ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Προβλήματα και Λύσεις

Γιώργος Α. Βουτσαδάκης
Λευτέρης Μ. Κυρούσης
Χρήστος Ι. Μπούρας
Παύλος Γ. Σπυράκης

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Προβλήματα και Λύσεις

- Γιώργος Α. Βουτσαδάκης
  Διπλωματούχος Μηχανικός Η/Υ & Πληροφορικής
- Λευτέρης Μ. Κυρούσης
  Καθηγητής Τμήματος Μηχ/κών Η/Υ & Πληροφορικής
  Πανεπιστήμιο Πάτρας
- Χρήστος Ι. Μπούρας
  Δρ. Μηχ/κός Η/Υ & Πληροφορικής
- Παύλος Γ. Σπυράκης
  Καθηγητής Τμήματος Μηχ/κών Η/Υ & Πληροφορικής
  Πανεπιστήμιο Πάτρας

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή από έναν τουλάχιστο από τους συγγραφείς.

Το βιβλίο αυτό στοιχειοθετήθηκε εξ' ολοκλήρου από τους συγγραφείς χρησιμοποιώντας το GrLaTeX σε SUN SPARCstation 10. Τα σχήματα έγιναν με το MacDraw II σε Macintosh II.

Εκδόσεις GUTENBERG, Διδότου 55, 10681 Αθήνα, Τηλ. 3643511 – 5

Στο Γιάννη, την Αντωνία και τη Μίνα

Γ. Β.

Στη Φωτεινή, τη Δήμητρα, τη Χριστίνα και τη Φωτεινή

Λ. Κ.

Στους γονείς μου, Γιάννη και Χριστίνα

Χ. Μ.

Στην Ασημίνα, την Ολγα και την Γεωργία

Π. Σ.

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό δεν αποτελεί μόνο τη συνέχεια προηγούμενου βιβλίου μας, με τίτλο "*ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: Τα Μαθηματικά της Επιστήμης των Υπολογιστών*", αλλά είναι και από μόνο του ένα αυτόνομο βιβλίο. Περιέχει ένα μεγάλο πλήθος από λυμένες ασκήσεις. Πολλές από αυτές διδάχθηκαν στα φροντιστήρια του μαθήματος Διακριτά Μαθηματικά Ι, στο τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου της Πάτρας και άλλες από αυτές εξετάσθηκαν σαν θέματα στις εξετάσεις.

Πιστεύουμε πως η προσπάθεια που γίνεται με την έκδοση αυτού του βιβλίου, θα καλύψει το γνωστικό αντικείμενο της περιοχής. Κριτές όμως, θα είναι οι αναγνώστες. Σε αυτούς το παραδίδουμε με την ευχή να τους βοηθήσει στην προσπάθεια τους.

Θέλουμε να ευχαριστήσουμε όλους τους φοιτητές του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους και τα σχόλια που έκαναν στα χειρόγραφα κείμενα, αυτής της προσπάθειας μας. Ακόμα ευχαριστούμε τον εκδοτικό οίκο GUTENBERG για την έκδοση αυτού του βιβλίου.

Τελειώνοντας θέλουμε να ευχαριστήσουμε μια σειρά από ανθρώπους που βοήθησαν, ώστε το βιβλίο να πάρει την τελική του μορφή. Χωρίς τον Βαγγέλη Καπούλα και τον Αντώνη Τατάκη θα ήταν αρκετά δύσκολο, το βιβλίο να έχει αυτή την εικόνα. Τους ευχαριστούμε θερμά.

ΠΑΤΡΑ, Γενάρης 1994

Γιώργος Α. Βουτσαδάκης
Λευτέρης Μ. Κυρούσης
Χρήστος Ι. Μπούρας
Παύλος Γ. Σπυράκης

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Στοιχειώδης Συνδυαστική

I don't know why she's leaving
Nor where she's got to go
I guess she's got some reasons
But I just don't want to know
'Cause for twenty four years
I've been living next door to Alice ...

Twenty four years just waiting for a chance
To tell her how I feel
And maybe get a second glance
Now I'll never get used
To not living next door to Alice ...

Living Next Door to Alice
SMOKIE

Ασκηση 1.1 *Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 3 αριθμοί από τους αριθμούς 1 εώς 300, έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι διαιρετό διά 3 ; (Σημειώνεται ότι δεν παίζει ρόλο η σειρά των αριθμών)*

Εστω $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 300\}$. Χωρίζουμε το Ω σε τρία υποσύνολα A,B,Γ τέτοια ώστε $A \cup B \cup \Gamma = \Omega$ και $A \cap B = \emptyset, B \cap \Gamma = \emptyset$ και $A \cap \Gamma = \emptyset$, ως εξής: Το A περιέχει όλους τους ακέραιους $x \in \Omega : x \bmod 3 = 0$, δηλαδή $A = \{3, 6, 9, \ldots, 300\}$. Το B περιέχει όλους τους $y \in \Omega : y \bmod 3 = 1$, δηλαδή $B = \{1, 4, 7, \ldots, 298\}$, και το Γ περιέχει όλους τους $z \in \Omega : z \bmod 3 = 2$, δηλαδή $\Gamma = \{2, 5, 8, \ldots, 299\}$. Είναι προφανές ότι $|A| = |B| = |\Gamma| = 100$.

Για να είναι το άθροισμα τριών αριθμών του Ω διαιρετό διά 3 πρέπει είτε και οι 3 αριθμοί να ανήκουν στο A, είτε και οι 3 στο B, είτε και οι 3 στο Γ, είτε τέλος να ανήκει ένας αριθμός σε καθένα από τα 3 αυτά υποσύνολα του Ω. Τότε οι δυνατοί τρόποι επιλογής είναι,

$$\binom{100}{3} + \binom{100}{3} + \binom{100}{3} + \binom{100}{1}\binom{100}{1}\binom{100}{1} = 3\binom{100}{3} + 100^3 = 1485100$$

Ασκηση 1.2 *Πόσοι από τους ακέραιους αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ του 1 και του 10000000000 περιέχουν το ψηφίο 1 και πόσοι δεν το περιέχουν;*

Μεταξύ των αριθμών 0 και 9999999999 υπάρχουν 9^{10} ακέραιοι που δεν περιέχουν το ψηφίο 1. Αυτό συμβαίνει γιατί το πλήθος των αριθμών αυτών ισούται με τον αριθμό των διατάξεων 9 στοιχείων (των 0,2,3,...,9) σε 10 θέσεις με επανάληψη. Συνεπώς μεταξύ του 1 και του 10000000000 υπάρχουν $9^{10} - 1$ ακέραιοι που δεν περιέχουν το ψηφίο 1 και επομένως $10^{10} - 9^{10} + 1$ ακέραιοι που περιέχουν το ψηφίο 1.

Ασκηση 1.3 *Να βρεθεί ο αριθμός των τετραψήφιων αριθμών του δεκαδικού συστήματος, που δεν έχουν δύο ίδια ψηφία.*

Για να είναι τετραψήφιος ο αριθμός πρέπει στην πρώτη θέση του να επιλέξουμε ένα από τα ψηφία 1 εώς 9. Επειδή δεν πρέπει να έχει δύο ίδια ψηφία, η επιλογή του ψηφίου για τη δεύτερη θέση μπορεί να γίνει με 9 τρόπους, δηλαδή να επιλέξουμε είτε το 0 είτε κάποιο από τα 8 ψηφία από 1 εώς 9, που δεν βάλαμε στην πρώτη θέση. Κατ' αναλογία η τρίτη θέση δύναται να πληρωθεί με 8 τρόπους και η τελευταία θέση με 7 τρόπους. Αρα το πλήθος των αριθμών αυτών είναι συνολικά,

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

Ασκηση 1.4 *Με πόσους τρόπους μπορούν να βαφούν 12 γραφεία έτσι ώστε 3 απ' αυτά να είναι κόκκινα, 2 ροζ, 2 λευκά και τα υπόλοιπα πράσινα;*

Για να υπολογίσουμε τους ζητούμενους τρόπους βαφής των γραφείων σκεφτόμαστε ως εξής: Παίρνουμε μία τυχούσα διάταξη των γραφείων. Θεωρούμε ότι σε κάθε τέτοια διάταξη (μετάθεση) τα 3 πρώτα σε σειρά γραφεία θα τα βάψουμε κόκκινα, τα επόμενα 2 ροζ, τα επόμενα 2 λευκά και τα υπόλοιπα 5 πράσινα. Αφού τα 3 πρώτα γραφεία θα είναι κόκκινα δεν μας ενδιαφέρει η σειρά τους (μέσα στην τριάδα) και ομοίως δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των γραφείων μέσα στο ροζ και λευκό ζευγάρι, όπως και μέσα στην πράσινη πεντάδα. Ετσι, λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο αριθμός των διατάξεων r αντικειμένων είναι r!, έχουμε σαν απάντηση,

$$\frac{12!}{3!2!2!5!} = 166320$$

Ασκηση 1.5 *Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να καθήσουν 5 φοιτητές σε μία σειρά από 12 έδρανα;*

1ος τρόπος:

Το πρόβλημα ισοδυναμεί με το πρόβλημα της διάταξης 12 αντικειμένων τα οποία ανήκουν σε έξι διαφορετικά είδη: τα πέντε είδη είναι τα πέντε έδρανα με τους φοιτητές και το έκτο, στο οποίο ανήκουν επτά αντικείμενα, είναι τα άδεια έδρανα. Συνεπώς ο ζητούμενος αριθμός τρόπων είναι $\frac{12!}{7!} = 95040$.

2ος τρόπος:

Διατάσσουμε τους πέντε φοιτητές σε μία σειρά κατά 5! τρόπους και στη συνέχεια μοιράζουμε τα επτά άδεια έδρανα αυθαίρετα είτε μεταξύ των φοιτητών είτε στις δύο άκρες της σειράς. Ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτή η μοιρασιά είναι ίσος με τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης επτά όμοιων σφαιρών σε έξι διαφορετικά κουτιά και είναι ίσος με $\binom{6+7-1}{7}$. Συνεπώς ο ζητούμενος αριθμός τρόπων είναι, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, $5! \cdot \binom{12}{7} = \frac{12!}{7!}$.

Ασκηση 1.6 *Να βρεθεί ο αριθμός των διαιρετών του 180.*

Κάνουμε ανάλυση του 180 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων,

$$180 = 2 \cdot 90 = 2^2 \cdot 45 = 2^2 \cdot 3 \cdot 15 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Οι δυνατοί διαιρέτες του 180 είναι, σύμφωνα με τη Θεωρία Αριθμών, εκείνοι οι αριθμοί, οι οποίοι έχουν τη μορφή $2^k 3^m 5^n$ με $0 \leq k \leq 2, 0 \leq m \leq 2$ και $0 \leq n \leq 1$. Συνεπώς έχουμε 3 τρόπους επιλογής του παράγοντα 2, 3 τρόπους επιλογής του παράγοντα 3 και 2 τρόπους επιλογής του παράγοντα 5. Αρα από τον κανόνα του γινομένου ο αριθμός των δυνατών διαιρετών του 180 είναι,

$$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

Ασκηση 1.7 *Πόσους διαιρέτες έχει ο αριθμός 1400 ;*

Κάνουμε ανάλυση του 1400 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

$$1400 = 2 \cdot 700 = 2^2 \cdot 350 = 2^3 \cdot 175 = 2^3 \cdot 5 \cdot 35 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Οι δυνατοί διαιρέτες του 1400 είναι, σύμφωνα με τη Θεωρία Αριθμών, εκείνοι οι αριθμοί, οι οποίοι γράφονται με τη μορφή $x = 2^\varkappa 5^\lambda 7^\mu$ με $0 \leq \varkappa \leq 3, 0 \leq \lambda \leq 2$ και $0 \leq \mu \leq 1$. Δηλαδή υπάρχουν 4 τρόποι επιλογής του παράγοντα 2, 3 τρόποι επιλογής του παράγοντα 5 και 2 τρόποι επιλογής του παράγοντα 7. Ετσι όλοι οι δυνατοί διαιρέτες θα είναι σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου,

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Ασκηση 1.8 *Ενα ντόμινο είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε σε καθένα από τα δύο τετράγωνα κάθε κομματιού να υπάρχουν μία, δύο, τρείς, τέσσερις, πέντε ή έξι τελείες ή να είναι κενό. Πόσα διαφορετικά κομμάτια μπορεί να περιέχει αυτό το ντόμινο;*

Ο αριθμός των κομματιών στο ντόμινο ισούται με τον αριθμό των τρόπων επιλογής δύο αντικειμένων με επαναλήψεις από τα επτά διαφορετικά αντικείμενα "ένα", "δύο", "τρία", "τέσσερα", "πέντε", "έξι" και "κενό". Ο αριθμός αυτός είναι ίσος με,

$$\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = 28$$

Ασκηση 1.9 *Πόσες ζαριές υπάρχουν στο τάβλι; Πόσες ζαριές θα υπήρχαν σε ένα υποθετικό τάβλι με 3 ζάρια;*

Ο ζητούμενος αριθμός των ζαριών είναι ο αριθμός των συνδυασμών 2 αντικειμένων από 6 διαφορετικά αντικείμενα με επανάληψη. Αυτός είναι,

$$\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

Ανάλογα ο αριθμός των ζαριών στο υποθετικό τάβλι με τα 3 ζάρια είναι,

$$\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

Ασκηση 1.10 *Ποιός ο αριθμός των διαφορετικών μονοπατιών που μπορεί να ακολουθήσει ένας πύργος για να κινηθεί από το νοτιοδυτικότερο στο βορειοανατολικότερο σημείο μιάς σκακιέρας όταν επιτρέπουμε να κινείται μόνον προς την ανατολή και προς το βορά; Πόσα απ' αυτά τα μονοπάτια αποτελούνται από τέσσερις προς την ανατολή και τρείς προς το βορά κινήσεις;*

Ας συμβολίσουμε με 0 μία κίνηση του πύργου προς την ανατολή και με 1 μία κίνηση του πύργου προς το βορά. Τότε ο αριθμός των ζητούμενων μονοπατιών είναι ίσος με τον αριθμόν των τρόπων τοποθέτησης επτά μηδενικών και επτά μονάδων σε σειρά (εφόσον ο πύργος θα κινηθεί αναγκαστικά επτά τετράγωνα προς την ανατολή και επτά τετράγωνα προς το βορά για να φτάσει από το σημείο εκκίνησης στο σημείο τερματισμού). Ο αριθμός αυτός είναι ίσος με $\frac{14!}{7!7!} = 3432$.

