

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

5ο ΕΞΑΜΗΝΟ - ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΣΑΒΒΑΤΟ 29 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2011, ΩΡΑ 08.30

(A-1) Να αποδειχθεί ότι αν $f(t, x)$ είναι μια συνάρτηση συνεχής και ορισμένη στο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\phi(t)$ είναι λύση της εξίσωσης $x' = f(t, x)$ σ' ένα διάστημα $J \subseteq \mathbb{R}$, τότε η $\phi(t)$ μπορεί να επεκταθεί σ' ένα μέγιστο ανοικτό διάστημα ύπαρξης $J^* \supset J$.

(A-2) Έστω το σύστημα $x' = F(x)$, όπου $F(0) = 0$ και $x = x(t)$, $t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι, υπάρχει μία συνάρτηση $V(x)$ συνεχώς διαφορίσιμη και ορισμένη σε μία γειτονιά S του $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: (i) $V(0) = 0$, (ii) η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη, και (iii) σε κάθε γειτονιά της αρχής, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x , για το οποίο $V(x) > 0$, τότε η μηδενική λύση $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, είναι ασταθής.

(A-3) Αποδείξτε ότι το σύστημα $x'(t) = A(t)x(t)$ όπου $A(t)$ είναι ένας $n \times n$ περιοδικός πίνακας με ελάχιστη περίοδο T , έχει τουλάχιστον μία μη τετριμμένη λύση $x = x(t)$ έτσι ώστε

$$x(t+T) = \mu x(t), t \in \mathbb{R}, \text{ όπου } \mu \text{ μια σταθερά.}$$

Πού οφείλεται η σπουδαιότητα του Θεωρήματος Floquet; Να αποδείξετε ότι οι σταθερές μ του Θεωρήματος Floquet είναι ανεξάρτητες της επιλογής του Θεμελιώδους πίνακα $\Phi(t)$.

Να γραφούν 2 από τα θέματα (A-1) - (A-3)

(B-1) (i) Να διερευνηθεί η ύπαρξη λύσεων σε κάποιο διάστημα γύρω από την αρχική τιμή για καθένα από τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

$$(i) y' = 4x^2(1+y^4), y(0) = 1, \quad (ii) y' = (2x-y)^{8/9}, y(2) = 4. \quad (iii) y' = (x-3y)^{7/6}, y(0) = 0.$$

Στη συνέχεια να εξετασθεί το μονοσήμαντο της λύσης, όταν έχετε διασφαλίσει ότι αυτή υπάρχει.

(ii) Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f(t)$, $t \geq 0$, που ικανοποιούν τη σχέση $|f(t)|^2 = \int_0^t f(s) ds$, $t \geq 0$.

(B-2) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία των συστημάτων:

$$(i) x' = 3x - y - 7, y' = -x + 3y + 5.$$

$$(ii) x' = y - x^3, y' = -x + y^3.$$

Στη συνέχεια να προσδιοριστεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας αυτών και να σχεδιαστεί το αντίστοιχο επίπεδο φάσεων, όπου αυτό είναι δυνατόν.

(B-3) (i) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικοί αριθμοί (ή πολλαπλασιαστές Floquet) του συστήματος:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \cos^2(2t) \end{pmatrix} x(t)$$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ - ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 10

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α !!!