφράζει την αλληλεπίδραση μεταξύ των μεταβλητών  $x_1$  και  $x_2$ .
- (ii) Να γίνουν αυτοί οι έλεγχοι στην περίπτωση που  $y =$  διάρκεια ζωής (ώρες) δύο τύπων εργαλείων,  $x_1 =$  ταχύτητα του τόνου στον οποίο τα χρησιμοποιούμε και  $x_2 = 0$  (αν τύπος εργαλείου I) ενώ  $x_2 = 1$  (αν τύπος εργαλείου II), με βάση τα ακόλουθα αποτελέσματα (πλήθος παρατηρήσεων  $n = 20$ ).

(Βαθμ. 3.0)

### Regression Analysis: y versus x1, x2, x3

The regression equation is  
 $y = 33.1 - 0.0214 x_1 + 23.0 x_2 - 0.0109 x_3$

	$\hat{\beta}$	se( $\hat{\beta}$ )	t	p-τιμή
Σταθερά	33.070	4.664	7.09	0.000
x1	-0.021446	0.006124	-3.50	
x2	23.007	6.803	3.38	
x3	-0.010875	0.008887	-1.22	

S = 2.97589 R-Sq = 90.8% R-Sq(adj) = 89.1%

#### Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	p-τιμή
Regression	3	1405.62	468.54	52.91	
Residual Error	16	141.69	8.86		
Total	19	1547.32			

### Regression Analysis: y versus x1, x2

The regression equation is  
 $y = 36.9 - 0.0266 x_1 + 14.8 x_2$

	$\hat{\beta}$	se( $\hat{\beta}$ )	t	p-τιμή
Σταθερά	36.921	3.493	10.57	0.000
x1	-0.026609	0.004503	-5.91	
x2	14.843	1.351	10.99	

S = 3.01911 R-Sq = 90.0% R-Sq(adj) = 88.8%

#### Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	p-τιμή
Regression	2	1392.36	696.18	76.38	
Residual Error	17	154.96	9.12		
Total	19	1547.32			

### Regression Analysis: y versus x1

The regression equation is  
 $y = 43.5 - 0.0255 x_1$

	$\hat{\beta}$	se( $\hat{\beta}$ )	t	p-τιμή
Σταθερά	43.477	9.521	4.57	0.000
x1	-0.02545	0.01246	-2.04	

S = 8.35320 R-Sq = 18.8% R-Sq(adj) = 14.3%

#### Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	p-τιμή
Regression	1	291.35	291.35	4.18	
Residual Error	18	1255.97	69.78		
Total	19	1547.32			