Για το δεύτερο ερώτημα της άσκησης σκεφτόμαστε ως εξής: Ο αριθμός των τρόπων να σχηματίσουμε ένα μονοπάτι με τέσσερις κινήσεις προς την ανατολή είναι ο ίδιος με τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης επτά όμοιων σφαιρών σε τέσσερα διακεκριμένα κουτιά έτσι ώστε κανένα κουτί να μην μείνει άδειο. Τοποθετώντας λοιπόν κατ' αρχάς από μία σφαίρα σε κάθε κουτί κατά έναν τρόπο, μοιράζουμε τις υπόλοιπες τρείς σφαίρες στα τέσσερα κουτιά κατά $\binom{4+3-1}{3} = 20$ τρόπους. Ομοια ο αριθμός των τρόπων να σχηματίσουμε ένα μονοπάτι με τρείς κινήσεις προς το βορά είναι $\binom{3+4-1}{4} = 15$. Αρα, ο συνολικός αριθμός των μονοπατιών, που αποτελούνται από τέσσερις προς την ανατολή και τρείς προς το βορά κινήσεις, είναι, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, $20 \cdot 15 = 300$.

Ασκηση 1.11 *Από ένα μεγάλο αριθμό από δραχμές, δίφραγκα, τάληρα και δεκάρικα, κατά πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 6 νομίσματα ;*

Ο ζητούμενος αριθμός τρόπων επιλογής 6 νομισμάτων από ένα μεγάλο αριθμό από δραχμές, δίφραγκα, τάληρα και δεκάρικα είναι ο αριθμός των συνδυασμών $r = 6$ αντικειμένων από $n = 4$ αντικείμενα με επανάληψη (δεδομένου ότι το πλήθος των διαθέσιμων νομισμάτων είναι μεγάλο). Αυτός ο αριθμός είναι,

$$\binom{r+n-1}{r} = \frac{(4+6-1)!}{6!(4-1)!} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} = 84$$

Ασκηση 1.12 *Να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί $\frac{(3n)!}{2^n 3^n}$ και $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ είναι ακέραιοι.*

Εστω ότι έχουμε 3n το πλήθος στοιχεία χωρισμένα σε n ομάδες, καθεμία από τις οποίες περιέχει 3 όμοια μεταξύ τους στοιχεία. Τότε ο αριθμός των μεταθέσεων των 3n αυτών στοιχείων είναι,

$$\frac{(3n)!}{3!3!\ldots 3!} = \frac{(3n)!}{(3!)^n} = \frac{(3n)!}{(2 \cdot 3)^n} = \frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n},$$

που είναι ακέραιος, αφού αναπαριστά αριθμό μεταθέσεων.

Θα δείξουμε τώρα ότι και ο αριθμός $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ είναι ακέραιος. Εστω ότι έχουμε n^2 αντικείμενα χωρισμένα σε n ομάδες, με n αντικείμενα όμοια μεταξύ τους στην κάθε ομάδα. Τότε ο αριθμός των μεταθέσεων των n^2 αυτών αντικειμένων είναι

$$\frac{(n^2)!}{n!n!\ldots n!} = \frac{(n^2)!}{(n!)^n}$$

Ομως, ο αριθμός αυτός είναι διαιρετός διά $n!$ γιατί για κάθε μία από τις μεταθέσεις των n διαφορετικών στοιχείων (ένα από κάθε ομάδα) έχουμε ίσο αριθμό μεταθέσεων των n^2 στοιχείων. Αρα και ο αριθμός $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ είναι οπωσδήποτε ακέραιος.

Ασκηση 1.13 *Να υπολογιστεί ο σταθερός όρος στο ανάπτυγμα του $(x^2 + \frac{1}{x})^{12}$.*

Εχουμε από τον τύπο του διωνυμικού αναπτύγματος ότι,

$$(x^2 + \frac{1}{x})^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^{2k} (\frac{1}{x})^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^{3k-12}$$

Για τον σταθερό όρο πρέπει να είναι $3k - 12 = 0 \Longrightarrow k = 4$. Επομένως ο σταθερός όρος είναι ο,

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{8!4!} = 495$$

Ασκηση 1.14 *Να υπολογιστεί ο συντελεστής του x^{23} στο $(1 + x^5 + x^9)^{100}$.*

1ος τρόπος:

Το $x^5x^9x^9 = x^{23}$ είναι ο μόνος τρόπος για να πάρουμε το x^{23} από το ανάπτυγμα του $(1 + x^5 + x^9)^{100}$. Ετσι θα έχουμε $\binom{100}{2}$ τρόπους επιλογής των παραγόντων x^9 και μετά $\binom{98}{1}$ τρόπους επιλογής του παράγοντα x^5, οπότε ο συντελεστής του x^{23} είναι,

$$\binom{100}{2}\binom{98}{1} = \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 98 = 485100$$

2ος τρόπος:

Είναι,

$$(1 + x^5 + x^9)^{100} = \sum_{i=1}^{100} \binom{100}{i}(1 + x^5)^i x^{9(100-i)}$$

Για να πάρουμε το x^{23} πρέπει να έχουμε $x^{23} = x^9x^9x^5$, δηλαδή το x^{23} θα δίνεται από το άθροισμα στο δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης για $100 - i = 2 \Longrightarrow i = 98$. Ψάχνουμε άρα τον συντελεστή του x^{23} στο $\binom{100}{98}(1 + x^5)^{98}(x^9)^2$. Αυτός είναι ο $\binom{100}{98} \cdot 98$, όπου το 98 είναι οι τρόποι επιλογής του x^5 από τον $(1 + x^5)^{98}$. Ετσι,

$$\binom{100}{98} \cdot 98 = \frac{99 \cdot 100}{2} \cdot 98 = 485100$$

Ασκηση 1.15 *Κατά πόσους τρόπους μπορούν r όμοιες μπάλλες να τοποθετηθούν σε n διακεκριμμένα κουτιά, έτσι ώστε κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον 9 μπάλλες ;*

Αφού κάθε κουτί πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 9 μπάλλες, εξυπακούεται ότι $r \geq 9n$. Για να βρούμε τους ζητούμενους τρόπους τοποθέτησης παίρνουμε 9n από τις r μπάλλες και τοποθετούμε από 9 σε κάθε κουτί. Τις υπόλοιπες r-9n μπάλλες μπορούμε να τις τοποθετήσουμε στα n κουτιά με όλους τους δυνατούς τρόπους. Ετσι ο συνολικός αριθμός τρόπων τοποθέτησης, που πληρούν τις απαιτήσεις του προβλήματος, είναι,

$$\binom{r-9n+n-1}{r-9n} = \binom{r-8n-1}{r-9n}$$

Ασκηση 1.16 *Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε 2t+1 μη διακεκριμμένες μπάλλες σε 3 διακεκριμμένα κουτιά, έτσι ώστε κάθε δύο κουτιά μαζί να περιέχουν περισσότερες μπάλλες απ' ότι το άλλο ένα.*

Εάν δεν λάβουμε υπόψιν τον περιορισμό κάθε δύο κουτιά μαζί να περιέχουν περισσότερες μπάλλες απ' ότι το άλλο ένα, υπάρχουν $\binom{2t+1+3-1}{2} = \binom{2t+3}{2}$ τρόποι να τοποθετήσουμε τις 2t+1 μπάλλες στα 3 κουτιά. Ομως ανάμεσα σ' αυτές τις τοποθετήσεις υπάρχουν ορισμένες, στις οποίες ένα κουτί περιέχει t+1 ή παραπάνω μπάλλες. Για κάθε κουτί υπάρχουν $\binom{t+3-1}{2} = \binom{t+2}{2}$ τρόποι τοποθέτησης, ώστε αυτό να περιέχει τουλάχιστον t+1 μπάλλες. Οι τρόποι αυτοί τοποθέτησης βρίσκονται αν βάλουμε στο συγκεκριμμένο κουτί t+1 μπάλλες και μοιράσουμε τις υπόλοιπες t μπάλλες στα 3 κουτιά κατά αυθαίρετο τρόπο.

Αρα ο συνολικός αριθμός τρόπων να μοιράσουμε τις μπάλλες, έτσι ώστε κανένα κουτί μόνο του να μην περιέχει t+1 ή περισσότερες μπάλλες, είναι,

$$\binom{2t+3}{2} - 3\binom{t+2}{2} = \frac{(2t+3)(2t+2)}{2} - 3\frac{(t+2)(t+1)}{2} =$$

$$= (t+1)(2t+3-\frac{3t}{2}-3) = \frac{t(t+1)}{2}$$

Ασκηση 1.17 *Ενα μήνυμα αποτελούμενο από 12 διαφορετικά σύμβολα θα μεταδοθεί μέσα από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Επιπλέον των 12 συμβόλων του μηνύματος, ο αποστολέας θα στείλει και ένα σύνολο 45 συνολικά κενών χαρακτήρων μεταξύ των συμβόλων, με τουλάχιστον τρία κενά μεταξύ κάθε δύο γειτονικών συμβόλων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ο αποστολέας να στείλει το μήνυμα;*

Υπάρχουν 12! διαφορετικοί τρόποι να διαταχθούν τα 12 διαφορετικά σύμβολα του μηνύματος, που πρόκειται να μεταδοθεί. Για κάθε μία απ' αυτές τις διατάξεις των συμβόλων υπάρχουν 11 θέσεις μεταξύ των 12 συμβόλων. Αφού πρέπει να τοποθετηθούν τουλάχιστον 3 κενά μεταξύ

δύο διαδοχικών συμβόλων του μηνύματος, χρησιμοποιούμε 33 από τα 45 κενά, που πρόκειται να αποσταλούν γι αυτές τις 11 θέσεις και απομένει να τοποθετήσουμε τα υπόλοιπα 12 κενά. Η τοποθέτηση αυτή ισοδυναμεί με την τοποθέτηση 12 όμοιων σφαιρών (των κενών χαρακτήρων) σε 11 διαφορετικά κουτιά(τις θέσεις μεταξύ των διαφορετικών χαρακτήρων του μηνύματος). Υπάρχουν συνεπώς κατά τα γνωστά $\binom{12+11-1}{12} = 646646$ τρόποι να τοποθετήσουμε τα 12 αυτά επιπλέον κενά.

Συνεπώς ο συνολικός αριθμός των τρόπων να αποσταλεί το συγκεκριμένο μήνυμα είναι, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, $12! \cdot \binom{22}{12} = 3.097 \times 10^{14}$.

Ασκηση 1.18 *Να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες:*

1.
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

3.
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

4.
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$$

1. Θεωρούμε το διωνυμικό ανάπτυγμα
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$
και θέτουμε όπου x την τιμή 1. Ετσι θα έχουμε
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

2. Εργαζόμαστε όπως στο 1, αλλά εδώ αντί για την τιμή 1 στον τύπο του διωνυμικού αναπτύγματος βάζουμε την τιμή 2, οπότε έχουμε ότι,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n,$$

3. Εχουμε,
$$(1+x)^n(1+x^{-1})^n = (1+x)^n(1+x)^n x^{-n} = x^{-n}(1+x)^{2n} \Longrightarrow$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{-k} = x^{-n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \Longrightarrow$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

4. Θεωρούμε και πάλι το διωνυμικό ανάπτυγμα
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

και αφού παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη ως προς x, έχουμε ότι,

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

θέτουμε όπου x την τιμή 1 οπότε παίρνουμε,

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

Ασκηση 1.19

1. *Πόσες από τις 2^r ακολουθίες r δυαδικών ψηφίων περιέχουν έναν ζυγό αριθμό μονάδων;*
2. *Πόσες από τις 5^r πενταδικές ακολουθίες r ψηφίων περιέχουν έναν ζυγό αριθμό μονάδων;*

1. **1ος τρόπος:**

   Χωρίζουμε τις 2^r δοσμένες δυαδικές ακολουθίες μήκους r σε 2^{r-1} ζεύγη έτσι ώστε οι δύο ακολουθίες στο κάθε ζεύγος να διαφέρουν μόνον στα στοιχεία της r-οστής θέσης τους. Προφανώς σε κάθε ζεύγος μία και μόνον μία από τις ακολουθίες που το αποτελούν περιέχει ζυγό αριθμό μονάδων ενώ η άλλη περιέχει μονό αριθμό μονάδων. Συνεπώς υπάρχουν 2^{r-1} δυαδικές ακολουθίες r-ψηφίων με ζυγό αριθμό μονάδων.

   2ος τρόπος:

   Υπάρχουν 2^{r-1} δυαδικές ακολουθίες r-1 δυαδικών ψηφίων. Σε μία τέτοια ακολουθία με ζυγό αριθμό μονάδων μπορούμε να τοποθετήσουμε στο τέλος ένα μηδενικό για να πάρουμε μία δυαδική ακολουθία r ψηφίων με ζυγό αριθμό μονάδων. Εάν η ακολουθία των r-1 ψηφίων έχει μονό αριθμό μονάδων, τότε μπορούμε να τοποθετήσουμε στο τέλος της μία μονάδα ώστε να πάρουμε μία ακολουθία r ψηφίων με ζυγό αριθμό μονάδων. Επειδή με τους δύο αυτούς τρόπους παίρνουμε όλες τις δυνατές ακολουθίες r δυαδικών ψηφίων, με ζυγό αριθμό μονάδων, και μόνον αυτές συμπεραίνουμε ότι ο συνολικός τους αριθμός είναι 2^{r-1}.

2. Θεωρούμε τις 5^r ακολουθίες r πενταδικών ψηφίων. Υπάρχουν 3^r απ' αυτές που περιέχουν μόνον τα ψηφία 2,3 και 4. Αυτές οι ακολουθίες συμπεριλαμβάνονται σε εκείνες που περιέχουν ζυγό αριθμό μονάδων. Οι υπόλοιπες $5^r - 3^r$ ακολουθίες μπορούν να διαχωριστούν σε ομάδες ανάλογα με τους σχηματισμούς των ψηφίων 2,3 και 4, που περιέχουν. Σε κάθε μία από αυτές τις ομάδες, σύμφωνα με το 1, οι μισές ακολουθίες θα περιέχουν ζυγό αριθμό μονάδων, οπότε ο συνολικός αριθμός των πενταδικών ακολουθιών r ψηφίων με ζυγό αριθμό μονάδων είναι τελικά $3^r + \frac{1}{2}(5^r - 3^r)$.

