Κβαντομηχανική ΙΙ: Κανονική Εξέταση
Φεβρουάριος 2015
Κλειστά βιβλία και κινητά τηλέφωνα
Γράψτε και τα τέσσερα ισοδύναμα θέματα.

Θέμα 1 (α) Αποδείξτε ότι για χρονικά ανεξάρτητο τελεστή $\hat{A}$ ισχύει η σχέση:

$$\frac{d < \hat{A} >}{dt} = \frac{1}{i\hbar} < [\hat{A}, \hat{H}] > .$$

(β)Θεωρήστε σωματίδιο που κινείται μέσα σε χώρο με δυναμική ενέργεια

$$V(x) = -kx, \ k > 0.$$

Ποιά είναι η χρονική εξάρτηση του $\Delta p(t) \equiv \sqrt{< \hat{p}^2 > - < \hat{p} >^2}$; Το $\hat{p}$ είναι ο τελεστής της ορμής. Υποθέστε ότι $< p(0) >= p_0, \ < p^2(0) >= Q_0^2, \ \Delta p(0) = \sqrt{Q_0^2 - p_0^2} \equiv S$.

Θέμα 2 Θεωρήστε σωματίδιο σε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή $V = \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$, το οποίο περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x, 0) = N \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \psi_n(x)$$

όπου τα $\psi_n(x)$ είναι οι ορθοκανονικές ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις του ταλαντωτή, με αντίστοιχες ενέργειες τις $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$.

(α) Βρείτε τον συντελεστή κανονικοποίησης N.

(β) Δώστε μια έκφραση για την κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$.

(γ) Βρείτε την αναμενόμενη τιμή της ενέργειας τη (μεταγενέστερη) χρονική στιγμή t.

Υπενθυμίσεις:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2, \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

Θέμα 3 Θεωρήστε σωματίδιο μάζας m που κινείται σε δισδιάστατο απειρόβαθο πηγάδι, που εκτείνεται στα διαστήματα $0 \leq x \leq L, \ 0 \leq y \leq L$.

(α) Ποιές είναι οι ιδιοτιμές της ενέργειας και οι αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις; Ποιός είναι ο εκφυλισμός; (Οι μονοδιάστατες κυματοσυναρτήσεις $\psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$ με ενέργειες $E_n^{(0)} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$ θεωρούνται γνωστές.)

Έστω τώρα ότι, εκτός από το αρχικό δυναμικό, επιβάλλεται στο σωματίδιο μια διαταραχή

$$V = \frac{\epsilon C}{L^2} xy,$$

όπου το C είναι αδιάστατη σταθερά και το ϵ είναι μικρή σταθερά με μονάδες ενέργειας.

(β) Υπολογίστε τη διόρθωση πρώτης τάξης, $E_0^{(1)}$, στην ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης.

(γ) Βρείτε τις διορθώσεις πρώτης τάξης στην ιδιοτιμή της ενέργειας της πρώτης διεγερμένης στάθμης και τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις σε μηδενική τάξη.

$$\int_0^L z\sin^2\frac{\pi z}{L}dz = \frac{L^2}{4},\ \int_0^L z\sin^2\frac{2\pi z}{L}dz = \frac{L^2}{4},\ \int_0^L z\sin\frac{\pi z}{L}\sin\frac{2\pi z}{L}dz = -\frac{9L^2}{4\pi^2}.$$

Θέμα 4 Θεωρήστε σωματίδιο μάζας m που κινείται στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R. Η κίνησή του περιγράφεται από τη Χαμιλτονιανή:

$$\hat{H} = \frac{\vec{L}^2}{2mR^2}.$$

Ποιές είναι οι ιδιοτιμές της ενέργειας;

(α) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(t=0) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left[\cos\theta - i\sin\theta\sin\phi\right].$$

Βρείτε τον κβαντικό αριθμό l που αντιστοιχεί σ' αυτήν την κυματοσυνάρτηση.

(β) Ποιά είναι η κυματοσυνάρτηση την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$;

(γ) Ποιά είναι η πιθανότητα να μετρηθεί μαγνητικός κβαντικός αριθμός ίσος με $-1,\ 0,\ +1$; Αλλάζει με το χρόνο; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

$$Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta,\ Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\ Y_{1,+1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{+i\phi}\sin\theta.$$

$$\vec{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 x dx = \pi,\ \int_0^{\pi}\sin^3 x dx = \frac{4}{3},\ \int_0^{\pi}\sin^2 x\cos x dx = \frac{2}{3}$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!