Ασκηση 1.20 *Μεταξύ 2n αντικειμένων τα n είναι ίδια. Βρείτε τον αριθμό των επιλογών n αντικειμένων απ' αυτά τα 2n αντικείμενα.*

1ος τρόπος:

Ο ζητούμενος αριθμός των επιλογών ισούται με το άθροισμα,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$$

γιατί μπορούμε να επιλέξουμε n αντικείμενα από τα 2n ως εξής: Είτε παίρνοντας κατά 1 τρόπο τα n όμοια αντικείμενα και κατά $\binom{n}{0}$ τρόπους μηδέν αντικείμενα από τα υπόλοιπα n, είτε παίρνοντας κατά 1 τρόπο n-1 από τα n όμοια αντικείμενα και κατά $\binom{n}{1}$ τρόπους 1 αντικείμενο από τα υπόλοιπα n κ.ο.κ., είτε τέλος παίρνοντας 0 από τα n όμοια αντικείμενα και κατά $\binom{n}{n}$ τρόπους n αντικείμενα από τα υπόλοιπα n διαφορετικά αντικείμενα. Αρα ο ζητούμενος αριθμός είναι,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

2ος τρόπος:

Θεωρούμε μία σειρά n διαδοχικών θέσεων, όπου κάθε θέση αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο αντικείμενο από τα n διαφορετικά αντικείμενα. Για κάθε μία απ' αυτές τις θέσεις έχουμε τη δυνατότητα ή να επιλέξουμε το αντικείμενό της ή να βάλουμε στη θέση του κάποιο από τα n όμοια μεταξύ τους αντικείμενα. Αρα το συνολικό πλήθος των τρόπων επιλογής είναι τόσο όσο και οι δυαδικοί αριθμοί n ψηφίων, δηλαδή 2^n.

Ασκηση 1.21 *Μεταξύ 3n+1 αντικειμένων τα n είναι ίδια.Βρείτε τον αριθμό των επιλογών n αντικειμένων απ' αυτά τα 3n+1 αντικείμενα.*

Εχουμε τη δυνατότητα να επιλέξουμε τα n όμοια αντικείμενα κατά μοναδικό τρόπο και 0 από τα 2n+1 υπόλοιπα αντικείμενα κατά $\binom{2n+1}{0}$ τρόπους, ή να επιλέξουμε n-1 από τα n όμοια αντικείμενα επίσης κατά μοναδικό τρόπο και 1 από τα 2n+1 υπόλοιπα αντικείμενα κατά $\binom{2n+1}{1}$ τρόπους κ.ο.κ., ή τέλος να πάρουμε 0 από τα n όμοια αντικείμενα και n από τα 2n+1 υπόλοιπα με $\binom{2n+1}{n}$ τρόπους. Ετσι ο αριθμός των συνολικών τρόπων επιλογής είναι,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{i} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n}$$

Ομως,

$$2^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} + \ldots + \binom{2n+1}{2n+1} \Longrightarrow$$

$$2^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n-1} + \ldots + \binom{2n+1}{0} \Longrightarrow$$

$$2^{2n+1} = 2[\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n}]$$

ή τελικά,

$$\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n} = 2^{2n}$$

Ετσι τελικά η πρώτη σχέση θα δώσει σε συνδυασμό με την τελευταία,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{i} = 2^{2n}$$

Ασκηση 1.22 *Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\binom{p+1}{q}$ τρόποι να τοποθετηθούν p πρόσημα "+" και q πρόσημα "-" σε μία γραμμή, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο πρόσημα "-" το ένα δίπλα στο άλλο.*

Ξεκινούμε τοποθετώντας πρώτα στη δοσμένη γραμμή τα "-" κατά τρόπο αυθαίρετο με μόνον τον περιορισμό ότι δεν πρέπει να κατέχουν γειτονικές θέσεις. Κατά την τοποθέτηση των "+" ο περιορισμός αυτός επιβάλλει την τοποθέτηση ενός τουλάχιστον "+" μεταξύ οποιονδήποτε δύο "-", που έχουν ήδη τοποθετηθεί. Ετσι τα πρώτα q-1 "+", που τοποθετούμε, τοποθετούνται σε προκαθορισμένες θέσεις (καθένα τους μεταξύ δύο "-").

Περισσεύουν τώρα p-q+1 "+" τα οποια πρέπει να τοποθετηθούν στη γραμμή με όλους τους δυνατούς τρόπους. Η τοποθέτησή τους αντιστοιχεί στην τοποθέτηση p-q+1 όμοιων σφαιρών (των "+" που περισσεύουν) σε q+1 διακεκριμένες υποδοχές (των θέσεων μεταξύ δύο διαδοχικών "-" στη γραμμή και των ακριανών θέσεων της γραμμής). Ο αριθμός των τρόπων για να γίνει αυτή η τοποθέτηση είναι,

$$\frac{((p-q+1)+(q+1)-1)!}{(p-q+1)!((q+1)-1)!} = \binom{p+1}{q}$$

Ασκηση 1.23 *Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων, με τους οποίους r διακεκριμμένες σημαίες μπορούν να τοποθετηθούν σε n διακεκριμμένους ιστούς, δεδομένου ότι έχει σημασία η σειρά με την οποία οι σημαίες εμφανίζονται στους ιστούς και δεδομένου ότι κανένας ιστός δεν πρέπει να μείνει κενός ($r \geq n$).*

Αφού κανένας ιστός δεν πρέπει να μείνει κενός, παίρνουμε n από τις r σημαίες και τις τοποθετούμε μία σε κάθε ιστό. Επειδή και οι σημαίες και οι ιστοί είναι διακεκριμμένοι αυτό μπορεί να γίνει με $r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1) = \frac{r!}{(r-n)!}$ τρόπους.

Στη συνέχεια τοποθετούμε τις υπόλοιπες r-n σημαίες στους n ιστούς με οποιονδήποτε τρόπο. Ο αριθμός των δυνατών τρόπων τοποθέτησης, δεδομένου ότι παίζει ρόλο η σειρά εμφάνισης κάθε σημαίας πάνω στον ιστό, είναι $n(n+1)\dots(n+r-n-1) = n(n+1)\dots(r-1) = \frac{(r-1)!}{(n-1)!}$.

Αρα ο συνολικός αριθμός τρόπων επιλογής είναι,

$$\frac{r!}{(r-n)!} \cdot \frac{(r-1)!}{(n-1)!} = \binom{r-1}{n-1} \cdot r!$$

Ασκηση 1.24 *Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων, με τους οποίους r διακεκριμμένα αυτοκίνητα μπορούν να περάσουν από n διακεκριμμένους σταθμούς διοδίων, δεδομένου ότι μία το πολύ διαδρομή επιτρέπεται να μη δεχθεί αυτοκίνητο* ($r \geq n-1$ *και* $n \geq 2$).

Ο ζητούμενος αριθμός τρόπων είναι το άθροισμα του αριθμού των τρόπων, με τους οποίους r διακεκριμμένα αυτοκίνητα μπορούν να περάσουν από n διακεκριμμένους σταθμούς διοδίων, δεδομένου ότι καμμιά διαδρομή δε θα μείνει κενή (δε θα δεχτεί αυτοκίνητο) συν τον αριθμό των τρόπων, εάν μείνει μία ακριβώς διαδρομή κενή.

Ο πρώτος από τους δύο αριθμούς είναι (βλέπε άσκηση 1.23) $\binom{r-1}{n-1}r!$, ενώ ο δεύτερος για τον ίδιο λόγο και δεδομένου ότι η επιλογή της διαδρομής, που δε θα δεχτεί αυτοκίνητο, μπορεί να γίνει κατά n τρόπους είναι $n\binom{r-1}{n-2}r!$.

Ετσι ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι,

$$\binom{r-1}{n-1}r! + n\binom{r-1}{n-2}r! = r!\binom{r-2}{n-2}\frac{(r-1)[r+(n-1)^2]}{(n-1)(r-n+1)}$$

Ασκηση 1.25 *Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν τέσσερα όμοια πορτοκάλια και έξι διαφορετικά μήλα (διαφορετικών ποικιλιών) σε πέντε διαφορετικά κουτιά; Σε ποιό ποσοστό αυτών των τρόπων τοποθετούνται δύο ακριβώς φρούτα σε κάθε κουτί;*

Υπάρχουν κατά τα γνωστά $\binom{4+5-1}{4} = 70$ τρόποι για να τοποθετηθούν τέσσερα όμοια αντικείμενα σε πέντε διακεκριμένα κουτιά και $5^6 = 15625$ τρόποι για να τοποθετηθούν έξι διαφορετικά μήλα σε πέντε διαφορετικά κουτιά. Επειδή οι τοποθετήσεις αυτές είναι ανεξάρτητες, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, υπάρχουν συνολικά $70 \cdot 15625 = 1093750$ τρόποι για να μοιραστούν τα τέσσερα όμοια και τα έξι διαφορετικά φρούτα στα πέντε διακεκριμένα κουτιά.

Για να απαντήσουμε στο δεύτερο ερώτημα σκεφτόμαστε ως εξής: Ξεκινούμε τη διαδικασία της μοιρασιάς από τα τέσσερα όμοια πορτοκάλια και διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

Εστω ότι τοποθετούνται από δύο πορτοκάλια σε δύο από τα πέντε κουτιά και κανένα πορτοκάλι στα υπόλοιπα κουτιά. Τα δύο κουτιά μπορεί να επιλεγούν κατά $\binom{5}{2} = 10$ τρόπους και τα έξι διαφορετικά μήλα μπορούν να μοιραστούν στα υπόλοιπα τρία κουτιά κατά $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ τρόπους. Ετσι, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, σ' αυτήν την κατηγορία υπάρχουν $10 \cdot 90 = 900$ τρόποι τοποθέτησης.

Εστω ότι τοποθετούνται δύο όμοια πορτοκάλια σ' ένα από τα κουτιά, από ένα πορτοκάλι σε δύο από τα υπόλοιπα τέσσερα κουτιά και τα άλλα δύο κουτιά μένουν χωρίς πορτοκάλι. Το κουτί με τα δύο πορτοκάλια μπορεί να επιλεγεί κατά 5 τρόπους, τα δύο κουτιά που θα πάρουν από ένα πορτοκάλι μπορεί να επιλεγούν κατά $\binom{4}{2} = 6$ τρόπους και τέλος τα έξι διαφορετικά μήλα μπορούν να μοιραστούν στις θέσεις, που περισσεύουν κατά $\frac{6!}{2!2!} = 180$ τρόπους. Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει $5 \cdot 6 \cdot 180 = 5400$ τρόπους τοποθέτησης.

Εστω, τέλος, ότι τοποθετείται από ένα πορτοκάλι σε καθένα από τέσσερα διακεκριμένα κουτιά. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{5}{4} = 5$ τρόπους και τα έξι διαφορετικά μήλα θα μοιραστούν στις θέσεις που περισσεύουν κατά $\frac{6!}{2!} = 360$ τρόπους. Ετσι η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει $5 \cdot 360 = 1800$ τρόπους τοποθέτησης.

Από τα παραπάνω και αφού έχουμε εξαντλήσει κάθε δυνατό τρόπο τοποθέτησης δύο φρούτων σε κάθε διακεκριμένο κουτί γίνεται φανερό ότι έχουμε συνολικά $900 + 5400 + 1800 = 8100$ τρόπους τοποθέτησης. Το κλάσμα των τρόπων αυτών ως προς το συνολικό αριθμό των τρόπων που υπολογίστηκε παραπάνω είναι $\frac{8100}{1093750} = 0.0074$.

Ασκηση 1.26 *Πόσες ακέραιες λύσεις της εξισώσεως* $x_1+x_2+x_3+x_4 = 12$ *με* $x_i \geq 0$ *υπάρχουν;* [1] *Πόσες με* $x_i > 0$; *Πόσες με* $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 0$;

[1] Βλέπε και Κεφάλαιο 4 για κάποιες άλλες τεχνικές λύσεως ακεραίων εξισώσεων με την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού.

Με τον όρο ακεραία λύση μιας εξίσωσης εννοούμε ένα διατεταγμένο σύνολο ακεραίων τιμών για τα x_i με άθροισμα 12. Αυτό το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα τοποθέτησης 12 όμοιων σφαιρών σε 4 διαφορετικά κουτιά και έχει $\binom{12+4-1}{12} = 455$ διαφορετικές λύσεις.

Εάν απαιτήσουμε $x_i > 0$ τότε θέτουμε στο παραπάνω αντίστοιχο πρόβλημα τον επιπλέον περιορισμό να μην μείνει κανένα από τα τέσσερα κουτιά άδειο. Η λύση στο πρόβλημα αυτό δίνεται αφού πρώτα τοποθετήσουμε σε κάθε κουτί μία σφαίρα, τοποθετώντας τις υπόλοιπες 8 σφαίρες κατά τυχαίο τρόπο στα 4 κουτιά. Αυτό γίνεται κατά $\binom{8+4-1}{8} = 165$ τρόπους, οπότε 165 είναι και οι λύσεις της εξίσωσης.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι για την τρίτη περίπτωση υπάρχουν $\binom{4+4-1}{4} = 35$ ακέραιες λύσεις, που ικανοποιούν τους πιο πάνω περιορισμούς.

Ασκηση 1.27 *Πόσες μη αρνητικές ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 10$ και πόσες η ανίσωση $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 < 10$;*

Από τη άσκηση 1.26 παίρνουμε άμεσα απάντηση για το πρώτο ερώτημα. Η δοσμένη εξίσωση έχει $\binom{6+10-1}{10} = 3003$ ακέραιες μη αρνητικές λύσεις.

Για να λύσουμε τη δοσμένη ανισότητα μετασχηματίζουμε το πρόβλημα κάνοντας την παρατήρηση ότι υπάρχει κάποια αντιστοιχία μεταξύ των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων της ανισότητας και των ακεραίων λύσεων της $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 + x_7 = 10, 0 \leq x_i, 1 \leq i \leq 6, 0 < x_7$. Ο αριθμός των λύσεων της τελευταίας εξισώσεως είναι ο ίδιος με τον αριθμό των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της $y_1 + y_2 + \ldots + y_6 + y_7 = 9$, όπου $y_i = x_i$ για $1 \leq i \leq 6$ και $y_7 = x_7 - 1$. Αυτός όμως ισούται με $\binom{7+9-1}{9} = 5005$.

Ασκηση 1.28 *Σε ένα κατάστημα τα αντικείμενα A,B και Γ πωλούνται στην τιμή των 500 δρχ. και το αντικείμενο Δ στην τιμή των 2000 δρχ.. Πόσες διαφορετικές αγορές προϊόντων (από το σύνολον $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$) μπορούμε να κάνουμε στο κατάστημα αυτό αν διαθέτουμε 10000 δρχ. και τις ξοδέψουμε όλες;*

Θεωρούμε ως μονάδα μέτρησης το πεντακοσάρικο αφού όλες οι άλλες τιμές που δίδονται είναι πολλαπλάσια αυτής της τιμής. Επομένως διαθέτουμε συνολικά 20 μονάδες για να ξοδέψουμε, με το προϊόν Δ να κοστίζει 4 μονάδες και όλα τα άλλα προϊόντα από 1 μονάδα το καθένα. Ενα μοντέλο για το πρόβλημα σε μορφή εξίσωσης είναι η,

$$A + B + \Gamma + 4\Delta = 20, A, B, \Gamma, \Delta \geq 0.$$

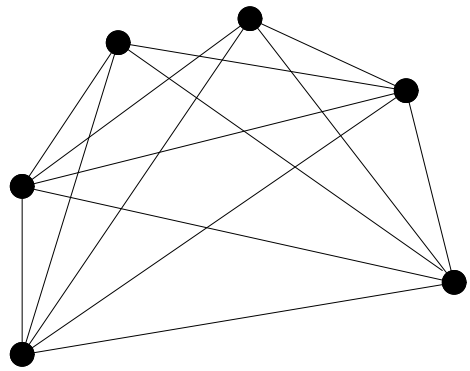
Για να αντιμετωπίσουμε το γεγονός ότι το Δ έχει συντελεστή 4 στην παραπάνω εξίσωση αρκεί πρώτα να προσδιορίσουμε ακριβώς πόσα κομμάτια του προϊόντος Δ αγοράζουμε. Εάν π.χ. αγοράσουμε ένα κομμάτι, τότε παίρνομε την εξίσωσιν $A + B + \Gamma = 16$, η οποία έχει (βλέπε άσκηση 1.26) $\binom{16+3-1}{16} = 153$ ακέραιες μη αρνητικές λύσεις. Στη γενική περίπτωση, αν $\Delta = i$, τότε θα έχουμε $A + B + \Gamma = 20 - 4i$, μία εξίσωση με $\binom{(20-4i)+3-1}{20-4i} = \binom{22-4i}{2}$ λύσεις, για $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Αθροίζοντας λοιπόν όλες αυτές τις περιπτώσεις έχουμε για το συνολικό αριθμό των δυνατών αγορών,

$$\binom{22}{2} + \binom{18}{2} + \binom{14}{2} + \binom{10}{2} + \binom{6}{2} + \binom{2}{2} = 536$$

διαφορετικούς τρόπους αγοράς.

Ασκηση 1.29 *Σε πόσα ευθύγραμμα τμήματα χωρίζονται οι διαγώνιοι ενός κυρτού n-γώνου από τις τομές τους, υπό την προϋόθεση ότι οποιεσδήποτε τρείς διαγώνιες δεν τέμνονται στο ίδιο σημείο.*

Κατ' αρχάς σημειώνουμε ότι ο συνολικός αριθμός των διαγωνίων είναι $\binom{n}{2} - n$, αφού υπάρχουν $\binom{n}{2}$ ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα $\binom{n}{2}$ ζεύγη των κορυφών του n-γώνου αλλά n απ' αυτά τα τμήματα είναι οι πλευρές του n-γώνου. Αφού το n-γωνον είναι κυρτό κάθε δύο διαγώνιες τέμνονται σε ένα σημείο, δηλαδή κάθε τέσσερις κορυφές συνεισφέρουν κατά ένα στο πλήθος των σημείων τομής των διαγωνίων. Συνεπώς το σύνολο των σημείων αυτών έχει πληθικό αριθμό $\binom{n}{4}$. Ομως κάθε διαγώνιος διαιρείται σε k+1 ευθύγραμμα τμήματα από τα k σημεία τομής που βρίσκονται επάνω της και κατά συνέπεια αφού κάθε σημείον τομής ανήκει σε δύο διαγωνίους (και



Σχήμα 1.1: Το κυρτό n-γωνο της άσκησης 1.29 και οι διαγώνιες του.

όχι σε περισσότερες εξ' υποθέσεως) ο συνολικός αριθμός των ευθυγράμμων τμημάτων στα οποία χωρίζονται οι διαγώνιες ενός τέτοιου n-γώνου είναι,

$$\binom{n}{2} - n + 2 \cdot \binom{n}{4}$$

Ασκηση 1.30 *Πόσες αύξουσες ακολουθίες n όρων από το σύνολον* $\{0, 1, \ldots, m\}$ *υπάρχουν;*

Για να κατασκευάσουμε μία αύξουσα ακολουθία n όρων από το σύνολον $\{0, 1, \ldots, m\}$ αρκεί να επιλέξουμε n στοιχεία από το σύνολο αυτό με επανάληψη και να τα αντιστοιχίσουμε διατεταγμένα στους δείκτες $1, 2, \ldots, n$ της ακολουθίας. Δύο τέτοιες ακολουθίες θα είναι διαφορετικές εάν είναι διαφορετικές οι επιλογές των n στοιχείων με επανάληψη από το δοσμένο σύνολο. Επομένως ο ζητούμενος αριθμός των ακολουθιών ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών με επανάληψη n στοιχείων από το σύνολον $\{0, 1, \ldots, m\}$. Ο αριθμός αυτός είναι $\binom{n+m}{n}$

Ασκηση 1.31 *Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που ένας φυσικός m μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα* $m = m_1 + \ldots + m_n$ *n φυσικών με την παραδοχή ότι δύο αθροίσματα θεωρούνται διαφορετικά είτε όταν διαφέρουν ως προς τους φυσικούς που τα αποτελούν είτε ως προς τη σειρά με την οποία αυτοί εμφανίζονται στο άθροισμα.*

Θεωρούμε ένα δοσμένο φυσικό m και ας είναι $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ ένας τρόπος με τον οποίο ο φυσικός m γράφεται σαν άθροισμα n φυσικών. Δύο τέτοια αθροίσματα θα θεωρούνται διαφορετικά είτε όταν αποτελούνται από διαφορετικούς προσθετέους είτε όταν διαφέρει η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι προσθετέοι τους στο κάθε άθροισμα. Μία εκ των δύο παραπάνω διαφορών έχει σαν αποτέλεσμα οπωσδήποτε διαφορά και στην ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{M_i\}$, όπου $M_i = m_1 + \ldots + m_i, 1 \leq i \leq n$. Αντιστρόφως, μία διαφορά στην ακολουθία αυτή είναι προφανές ότι προκύπτει από κάποια διαφοροποίηση των δύο αθροισμάτων ως προς τους προσθετέους τους στη συγκεκριμένη θέση, όπου εμφανίζεται η συγκεκριμένη διαφορά.

Επειδή επιπλέον οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσες, από τις παραπάνω παρατηρήσεις, την άσκηση 1.30 και το γεγονός ότι ο τελικός τους όρος (n-οστός) θα είναι αναγκαστικά ίσος με m, ανεξάρτητα των προηγούμενων όρων, προκύπτει ότι ο αριθμός των ακολουθιών αυτών ταυτίζεται με τον ζητούμενο αριθμό των αθροισμάτων και είναι ίσος με $\binom{n+m-1}{n-1}$.

Ασκηση 1.32 *Να υπολογιστεί το άθροισμα* $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

Εχουμε από το διωνυμικό ανάπτυγμα ότι $(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$, οπότε θέτοντας διαδοχικά $x = 1, 2, \ldots, n$ και αθροίζοντας έχουμε :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^3 = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 1^3 \\ 3^3 = 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3 \\ 4^3 = 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 3^3 \\ \vdots \\ (n+1)^3 = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2 + n^3 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$(n+1)^3 = n + 3(1+2+\ldots+n) + 3(1^2+2^2+\ldots+n^2) + 1 \Longrightarrow$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n+1}{3} - (1+2+\ldots+n) \Longrightarrow$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3n(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+2+4n-2-3n)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Αρα τελικά $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ασκηση 1.33 *Να δειχθεί ότι* $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$.

Εχουμε,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!} =$$

$$= \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} =$$

$$= \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Ασκηση 1.34 *Να αποδειχθεί ότι,*

1. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}(-1)^k = (-1)^n \binom{r-1}{n}$$

2. $$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

3. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

4. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

1. Ζητούμε να δείξουμε ότι $\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{r}{n} = (-1)^n\binom{r-1}{n}$. Γνωρίζουμε (βλέπε άσκηση 1.33) ότι ισχύει η ταυτότητα $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$, οπότε έχουμε,

$$\left\{\begin{array}{l} \binom{r}{0} = \binom{r-1}{0} \\ -\binom{r}{1} = -\binom{r-1}{1} - \binom{r-1}{0} \\ \binom{r}{2} = \binom{r-1}{2} + \binom{r-1}{1} \\ \vdots \\ (-1)^n\binom{r}{n} = (-1)^n\binom{r-1}{n} + (-1)^n\binom{r-1}{n-1} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{r}{n} = (-1)^n\binom{r-1}{n}$$

2.
$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \frac{r!}{m!(r-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{r!}{(r-k)!k!} \cdot \frac{(r-k)!}{(m-k)!(r-m)!} =$$
$$= \frac{r!}{(r-k)!k!} \cdot \frac{(r-k)!}{(m-k)!(r-k-m+k)!} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

3. Ο συνολικός αριθμός τρόπων επιλογής n αντικειμένων από r+s αντικείμενα ισούται με τους τρόπους επιλογής k αντικειμένων από r από τα r+s αντικείμενα και των υπόλοιπων n-k αντικειμένων από τα υπόλοιπα s από τα r+s αντικείμενα, όπου τα r,s παραμένουν σταθερά, το k όμως μεταβάλλεται από 0 εώς n. Αρα πράγματι,
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

4. Με βάση τον τύπο που απεδείχθει στην άσκηση 1.33 έχουμε,
$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m+1} =$$
$$= \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m} + \binom{n-2}{m+1} = \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{k}{m}$$

Ασκηση 1.35 *Ποιά η τιμή του αθροίσματος,*
$$\sum_{k}\binom{r}{k}\binom{s}{k}k$$
όταν $r \geq 0$;

Από τον ορισμό των συνδυασμών $\binom{s}{k}$ έχουμε ότι,
$$\binom{s}{k} = \frac{s!}{k!(s-k)!} = \frac{s}{k} \cdot \frac{(s-1)!}{(k-1)!(s-k)!} = \frac{s}{k}\binom{s-1}{k-1}$$
Από την παραπάνω σχέση με αντικατάσταση στην αρχική παίρνουμε,
$$\sum_{k}\binom{r}{k}\binom{s}{k}k = \sum_{k}\binom{r}{k}\binom{s-1}{k-1}s = s\sum_{k}\binom{r}{k}\binom{s-1}{k-1}$$
Από την άσκηση 1.34 (μέρος 3) έχουμε ότι,
$$\sum_{k}\binom{r}{k}\binom{s-1}{k-1} = \binom{r+s-1}{r-1}$$
οπότε τελικά το ζητούμενο άθροισμα είναι,
$$\sum_{k}\binom{r}{k}\binom{s}{k}k = \binom{r+s-1}{r-1}s, r \geq 0$$

Ασκηση 1.36 *Ποιά η τιμή του αθροίσματος,*
$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$
για $n \geq 0$;

Προκειμένου να βοηθηθούμε στη λύση της άσκησης αυτής υπενθυμίζουμε τους επόμενους τύπους,

$$\sum_{k\geq 0}\tbinom{n+k}{2k}\tbinom{2k}{k}=\sum_{k\geq 0}\tbinom{n+k}{k}\tbinom{n}{k}$$

$$\tbinom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\cdot\tbinom{n}{k}$$

$$\tbinom{n+k}{k}=\tbinom{n+k}{n}$$

και τέλος,

$$\sum_{k}\tbinom{r}{k}\tbinom{s+k}{n}(-1)^k=(-1)^r\tbinom{s}{n-r}$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους παίρνουμε σταδιακά από την αρχική σχέση,

$$\sum_{k\geq 0}\tbinom{n+k}{2k}\tbinom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k\geq 0}\tbinom{n+k}{k}\tbinom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k\geq 0}\tbinom{n+k}{n}\tbinom{n+1}{k+1}\frac{(-1)^k}{n+1}=$$

$$=-\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 1}\tbinom{n-1+k}{n}\tbinom{n+1}{k}(-1)^k=$$

$$=-\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\tbinom{n-1+k}{n}\tbinom{n+1}{k}(-1)^k+\frac{1}{n+1}\tbinom{n-1}{n}=$$

$$=-\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}\tbinom{n-1}{-1}+\frac{1}{n+1}\tbinom{n-1}{n}=\frac{1}{n+1}\tbinom{n-1}{n}$$

Το πρόβλημα έχει ουσιαστικά λυθεί γιατί ο συνδυασμός $\binom{n-1}{n}$ είναι ίσος με μηδέν, εκτός από την περίπτωση όπου $n=0$, οπότε ισούται με τη μονάδα.

Κεφάλαιο 2

Γεννήτριες Συναρτήσεις

Now you play the loving woman I'll play the faithful man
But just don't look too close into the palm of my hand
We stood at the altar the gypsy swore our future was right
But come the wee wee hours well maybe baby the gypsy lied
So when you look at me you better look hard and look twice
Is that me baby or just a brilliant disguise

Tonight our bed is cold I'm lost in the darkness of our love
God have mercy of the man who doubts what he's sure of

Brilliant Disguise
BRUCE SPRINGSTEEN

Ασκηση 2.1 *Ποιά ακολουθία έχει γεννήτρια συνάρτηση την,*

1.
$$A(x) = \frac{1+2x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3}$$

2.
$$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1+2x}$$

3.
$$A(x) = \frac{2}{1-4x^2}$$

1. Είναι,

$$A(x) = \frac{1+x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3} + \frac{x}{1+x-x^2-x^3} = 1 + \frac{x}{1+x-x^2(1+x)} =$$

$$= 1 + \frac{x}{(1+x)(1-x^2)} = 1 + \frac{x}{(1+x)^2(1-x)}$$

Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{x}{(1+x)^2(1-x)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων,

$$\frac{x}{(1+x)^2(1-x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2} \Longrightarrow$$

$$x = A(1+x)^2 + B(1-x)(1+x) + C(1-x) \Longrightarrow$$

$$x = (A-B)x^2 + (2A-C)x + A + B + C \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A-B=0 \\ 2A-C=1 \\ A+B+C=0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=B \\ 4A=1 \\ C=-2A \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=\frac{1}{4} \\ B=\frac{1}{4} \\ C=-\frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Αρα έχουμε,

$$A(x) = 1 + \frac{1}{4}(1-x)^{-1} + \frac{1}{4}(1+x)^{-1} - \frac{1}{2}(1+x)^{-2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^k - \frac{1}{2}(-1)^k(k+1)]x^k =$$

$$= 1 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + 3x^5 - 3x^6 + \ldots.$$

2.
$$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1+2x} = -3x + 3 - \frac{1}{2x+1} =$$

$$= 3 - 3x - (1+2x)^{-1} = 3 - 3x - \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}2^k x^k =$$

$$= 3 - 3x - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k x^k = 2 - x - 4x^2 + 8x^3 - 16x^4 + \ldots.$$

3.
$$A(x) = \frac{2}{1-4x^2} = 2(1-4x^2)^{-1} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k 4^k x^{2k} =$$
$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^{2k} = 2 + 0\cdot x + 8x^2 + 0\cdot x^3 + 32x^4 + \ldots.$$

Ασκηση 2.2 *Ποιά είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας,*

1. $2, 5, 13, 35, \ldots, 2^n + 3^n, \ldots.$

2. $1, 2, 3, \ldots, r, \ldots.$

1. Είναι,
$$A(x) = 2^0 + 3^0 + (2^1 + 3^1)x + (2^2 + 3^2)x^2 + \ldots =$$
$$= (2^0 + 2^1 x + 2^2 x^2 + \ldots) + (3^0 + 3^1 x + 3^2 x^2 + \ldots) =$$
$$= [(2x)^0 + (2x)^1 + (2x)^2 + \ldots] + [(3x)^0 + (3x)^1 + (3x)^2 + \ldots] =$$
$$= \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \frac{1-3x+1-2x}{1-5x+6x^2} = \frac{2-5x}{1-5x+6x^2}.$$

2. Εχουμε,
$$A(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + rx^{r-1} + \ldots =$$
$$= (x + x^2 + x^3 + \ldots + x^r + \ldots)' = [(1 + x + x^2 + \ldots) - 1]' =$$
$$= (\frac{1}{1-x} - 1)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ασκηση 2.3 *Να αποδειχθεί η σχέση* $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$ *με χρήση γεννητριών συναρτήσεων.* [1]

Παρατηρούμε ότι οι $\binom{n}{r}$ είναι οι συντελεστές του z^r στο ανάπτυγμα του $(1+z)^n$. Αυτό όμως γράφεται και στη μορφή $(1+z)^{n-1} + z(1+z)^{n-1}$, του οποίου οι συντελεστές της δύναμης z^r είναι σύμφωνα με τον κανόνα του αθροίσματος, $\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$, και άρα έχουμε δείξει το ζητούμενο.

Ασκηση 2.4 *Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των μερικών αθροισμάτων χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης. Ακόμα, να αποδειχθεί και η ιδιότητα της κλίμακας.*

Η ιδιότητα της συνέλιξης μας λέει ότι η ακολουθία,
$$\delta_k = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r}, k = 0, 1, 2, \ldots,$$
που είναι συνέλιξη των ακολουθιών a_r, b_r, δηλαδή $\delta_r = a_r * b_r$, έχει γεννήτρια συνάρτηση $\Delta(x) = A(x)\cdot B(x)$. Με βάση την ιδιότητα αυτή θα δείξουμε ότι, αν $b_k = \sum_{r=0}^{k} a_r, k = 0, 1, 2, \ldots$, τότε η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας b_k είναι
$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$$
Θεωρούμε την ακολουθία $\gamma_k = 1\ \forall k \in N$, οπότε η (γ_k) έχει γεννήτρια συνάρτηση τη $\Gamma(x) = \frac{1}{1-x}$. Τότε,
$$b_k = \sum_{r=0}^{k} a_r = \sum_{r=0}^{k} a_r \cdot 1 = \sum_{r=0}^{k} a_r \gamma_{k-r}$$
Δηλαδή η b_k είναι συνέλιξη των a_k και γ_k κι έτσι σύμφωνα με την υπόθεση θα έχει γεννήτρια συνάρτηση,
$$B(x) = A(x)\cdot\Gamma(x) \Longrightarrow B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$$

[1] Βλέπε και Κεφάλαιο 1 για μία συνδυαστική απόδειξη της παραπάνω σχέσεως.

Εστω τώρα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $B(x)$ της ακολουθίας $b_k = \sum_{r=k}^{\infty} a_r$. Εχουμε ότι,

$$b_k = \sum_{r=k}^{\infty} a_r = \sum_{r=0}^{\infty} a_r - \sum_{r=0}^{k-1} a_r = A(1) - \sum_{r=0}^{k-1} a_r \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} A(1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k-1} a_r x^k \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \frac{A(1)}{1-x} - \frac{xA(x)}{1-x} \Longrightarrow B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$$

Θα αποδείξουμε τώρα την ιδιότητα της κλίμακας, δηλαδή ότι η ακολουθία $b_r = ra_r, r = 0, 1, 2, \ldots$, έχει γεννήτρια συνάρτηση $B(x) = xA'(x)$ και ότι η ακολουθία $\delta_r = \frac{a_r}{r+1}, r = 0, 1, 2, \ldots$, έχει γεννήτρια,

$$\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)dt.$$

Εχουμε,

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = 0a_0 + 1a_1 x + 2a_2 x^2 + \ldots =$$
$$= x(1a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots) = x(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)' =$$
$$= x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)' = xA'(x).$$
$$\Delta(x) = \frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2}x + \frac{a_2}{3}x^2 + \ldots =$$
$$= \frac{1}{x}(a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{x}\int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)dt = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)dt$$

Ασκηση 2.5 *Εστω $a_0, a_1, \ldots$ μία άπειρη ακολουθία. Εστω ακόμα ότι*

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

$a \in R$ και

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Η ακολουθία των αθροισματικών υπολοίπων ορίζεται ως εξής,

$$b_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$$

Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της b_n σαν συνάρτηση των a και $A(x)$.

Εχουμε ότι

$$b_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i \Longrightarrow$$

$$b_n = a - \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a, a, \ldots$ είναι η $\frac{a}{1-x}$, ενώ από την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων γνωρίζουμε ότι γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$\sum_{i=0}^{n} a_i$$

είναι η $\frac{A(x)}{1-x}$. Επομένως από την γραμμική ιδιότητα των γεννητριών συναρτήσεων, η ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση της b_n είναι η,

$$B(x) = \frac{a}{1-x} - \frac{A(x)}{1-x} = \frac{a - A(x)}{1-x}$$

Ασκηση 2.6 *Να βρεθεί κλειστός τύπος για τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_r = r^2, r = 0, 1, 2, \ldots$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το άθροισμα $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + r^2$.* [2]

Εχουμε,

$$A(x) = 0 + 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \ldots =$$
$$= x(1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \ldots) = x(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots)' =$$
$$= x[x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots)]' = x[x(x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)']' =$$
$$= x[x(\frac{1}{1-x} - 1)']' = x[\frac{x}{(1-x)^2}]' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

ο οποίος είναι και ο ζητούμενος κλειστός τύπος για τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_r = r^2$.

Από την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων προκύπτει ότι γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $0^2, 0^2 + 1^2, 0^2 + 1^2 + 2^2, \ldots, 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + r^2, \ldots$ είναι η

$$S(x) = \frac{A(x)}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο άθροισμα αρκεί συνεπώς να υπολογίσουμε τον συντελεστή του x^r στην παραπάνω συνάρτηση.

Από το δυωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε για τον συντελεστή του x^r στο $(1-x)^{-4}$,

$$\frac{(-4)(-4-1)\ldots(-4-r+1)}{r!}(-1)^r = \frac{4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (r+3)}{r!} =$$
$$= \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Επομένως ο συντελεστής του x^r στην συνάρτηση $S(x)$ είναι ο

$$\frac{r(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(r-1)r(r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

Ετσι τελικά έχουμε για το ζητούμενο ότι,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

Ασκηση 2.7 *Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτησις της ακολουθίας $a_r = (r-1)r(r+1)$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το άθροισμα $3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + \ldots + (n+1)n(n-1)$.*

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = 1 \cdot 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 0x + 3 \cdot 2 \cdot 1x^2 + \ldots =$$
$$= 3 \cdot 2 \cdot 1x^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2x^3 + \ldots = x^2(3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2x + \ldots) =$$
$$= x^2(3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \ldots)' = x^2(3x^2 + 4x^3 + \ldots)'' =$$
$$= x^2(x^3 + x^4 + \ldots)''' = x^2[\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2)]''' =$$
$$= x^2(\frac{1}{1-x})''' = \ldots = \frac{6x^2}{(1-x)^4}$$

[2] Βλέπε Κεφάλαιο 1 για έναν άλλο τρόπο υπολογισμού του τελευταίου αθροίσματος.

Με βάση την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων, εάν $S(x) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots$, όπου

$$s_k = \sum_{r=0}^{k} a_r$$

θα έχουμε $S(x) = \frac{A(x)}{1-x} \Longrightarrow S(x) = \frac{6x^2}{(1-x)^5}$. Αρα για να βρούμε το

$$s_n = \sum_{r=0}^{n} a_n$$

αρκεί να αναπτύξουμε το S(x). Εχουμε:

$$S(x) = 6x^2(1-x)^{-5} = 6x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-5}{k}(-1)^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 6\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4!} x^{k+2} \Longrightarrow$$

$$s_k = 6\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4!} = \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4}$$

Ασκηση 2.8 *Με χρήση γεννητριών συναρτήσεων, να αποδείξετε τους παρακάτω τύπους:*

1.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

2.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

[3]

1. Παρατηρούμε ότι το άθροισμα αποτελεί συνέλιξη των ακολουθιών $x_k = \binom{r}{k}$ και $y_k = \binom{s}{k}$. Ομως η ακολουθία $x_k = \binom{r}{k}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $(1+z)^r$ ενώ η $y_k = \binom{s}{k}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $(1+z)^s$. Σύμφωνα με την ιδιότητα της συνέλιξης η γεννήτρια συνάρτηση της

$$(\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k})$$

είναι η $(1+z)^{r+s}$ οπότε το παραπάνω άθροισμα, που παριστά τον n-οστό όρο της ακολουθίας θα ισούται με τον συντελεστή του z^n στην προηγούμενη γεννήτρια συνάρτηση. Δηλαδή έχουμε,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

2. Θέτουμε

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+1}{m+1} z^m$$

και

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} [\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m}] z^m.$$

[3] Βλέπε και Κεφάλαιο 1 για μία συνδυαστική απόδειξη των παραπάνω τύπων.

Αρκεί να δείξομε ότι $X(z) = Y(z)$. Εχουμε,

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+1}{m+1} z^m = z^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+1}{m+1} z^{m+1} =$$

$$= z^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+1}{k} z^k = z^{-1}[(1+z)^{n+1} - 1]$$

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} [\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m}] z^m = \sum_{k=0}^{n} [\sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{m} z^m] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (1+z)^k = \frac{(1+z)^{n+1} - 1}{(1+z) - 1} =$$

$$= z^{-1}[(1+z)^{n+1} - 1]$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι,

$$X(z) = Y(z) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Ασκηση 2.9 *Για δοσμένο t να υπολογιστεί το άθροισμα,*

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i} \binom{2t-2i}{t-i}.$$

Εστω $a_i = \binom{2i}{i}$. Τότε $b_i = \binom{2t-2i}{t-i} = a_{t-i}$, οπότε είναι,

$$\delta(t) = \sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i} \binom{2t-2i}{t-i} = a_i * b_i = a_i * a_{t-i}$$

και έτσι η γεννήτρια συνάρτηση της δ_i είναι σύμφωνα με την ιδιότητα της συνέλιξης $\Delta(x) = [A(x)]^2$. Ομως είναι,

$$A(x) = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$$

γιατί,

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k 4^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \dots (\frac{-2k+1}{2})}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} (-1)^k 4^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{1 \cdot 2 \dots k} 2^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \dots (2k)}{(k!)^2} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k$$

Ετσι,

$$\Delta(x) = [A(x)]^2 = [(1-4x)^{-\frac{1}{2}}]^2 = (1-4x)^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-1)^k 4^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k$$

Αρα,

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i} \binom{2t-2i}{t-i} = 4^t$$

Ασκηση 2.10 *Να υπολογιστεί το άθροισμα,*

$$\sum_{k=2}^{n-1}(n-k)(n-k)\binom{n-1}{n-k}.$$

Εστω $a_k = k^2$ και $b_k = \binom{n-1}{n-k}$. Τότε,

$$b_k * a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k =$$

$$= a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} a_{n-k} b_k + a_0 b_n = (n-1)^2 + \sum_{k=2}^{n-1} a_{n-k} b_k \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{n-1} a_{n-k} b_k = b_k * a_k - (n-1)^2$$

Ομως έχουμε από την άσκηση 2.6 ότι,

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = 0^2 + 1^2 x + 2^2 x^2 + \ldots =$$

$$= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},$$

και

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = \binom{n-1}{n} + \binom{n-1}{n-1} x + \binom{n-1}{n-2} x^2 + \ldots =$$

$$= x[\binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n-2} x + \ldots] = x[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} x + \ldots] = x(1+x)^{n-1}$$

Επομένως η συνέλιξη

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

έχει γεννήτρια συνάρτηση,

$$A(x) \cdot B(x) = x(1+x)^{n-1} \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2(1+x)^n}{(1-x)^3} =$$

$$= x^2 \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} (-1)^k x^k = x^2 \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} x^k =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{m} \frac{(k+1)(k+2)}{2} x^{m+k+2}$$

Αρα ο συντελεστής του x^n είναι ο,

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{m=0}^{n-2} \binom{n}{m} \frac{(n-m-1)(n-m)}{2}$$

Επομένως από τα παραπάνω έχουμε ότι,

$$\sum_{k=2}^{n-1} a_{n-k} b_k = \sum_{m=0}^{n-2} \binom{n}{m} \frac{(n-m-1)(n-m)}{2} - (n-1)^2 =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \sum_{m=0}^{n-2} \binom{n-2}{m} - (n-1)^2 = n(n-1)2^{n-3} - (n-1)^2$$

Ασκηση 2.11 *Εστω X μία τυχαία μεταβλητή, που παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, \ldots$ με πιθανότητα αντίστοιχα*

$$x_0, x_1, \ldots, (x_i \geq 0 \text{ και } \sum_i x_i = 1).$$

Εστω $X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k s^k$ η γεννήτρια συνάρτηση της X. Εστω Y η τυχαία μεταβλητή, που παίρνουμε εάν προσθέσουμε n ανεξάρτητα δείγματα της X. Εστω $y_0, y_1, \ldots$ οι πιθανότητες να πάρει η y τις τιμές $0, 1, 2, \ldots$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η γεννήτρια συνάρτηση $Y(s) = \sum_k y_k s^k$ είναι ίση με $[X(s)]^n$.

Εστω οι ισόνομες με τη X τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ και έστω ότι $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Τότε η πιθανότητα y_k να πάρει η μεταβλητή Y την τιμή k θα ισούται με το άθροισμα των $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}$ για όλα τα $i_1, i_2, \ldots, i_n$ τέτοια ώστε $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = k$. Το άθροισμα όμως αυτών των γινομένων είναι πράγματι ο συντελεστής του x^k στο πολυώνυμο,

$$Y(s) = (x_0 s^0 + x_1 s + x_2 s^2 + \ldots)(x_0 s^0 + x_1 s + x_2 s^2 + \ldots) \ldots$$

$$\ldots (x_0 s^0 + x_1 s + x_2 s^2 + \ldots) =$$

$$= (x_0 + x_1 s + x_2 s^2 + \ldots)^n = [X(s)]^n$$

Επομένως,

$$Y(s) = \sum_k y_k s^k = [X(s)]^n$$

Ασκηση 2.12 *Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_0, a_1, \ldots$ όπου a_r είναι ο αριθμός των τρόπων να επιλέξουμε (με επαναλήψεις) r γράμματα από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$ με τον περιορισμό ότι το γράμμα 0 θα επιλεγεί ζυγό αριθμό φορών. Με βάση τη γεννήτρια συνάρτηση υπολογίστε το a_r.*

Η γεννήτρια συνάρτηση, που έχει σαν συντελεστές τους αριθμούς των τρόπων επιλογής, είναι η,

$$A(x) = (1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{1 - x^2} \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{1}{1 + x} \frac{1}{(1 - x)^3}$$

Κάνουμε ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων,

$$A(x) = \frac{1}{1 + x} \frac{1}{(1 - x)^3} = \frac{A}{1 + x} + \frac{B}{1 - x} + \frac{C}{(1 - x)^2} + \frac{D}{(1 - x)^3} \Longrightarrow$$

$$1 = A(1 - x)^3 + B(1 + x)(1 - x)^2 + C(1 - x)(1 + x) + D(1 + x) \Longrightarrow$$

$$1 = A + 3Ax^2 - 3Ax - Ax^3 + Bx^3 - Bx^2 - Bx + B + C - Cx^2 + D + Dx \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A - B = 0 \\ 3A - B - C = 0 \\ -3A - B + D = 0 \\ A + B + C + D = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = B \\ C = 2A \\ D = 4A \\ A + A + 2A + 4A = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{8} \\ B = \frac{1}{8} \\ C = \frac{1}{4} \\ D = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Αρα,

$$A(x) = \frac{1}{8}(1 + x)^{-1} + \frac{1}{8}(1 - x)^{-1} + \frac{1}{4}(1 - x)^{-2} + \frac{1}{2}(1 - x)^{-3} =$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^k + \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-1)^k x^k +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}(-1)^k x^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{k}(-1)^k x^k=$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k+\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}x^k+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{2}x^k\Longrightarrow$$

$$a_r=\frac{1}{8}(-1)^r+\frac{1}{8}+\frac{r+1}{4}+\frac{(r+1)(r+2)}{4}=$$

$$=\frac{1}{8}[1+(-1)^r]+\frac{(r+1)(r+3)}{4}$$

Ασκηση 2.13 *Δίνεται η γεννήτρια συνάρτηση για την ακολουθία* a_0, a_1,a_2,.... *Να βρεθούν*

1. *η γεννήτρια συνάρτηση της υπακολουθίας* a_1, a_4,a_7,.... *(Υπόδειξη: Αν* $w=e^{\frac{2}{3}\pi i}$ *τότε* $w^0+w^1+w^2=0$.*)*

2. *η γεννήτρια συνάρτηση για την υπακολουθία των όρων με ζυγό δείκτη, δηλαδή* a_0,a_2,a_4,....

1. Εστω $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$. Οι,

$$w_0=1, w_1=e^{\frac{2}{3}\pi i}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

και

$$w_2=e^{\frac{4\pi}{3}i}=-(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

είναι οι τρείς μιγαδικές τρίτες ρίζες της μονάδος και γι αυτές ισχύει από τη μιγαδική ανάλυση ότι

$$w_0+w_1+w_2=0 \text{ και } w_1^2=w_2, w_2^2=w_1$$

Εχουμε,

$$\frac{A(x)-a_0}{x}=a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{A(w_0x)-a_0}{w_0x}=\frac{A(x)-a_0}{x}=a_1+a_2w_0x+a_3w_0^2x^2+\ldots\\ \frac{A(w_1x)-a_0}{w_1x}=a_1+a_2w_1x+a_3w_1^2x^2+\ldots\\ \frac{A(w_2x)-a_0}{w_2x}=a_1+a_2w_2x+a_3w_2^2x^2+\ldots\end{array}\right\}\overbrace{\Longrightarrow}^{(+)}$$

$$\frac{A(w_0x)-a_0}{w_0x}+\frac{A(w_1x)-a_0}{w_1x}+\frac{A(w_2x)-a_0}{w_2x}=$$

$$=3a_1+(w_0+w_1+w_2)a_2x+(w_0+w_1+w_2)a_3x^2+\ldots\Longrightarrow$$

$$\frac{A(w_0x)+w_2A(w_1x)+w_1A(w_2x)}{3x}=a_1+a_4x^3+a_7x^6+\ldots\Longrightarrow$$

$$\frac{A(w_0\sqrt[3]{x})+w_2A(w_1\sqrt[3]{x})+w_1A(w_2\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}}=a_1+a_4x+a_7x^2+\ldots.$$

Αρα η γεννήτρια συνάρτηση της υπακολουθίας $a_1, a_4, a_7, \ldots$ είναι η,

$$A_{3k-2}(x)=\frac{A(w_0\sqrt[3]{x})+w_2A(w_1\sqrt[3]{x})+w_1A(w_2\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}}$$

2. Εστω $A(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$. Τότε $A(-x) = a_0-a_1x+a_2x^2-\ldots$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε,

$$A(x) + A(-x) = 2a_0 + 2a_2x^2 + \ldots \Longrightarrow$$

$$\frac{A(x) + A(-x)}{2} = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots$$

και τελικά,

$$a_0 + a_2x + a_4x^2 + \ldots = \frac{A(\sqrt{x}) + A(-\sqrt{x})}{2}.$$

Αρα γεννήτρια συνάρτηση της υπακολουθίας των όρων με ζυγό δείκτη είναι η,

$$Z(x) = \frac{A(\sqrt{x}) + A(-\sqrt{x})}{2}$$

Ασκηση 2.14 *Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας a_0, a_1,a_2,..., όπου ο όρος a_r ισούται με τον αριθμό των τρόπων να επιλέξουμε r αντικείμενα με επαναλήψεις από 10 συνολικά αντικείμενα, μεταξύ των οποίων το αντικείμενο X μπορεί να επιλεγεί το πολύ δύο φορές, το αντικείμενο Y το πολύ τρείς φορές και τα υπόλοιπα αντικείμενα από μία το πολύ φορά.*

Θα δείξουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας είναι η,

$$A(z) = (1 + z + z^2)(1 + z + z^2 + z^3)(1 + z)^8$$

Πράγματι ο συντελεστής του z^r στο ανάπτυγμα της $A(z)$ είναι ο αριθμός των τρόπων δημιουργίας του όρου z^r από τους παράγοντες $1 + z + z^2, 1 + z + z^2 + z^3$ και τους οκτώ παράγοντες $1 + z$.

Η συνεισφορά του παράγοντα $1 + z + z^2$ είναι $1, z$ ή z^2 ανάλογα με το αν επιλέγουμε το αντικείμενο X μηδέν, μία ή δύο φορές. Ομοίως η συνεισφορά του παράγοντα $1+z+z^2+z^3$ είναι $1, z, z^2$ ή z^3 ανάλογα με το αν επιλέγουμε το αντικείμενο Y μηδέν, μία, δύο ή τρείς φορές. Τέλος η συνεισφορά καθενός από τους οκτώ παράγοντες $1+z$ είναι 1 ή z ανάλογα με το αν καθένα από τα υπόλοιπα οκτώ αντικειμένων επιλέγεται καμμία ή μία φορά.

Ασκηση 2.15 *Με τη χρήση απαριθμητών να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να επιλέξουμε r αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις από n αντικείμενα.*

Η γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ των απαριθμητών είναι η,

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)^n$$

αφού κάθε παρένθεση αντιστοιχεί στη δυνατότητά μας να επιλέξουμε κανένα, ένα, δύο, ... αντικείμενα από κάθε είδος, ενώ το γινόμενο των παρενθέσεων (ύψωση στη n-οστή δύναμη) αντιστοιχεί στο συνδυασμό των τρόπων επιλογής για τα n αντικείμενα μαζί. Ετσι έχουμε,

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)^n = (\frac{1}{1-x})^n = (1-x)^{-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!}(-1)^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

Αρα ο απαριθμητής για την επιλογή r αντικειμένων με επανάληψη από n αντικείμενα είναι ο συντελεστής του x^r στο άθροισμα, δηλαδή ο $\binom{n+r-1}{r}$.

Ασκηση 2.16 *Ποιός είναι ο απαριθμητής για τις επιλογές r αντικειμένων από n αντικείμενα ($r \geq n$), με απεριόριστες επαναλήψεις, αλλά κάθε αντικείμενο να επιλέγεται κάθε φορά.*

Αφού κάθε αντικείμενο από τα r μπορεί να επιλέγεται μία, δύο, τρείς, ... φορές, ο ζητούμενος απαριθμητής θα είναι,

$$A(x) = (x + x^2 + x^3 + \ldots)^n = (\frac{1}{1-x} - 1)^n = (\frac{1-1+x}{1-x})^n =$$

$$= (\frac{x}{1-x})^n = x^n(1-x)^{-n} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^{n+k}$$

Αρα ο αριθμός των τρόπων για την επιλογή r αντικειμένων από τα n με τον δοσμένο περιορισμό, κάθε αντικείμενο να επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά, δίνεται από τον συντελεστή του x^r, δηλαδή για $k = r - n$ και είναι ο $\binom{r-1}{r-n}$.

Ασκηση 2.17 *Να υπολογιστεί το άθροισμα,*

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{r!}{(r-i+1)!(i+1)!}$$

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{r!}{(r-i+1)!(i+1)!} = \sum_{i=0}^{r} \frac{r!(r+1)(r+2)}{(r-i+1)!(i+1)!} \cdot \frac{1}{(r+1)(r+2)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{r+2}{i+1} \frac{1}{(r+1)(r+2)} = \frac{1}{(r+1)(r+2)} \sum_{i=0}^{r} \binom{r+2}{i+1} =$$

$$= \frac{1}{(r+1)(r+2)} [\binom{r+2}{1} + \binom{r+2}{2} + \ldots + \binom{r+2}{r+1}] =$$

$$= \frac{1}{(r+1)(r+2)} [2^{r+2} - \binom{r+2}{0} - \binom{r+2}{r+2}] =$$

$$= \frac{1}{(r+1)(r+2)} (2^{r+2} - 1 - 1) = \frac{2^{r+2} - 2}{(r+1)(r+2)}$$

Ασκηση 2.18 *Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων, με τους οποίους 2t+1 μπάλλες μπορούν να τοποθετηθούν σε 3 διακεκριμμένα κουτιά, έτσι ώστε κάθε κουτί να μην περιέχει περισσότερες από t μπάλλες.*

Ο απαριθμητής του ζητούμενου αριθμού τρόπων για τις διάφορες τιμές του 2t+1 είναι ο,

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^t)(1 + x + x^2 + \ldots + x^t)(1 + x + x^2 + \ldots + x^t)$$

όπου κάθε παρένθεση συμβολίζει το γεγονός ότι σε κάθε κουτί μπορούμε να τοποθετήσουμε από 0 εώς και t μπάλλες, ενώ το γινόμενο των παρενθέσεων είναι ο ολικός τρόπος τοποθέτησης των μπαλλών στα 3 κουτιά (θα δίνεται από το συντελεστή του x^{2t+1} στο ανάπτυγμα της $A(x)$). Εχουμε,

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^t)^3 = (\frac{1 - x^{t+1}}{1-x})^3 =$$

$$= (1 - x^{t+1})^3 (1-x)^{-3} = (1 - 3x^{t+1} + 3x^{2t+2} - x^{3t+3}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k}(-1)^k x^k =$$

$$= (1 - 3x^{t+1} + 3x^{2t+2} - x^{3t+3}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k - 3\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{t+k+1} + 3\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{2t+2+k} - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{3t+3+k}$$

Αρα η ζητούμενη τιμή, δηλαδή ο συντελεστής του x^{2t+1} στο παραπάνω ανάπτυγμα, είναι $\binom{2t+3}{2} - 3\binom{t+2}{2}$.

Ασκηση 2.19 *Εχουμε 2 είδη αντικειμένων. Το είδος 1 έχει p αντικείμενα και το είδος 2 έχει q αντικείμενα. Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε r αντικείμενα;*

Εάν θέσουμε $m = min\{p, r\}$ και $n = min\{q, r\}$, τότε ο απαριθμητής A(x) των ζητούμενων τρόπων επιλογής είναι

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^m)(1 + x + x^2 + \ldots + x^n) = \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} =$$

$$= (1 - x^{m+1} - x^{n+1} + x^{m+n+2})(1 - x)^{-2} =$$

$$= (1 - x^{m+1} - x^{n+1} + x^{m+n+2}) \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)x^k$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1. Εάν $p + q < r$, τότε προφανώς οι ζητούμενοι τρόποι είναι 0.
2. Εάν $p + q > r$ και
   - $p > r, q > r$, τότε,
     $$A(x) = (1 - 2x^{r+1} + x^{2r+2}) \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)x^k$$
     και ο συντελεστής του x^r είναι r+1.
   - $p > r, q < r$, τότε,
     $$A(x) = (1 - x^{r+1} - x^{q+1} + x^{r+q+2}) \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)x^k,$$
     και ο συντελεστής του x^r είναι $(r + 1) - (r - q) = q + 1$.
   - $p < q, q > r$, τότε όμοια με την προηγούμενη υποπερίπτωση θα έχουμε $p + 1$.

Ασκηση 2.20 *Να προσδιοριστεί ο συντελεστής του x^{15} στο ανάπτυγμα της $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^4$.*

Αφού,

$$(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^4 = [x^2(1 + x + x^2 + \ldots)]^4 =$$

$$= (\frac{x^2}{1 - x})^4 = \frac{x^8}{(1 - x)^4},$$

ο συντελεστής του x^{15} στο ανάπτυγμα της $f(x)$ είναι ο συντελεστής του x^7 στο ανάπτυγμα του $(1 - x)^{-4}$, δηλαδή,

$$\binom{-4}{7}(-1)^7 = (-1)^7\binom{4+7-1}{7}(-1)^7 = \binom{10}{7} = 120.$$

Ασκηση 2.21 *Με πόσους τρόπους μπορεί ένας ταγματάρχης να μοιράσει 24 σφαίρες σε τέσσερις λοχίες έτσι ώστε κάθε λοχίας να πάρει τουλάχιστον τρείς σφαίρες αλλά όχι περισσότερες από οκτώ σφαίρες.*

Οι επιλογές για τον αριθμό των σφαιρών που παίρνει κάθε λοχίας δίνονται από την συνάρτηση $x^3 + x^4 + \ldots + x^8$. Ετσι ο απαριθμητής των ζητούμενων τρόπων διαμοίρασης, δεδομένου ότι οι λοχίες είναι τέσσερις, είναι ο $A(x) = (x^3 + x^4 + \ldots + x^8)^4$.

Αναζητούμε τον συντελεστή του x^{24} στο ανάπτυγμα της $A(x)$. Εχουμε,

$$(x^3 + x^4 + \ldots + x^8)^4 = x^{12}(1 + x + x^2 + \ldots + x^5)^4 =$$

$$= x^{12}(\frac{1 - x^6}{1 - x})^4$$

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός τρόπων είναι ο συντελεστής του x^{12} στο ανάπτυγμα της,

$$(1-x^6)^4(1-x)^{-4} =$$

$$= [1-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-\ldots+x^{24}][\binom{-4}{0}+\binom{-4}{1}(-x)+\binom{-4}{2}(-x)^2+\ldots]$$

ο οποίος είναι ο,

$$[\binom{-4}{12}(-1)^{12}-\binom{4}{1}\binom{-4}{6}(-1)^6+\binom{4}{2}\binom{-4}{0}] = [\binom{15}{12}-\binom{4}{1}\binom{9}{6}+\binom{4}{2}] = 125.$$

Ασκηση 2.22 *Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να τοποθετηθούν 25 όμοιες σφαίρες σε 7 διαφορετικά κουτιά, με μόνο τον περιορισμό ότι το πρώτο κουτί δεν επιτρέπεται να έχει πάνω από 10 σφαίρες;*

Η γεννήτρια συνάρτηση του αριθμού των τρόπων τοποθέτησης r σφαιρών σε 7 κουτιά, με τον περιορισμό να τοποθετηθούν το πολύ 10 σφαίρες στο πρώτο κουτί, είναι,

$$f(x) = (1+x+x^2+\ldots+x^{10})(1+x+x^2+\ldots)^6 =$$

$$= (\frac{1-x^{11}}{1-x})(\frac{1}{1-x})^6 = (1-x)^{-7}(1-x^{11}) =$$

$$= (1+\binom{7}{1}x+\binom{8}{2}x^2+\ldots+\binom{r+7-1}{r}x^r+\ldots)(1-x^{11})$$

Ζητάμε τον συντελεστή του x^{25} στο παραπάνω γινόμενο, ο οποίος δίνεται από το άθροισμα, [4]

$$\binom{25+7-1}{25}\cdot 1+\binom{14+7-1}{14}\cdot(-1) = \binom{31}{25}-\binom{20}{14} = 697521$$

Ασκηση 2.23 *Πόσοι τρόποι επιλογής 25 παιχνιδιών από μία γκάμα 7 συνολικά παιχνιδιών υπάρχουν, όταν μπορούμε να επιλέξουμε από δύο εώς έξι κομμάτια από κάθε παιχνίδι;*

Η γεννήτρια συνάρτηση για την a_r, δηλαδή την ακολουθία που δίνει τον αριθμό των τρόπων επιλογής r παιχνιδιών από 7 διαφορετικά παιχνίδια, με επιλογή από δύο εώς έξι κοματιών από κάθε παιχνίδι, είναι,

$$f(x) = (x^2+x^3+\ldots+x^6)^7 =$$

$$= [x^2(1+x+\ldots+x^4)]^7 = x^{14}(1+x+\ldots+x^4)^7$$

Αναζητούμε τον συντελεστή του x^{25} στο ανάπτυγμα της $f(x)$. Αυτός είναι ο συντελεστής του x^{11} στο ανάπτυγμα,

$$(1+x+\ldots+x^4)^7$$

Εχουμε,

$$(1+x+\ldots+x^4)^7 = (\frac{1-x^5}{1-x})^7 = (1-x)^{-7}(1-x^5)^7 =$$

$$= (1+\binom{1+7-1}{1}x+\ldots+\binom{r+7-1}{r}x^r+\ldots)\cdot$$

$$\cdot(1-\binom{7}{1}x^5+\ldots+(-1)^r\binom{7}{r}x^{5r}-\ldots-\binom{7}{7}x^{35})$$

Αρα ο συντελεστής του x^{11} στο παραπάνω γινόμενο είναι,

$$\binom{11+7-1}{11}\cdot 1+\binom{6+7-1}{6}\cdot(-\binom{7}{1})+\binom{1+7-1}{1}\cdot\binom{7}{2} =$$

$$= \binom{17}{11}-\binom{12}{6}\binom{7}{1}+\binom{7}{1}\binom{7}{2} = 6055$$

Ασκηση 2.24 *Με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων να προσδιορίσετε πόσα τετραμελή υποσύνολα του συνόλου $S = \{1,2,\ldots,15\}$ δεν περιέχουν συνεχόμενους ακεραίους.*

[4] Η απάντηση στην άσκηση μπορούσε να βρεθεί με το εξής συνδυαστικό επιχείρημα:
Μετρούμε όλους τους τρόπους τοποθέτησης 25 σφαιρών σε 7 κουτιά και αφαιρούμε απ' αυτούς εκείνους που δεν πληρούν τον δοσμένο περιορισμό. Ολοι οι τρόποι είναι $\binom{25+7-1}{25} = \binom{31}{25}$, ενώ ο αριθμός των τρόπων που δεν πληρούν τον περιορισμό βρίσκεται αν τοποθετήσουμε 11 από τις 25 σφαίρες στο πρώτο κουτί και τις υπόλοιπες αυθαίρετα σε όλα τα κουτιά, του πρώτου συμπεριλαμβανομένου, δηλαδή είναι ο $\binom{(25-11)+7-1}{25-11} = \binom{20}{14}$, πράγμα που επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα που βρέθηκε παραπάνω.

Εστω $A = \{a, b, c, d\}$ ένα τετραμελές υποσύνολο του S, που δεν περιέχει δύο συνεχόμενους ακεραίους. Χωρίς βλάβη της γενικότητος, αφού τα στοιχεία ενός συνόλου δεν θεωρούνται διατεταγμένα, θεωρούμε ότι $1 \leq a < b < c < d \leq 15$. Τότε υποχρεωτικά με βάση τους περιορισμούς που θέτει η άσκηση ισχύουν τα εξής,

$$c_1 = a - 1 \geq 0, c_2 = b - a \geq 2, c_3 = c - b \geq 2$$

$$c_4 = d - c \geq 2, c_5 = 15 - d \geq 0$$

Τέλος, είναι προφανές ότι έχουμε και,

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 14$$

Αντίστροφα, αν έχουμε πέντε ακεραίους c_1, c_2, c_3, c_4 και c_5 τέτοιους ώστε $c_1, c_5 \geq 0, c_2, c_3, c_4 \geq 2$ και $c_1 + c_2 + \ldots + c_5 = 14$ μπορούμε αυτομάτως να δημιουργήσουμε ένα τετραμελές υποσύνολο του S,

$$A = \{1 + c_1, 1 + c_1 + c_2, \ldots, 1 + c_1 + \ldots + c_4\}$$

Το υποσύνολον αυτό ικανοποιεί τον περιορισμό που τέθηκε από την άσκηση.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των τετραμελών υποσυνόλων του S, που δεν περιέχουν συνεχόμενους ακεραίους, και των ακεραίων λύσεων της παραπάνω εξίσωσης, με τους δοσμένους περιορισμούς. Η γεννήτρια συνάρτηση που δίνει τον αριθμό των λύσεων της πιο πάνω εξίσωσης είναι η,

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)(x^2 + x^3 + \ldots)^3(1 + x + x^2 + \ldots) =$$

$$= x^6(1 - x)^{-5}$$

Αναζητούμε τον συντελεστή του x^{14} στο ανάπτυγμα της $f(x)$ ή διαφορετικά τον συντελεστή του x^8 στο ανάπτυγμα του $(1 - x)^{-5}$. Αυτός είναι ο,

$$\binom{-5}{8}(-1)^8 = \binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = 495$$

Ασκηση 2.25 *Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας a_r, του αριθμού των τρόπων έκφρασης του r σαν άθροισμα διαφορετικών ακεραίων.*

Η ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση είναι η,

$$g(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \ldots (1 + x^k) \ldots.$$

Ο παράγοντας $1+x^k$ στο παραπάνω γινόμενο εκφράζει το γεγονός ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσομε τον ακέραιο k μία ή καμία φορά σ' ένα συγκεκριμένο άθροισμα για το σχηματισμό του ακεραίου r. Ετσι ο r μπορεί να σχηματιστεί με χρήση κάθε ακεραίου το πολύ μία φορά, όπως απαιτεί και η άσκηση.

Ασκηση 2.26 *Να δειχθεί με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων ότι κάθε θετικός ακέραιος μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο σαν άθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του 2.*

Η γεννήτρια συνάρτηση για την ακολουθία a_r του αριθμού των τρόπων να γράψουμε τον ακέραιο r σαν άθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του 2 είναι,

$$g(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \ldots (1 + x^{2^k}) \ldots.$$

Για να δείξουμε ότι κάθε ακέραιος μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο σαν άθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του 2, αρκεί να δείξουμε ότι ο συντελεστής κάθε δύναμης του x στην $g(x)$ είναι η μονάδα. Δηλαδή ότι,

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1 - x} \Longrightarrow$$

$$(1 - x)g(x) = 1$$

Αποδεικνύουμε αυτήν την ταυτότητα με την εξής αναδρομική τεχνική,

$$(1-x)g(x) = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots =$$

$$= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\ldots = (1-x^4)(1+x^4)\ldots =$$

$$= \ldots = 1$$

αφού η διαρκής αντικατάσταση του γινομένου $(1-x^{2^k})(1+x^{2^k})$ από το $1-x^{2^{k+1}}$ διαγράφει όλους τους παράγοντες της $g(x)$ τον έναν μετά τον άλλον με αποτέλεσμα να έχουμε τελικά,

$$(1-x)g(x) = 1 \Longrightarrow g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$$

Ασκηση 2.27 *Εστω $d_o(n)$ ο αριθμός των διαμερίσεων ενός ακεραίου n σε αθροίσματα που περιέχουν μόνο περιττούς όρους. Ορίζουμε $d_o(0) = 1$.*

1. *Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση $D_o(x)$ της ακολουθίας $d_o(0), d_o(1), \ldots$.*
2. *Εάν $d_d(n)$ είναι ο αριθμός των διαμερίσεων ενός ακεραίου n σε αθροίσματα που περιέχουν διαφορετικούς όρους, τί σχέση έχουν τα $D_d(x)$ και $D_o(x)$;*

1. Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $d_o(0), d_o(1), d_o(2), \ldots$ είναι η,

$$D_o(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + \ldots)\ldots =$$

$$= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\ldots$$

2. Εχουμε,

$$D_d(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots =$$

$$= \frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^6}{1-x^3}\ldots =$$

$$= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\ldots = D_o(x)$$

Ασκηση 2.28 *Βρείτε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για την a_r, τον αριθμό των μεταθέσεων r αντικειμένων από n αντικείμενα χωρίς επανάληψη.*

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι η,

$$f(x) = (1+x)^n$$

όπου κάθε παράγοντας στο παραπάνω γινόμενο αντιπροσωπεύει τη δυνατότητα να επιλέξουμε ή όχι ένα από τα n διαφορετικά αντικείμενα σε κάποια συγκεκριμένη μετάθεση r αντικειμένων. Το ότι η σειρά επιλογής παίζει ρόλο εκφράζεται από το γεγονός ότι θεωρούμε τον παραπάνω απαριθμητή σαν έναν εκθετικό απαριθμητή. Ετσι ο ζητούμενος αριθμός a_r είναι ο συντελεστής του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα της $f(x)$, δηλαδή στο,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

και επομένως, $a_r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Ασκηση 2.29 *Βρείτε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για το a_r, τον αριθμό των διαφορετικών μεταθέσεων r αντικειμένων, που επιλέγονται από τέσσερις διαφορετικούς τύπους αντικειμένων, εκ των οποίων τα αντικείμενα κάθε τύπου επιλέγονται τουλάχιστον δύο και όχι περισσότερες από πέντε φορές.*

Ο αριθμός των τρόπων να τοποθετήσουμε στη σειρά r αντικείμενα με e_i αντικείμενα του i-οστού τύπου είναι $\frac{r!}{e_1!e_2!e_3!e_4!}$. Για να υπολογίσομε το άθροισμα όλων αυτών των όρων, που πληρούν τους δοθέντες περιορισμούς, θέλουμε τον συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα της,

$$(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!})^4$$

Κάθε παράγοντας στο πιο πάνω γινόμενο αντιπροσωπεύει τη δυνατότητα επιλογής δύο, τριών, τεσσάρων ή πέντε αντικειμένων από κάθε ένα από τα τέσσερα είδη. Ο απαριθμητής λαμβάνεται εκθετικός γιατί προφανώς μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία παρουσιάζονται τα αντικείμενα στην κάθε μας επιλογή των r αντικειμένων.

Ασκηση 2.30 *Βρείτε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης r (διαφορετικών) ανθρώπων σε τρείς διαφορετικές αίθουσες με έναν τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα. Επαναλάβετε την παραπάνω άσκηση με τον περιορισμό ότι θα τοποθετηθεί ζυγός αριθμός ανθρώπων σε κάθε αίθουσα.*

Στην πρώτη περίπτωση η ζητούμενη εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι η,

$$f(x)=(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^3$$

όπου ο κάθε παράγοντας στο γινόμενο εκφράζει τη δυνατότητα τοποθέτησης ενός, δύο, τριών ή περισσοτέρων ανθρώπων σε κάθε μία από τις τρείς αίθουσες. Θεωρούμε τον εκθετικό απαριθμητή γιατί τόσο οι άνθρωποι όσο και οι αίθουσες στις οποίες τοποθετούνται, θεωρούνται διακεκριμένοι.

Με αντίστοιχο σκεπτικό η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για το δεύτερο ερώτημα της άσκησης είναι η,

$$g(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)^3$$

Ασκηση 2.31 *Βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών διατάξεων r αντικειμένων που επιλέγονται από απεριόριστο αριθμό αντικειμένων n διαφορετικών ειδών.*

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση που λύνει το ζητούμενο πρόβλημα είναι η,

$$f(x)=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^n=$$
$$=(e^x)^n=e^{nx}$$

Κάθε παράγοντας στο γινόμενο εκφράζει τη δυνατότητα επιλογής κανενός, ενός, δύο ή περισσοτέρων αντικειμένων από καθένα από τα n διαφορετικά είδη αντικειμένων. Ο εκθετικός απαριθμητής λαμβάνεται για να ληφθεί υπόψιν η σειρά με την οποία θα διαταχθούν τα επιλεγμένα αντικείμενα. Αναζητούμε τώρα τον συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα της $f(x)$. Αυτός είναι n^r.

Ασκηση 2.32 *Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης 25 διαφορετικών αντικειμένων σε 3 διαφορετικά κουτιά με ένα τουλάχιστον αντικείμενο σε κάθε κουτί.*

Στην άσκηση 2.30 είδαμε ότι ο εκθετικός απαριθμητής για το ανάλογο πρόβλημα τοποθέτησης r ανθρώπων σε τρείς αίθουσες με έναν τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα είναι ο,

$$f(x)=(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^3=(e^x-1)^3$$

Για να βρούμε τον συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα του $(e^x-1)^3$ πρέπει πρώτα να αναπτύξουμε αυτή τη διωνυμική έκφραση ως προς e^x. Εχουμε λοιπόν,

$$(e^x-1)^3=e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}3^r\frac{x^r}{r!}-3\sum_{r=0}^{\infty}2^r\frac{x^r}{r!}+3\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}-1=$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(3^r - 3\cdot 2^r + 3)\frac{x^r}{r!} - 1$$

Επομένως ο συντελεστής του $\frac{x^{25}}{25!}$ είναι ο $3^{25} - 3\cdot 2^{25} + 3$.

Ασκηση 2.33 *Βρείτε με τη βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων τον αριθμό των τετραδικών ακολουθιών r ψηφίων, που περιέχουν ζυγό αριθμό μηδενικών και μονό αριθμό μονάδων.*

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για το πρόβλημα είναι η,

$$f(x) = (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots)(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots)(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \cdot e^x \cdot e^x =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} - e^0 + e^0 - e^{-2x})e^{2x} = \frac{1}{4}(e^{4x} - 1)$$

Ετσι για θετικό r ο συντελεστής του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα της $f(x)$ είναι ο $\frac{1}{4}4^r = 4^{r-1}$.

Ασκηση 2.34 *Να βρεθεί ο εκθετικός απαριθμητής για τον αριθμό των τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε r ή λιγότερα αντικείμενα από r διακεκριμμένα αντικείμενα και να τα κατανείμουμε σε n διακεκριμμένες υποδοχές, με τα αντικείμενα μέσα σε κάθε υποδοχή ταξινομημένα.*

Θα υπολογίσουμε κατ' αρχάς τον εκθετικό απαριθμητή για τον αριθμό των τρόπων επιλογής ακριβώς r από r διακεκριμμένα αντικείμενα και κατανομής τους σε n διακεκριμμένες υποδοχές, με τα αντικείμενα σε κάθε υποδοχή ταξινομημένα. Αυτός είναι,

$$A(x) = (1 + 1!\frac{x}{1!} + 2!\frac{x^2}{2!} + 3!\frac{x^3}{3!} + \ldots)^n =$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^n = (\frac{1}{1-x})^n = (1-x)^{-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!}(-1)^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}\cdot\frac{x^k}{k!}$$

Αρα ο αριθμός των τρόπων κατανομής r διαφορετικών αντικειμένων σε n διακεκριμμένες υποδοχές είναι $\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$. Συνεπώς ο συνολικός αριθμός τρόπων επιλογής r ή λιγότερων αντικειμένων από r διακεκριμμένα αντικείμενα και κατανομής τους σε n διακεκριμμένες υποδοχές είναι,

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

και ο εκθετικός απαριθμητής του,

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}\cdot\frac{x^r}{r!}$$

Ασκηση 2.35 *Ενα πλοίο διαθέτει 48 σημαίες, από τις οποιές 12 κόκκινες, 12 άσπρες, 12 μπλέ και 12 μαύρες. Δώδεκα απ' αυτές τις σημαίες τοποθετούνται σε ένα κατακόρυφο ιστό προκειμένου να ανταλλάσσονται μηνύματα με άλλα πλοία. Πόσα απ' αυτά τα μηνύματα χρησιμοποιούν ζυγό αριθμό μπλέ σημαιών και μονό αριθμό μαύρων σημαιών;*

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτησις,

$$f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^2(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots)(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots)$$

συμπεριλαμβάνει όλα τα μηνύματα που αποτελούνται από n σημαίες,με $n \geq 1$. Οι δύο τελευταίες παρενθέσεις περιορίζουν τα μηνύματα έτσι ώστε να αποτελούνται από ζυγό αριθμό μπλέ σημαιών και μονό αριθμό μαύρων σημαιών. Εχουμε,

$$f(x) = (e^x)^2(\frac{e^x + e^{-x}}{2})(\frac{e^x - e^{-x}}{2}) = \frac{1}{4}e^{2x}(e^{2x} - e^{-2x}) =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{4x} - 1) = \frac{1}{4}(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(4x)^i}{i!} - 1) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(4x)^i}{i!}$$

Επομένως ο συντελεστής του $\frac{x^{12}}{12!}$ που είναι και ο ζητούμενος αριθμός μηνυμάτων είναι,

$$\frac{1}{4}4^{12} = 4^{11} = 4194304$$

Ασκηση 2.36 *Μία εταιρεία προσλαμβάνει 11 νέους υπαλλήλους. Κάθε υπάλληλος τοποθετείται σε ένα από τα τέσσερα υποκαταστήματα της εταιρείας και κάθε υποκατάστημα ενισχύεται με έναν τουλάχιστον νέο υπάλληλο. Με πόσους τρόπους μπορούν να γίνουν οι τοποθετήσεις των νεοπροσληφθέντων υπαλλήλων;*

Εστω A, B, C και D τα υποκαταστήματα της παραπάνω εταιρείας. Ο ζητούμενος αριθμός τρόπων ισούται τότε με τον αριθμό των ακολουθιών 11 γραμμάτων από το σύνολον $\{A, B, C, D\}$, όπου κάθε γράμμα πρέπει να εμφανίζεται μία τουλάχιστον φορά. [5] Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό αυτών των διατάξεων είναι,

$$f(x) = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^4 = (e^x - 1)^4 =$$

$$= e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$$

Ο ζητούμενος αριθμός είναι ο συντελεστής του $\frac{x^{11}}{11!}$ στο ανάπτυγμα της $f(x)$. Αυτός είναι,

$$4^{11} - 4 \cdot 3^{11} + 6 \cdot 2^{11} - 4 \cdot 1^{11} = \sum_{i=0}^{4}(-1)^i\binom{4}{i}(4 - i)^{11}.$$

Ασκηση 2.37 *Να υπολογισθεί ο αριθμός των επί συναρτήσεων από ένα σύνολο r στοιχείων σε ένα σύνολον n στοιχείων ($r \geq n$). Στη συνέχεια να υπολογισθεί ο αριθμός των διαμερίσεων ενός συνόλου με r στοιχεία σε n μη κενές κλάσεις ισοδυναμίας.*

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για την ακολουθία a_r του αριθμού των επί συναρτήσεων από ένα σύνολον r στοιχείων σε ένα σύνολο n στοιχείων είναι η,

$$f(x) = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^n$$

Κάθε ένας από τους n παράγοντες του παραπάνω γινομένου εκφράζει το γεγονός ότι σε κάθε ένα από τα n στοιχεία του πεδίου τιμών πρέπει να αντιστοιχίζεται ένα τουλάχιστο στοιχείο του πεδίου ορισμού. Ο εκθετικός απαριθμητής λαμβάνεται για να συνυπολογισθεί το γεγονός ότι τόσο το πεδίο ορισμού όσο και το πεδίο τιμών αποτελούνται από διακεκριμένα στοιχεία.

Αναζητούμε τον συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα της $f(x)$,

$$f(x) = (e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{(n-k)x} =$$

[5] Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των επί συναρτήσεων $g : X \longrightarrow Y$, με $|X| = 11$ και $|Y| = 4$. Το ίδιο πρόβλημα γενικευμένο μελετάται στην άσκηση 3.4.

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[(n-k)x]^i}{i!}$$

Αρα ο ζητούμενος αριθμός των επί συναρτήσεων είναι ο,

$$a_r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^r.$$

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι το δεύτερο ερώτημα της άσκησης είναι ισοδύναμο με το πρώτο.

Κεφάλαιο 3

Σχέσεις Αναδρομής

I saw a man down on lonely street
A broken man who looked like me
And no one knows the pain that he's been living
He lost his love and still hasn't forgiven
He said: I've been through some changes
But one thing always stays the same

Whithout love,there's nothing whithout love
Nothing else can get you through the night
Nothing else feels right whithout love
There's nothing whithout love
Nothing else but love can burn as bright
And nothing would mean nothing without love

Without Love
BON JOVI

Ασκηση 3.1 *Να λυθούν οι παρακάτω σχέσεις αναδρομής με δύο τρόπους:*

1.
$$a_n + a_{n-1} + \frac{1}{4}a_{n-2} = 0, a_0 = 0, a_1 = 1$$

2.
$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2, a_0 = 6, a_1 = 7$$

3.
$$a_n = 2a_{n-1} + 1, a_0 = 1$$

4.
$$a_n = 2a_{n-1} + n, a_1 = 1$$

5.
$$a_n + 6a_{n-1} + 12a_{n-2} + 8a_{n-3} = 0, a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = 8$$

6.
$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2^n, a_0 = 1, a_1 = 1$$

1. **1ος τρόπος:**

   Εστω $a_n = Ax^n$. Τότε θα πάρουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση της αναδρομικής σχέσης, η οποία είναι η $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$, με ρίζες τις $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$ (διπλή ρίζα). Αρα $a_n = (An + B)(-\frac{1}{2})^n$ και από τις αρχικές συνθήκες $a_0 = B = 0$ και $a_1 = -\frac{1}{2}(A + B) = -\frac{1}{2}A = 1 \Longrightarrow A = -2$, οπότε τελικά

$$a_n = -2n(-\frac{1}{2})^n, \ \forall n \in N$$

   2ος τρόπος:

   Είναι,

$$a_n + a_{n-1} + \frac{1}{4}a_{n-2} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty}[a_k x^k + a_{k-1}x^k + \frac{1}{4}a_{k-2}x^k] = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k + x\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}x^{k-1} + \frac{1}{4}x^2\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^{k-2} = 0 \overbrace{\Longleftrightarrow}^{A(x)\ \text{γεννητρια της}\ a_n}$$

$$A(x) - a_0 - a_1 x + x[A(x) - a_0] + \frac{1}{4}x^2 A(x) = 0 \overbrace{\Longleftrightarrow}^{a_0=0, a_1=1}$$

$$A(x) - x + xA(x) + \frac{1}{4}x^2 A(x) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$A(x) = \frac{x}{\frac{1}{4}x^2 + x + 1} = \frac{4x}{x^2 + 4x + 4} \Longleftrightarrow$$

$$A(x) = \frac{4x}{(x+2)^2} = \frac{x}{(1+\frac{x}{2})^2} = x\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}(\frac{x}{2})^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}(\frac{1}{2})^k x^{k+1}$$

   Αρα,

$$a_n = \binom{-2}{n-1}(\frac{1}{2})^{n-1} = -2n(-\frac{1}{2})^n, \ \forall n \in N$$

2. **1ος τρόπος:**

Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή της γραμμικής, που είναι η $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ και παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωσή της για να βρούμε την ομογενή λύση της γραμμικής:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 2, \text{ διπλ ρζα.}$$

Αρα,

$$a_n^{(h)} = (An + B)2^n.$$

Επιχειρούμε τώρα να βρούμε την ειδική λύση της γραμμικής. Δοκιμάζουμε την $a_n^{(p)} = Cn+D$ και έχουμε,

$$Cn + D - 4(Cn - C + D) + 4(Cn - 2C + D) = n + 2 \Longleftrightarrow$$

$$Cn + D - 4C = n + 2 \Longleftrightarrow (C = 1, D = 6)$$

Αρα $a_n^{(p)} = n + 6$. Επομένως η δοθείσα γραμμική έχει γενική λύση,

$$a_n = (An + B)2^n + n + 6 \overbrace{\Longrightarrow}^{n=0,n=1} \left\{ \begin{array}{l} B + 6 = 6 \\ 2A + 2B + 7 = 7 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ A = 0 \end{array} \right\}.$$

Αρα η γενική λύση της δοθείσης γραμμικής είναι η,

$$a_n = n + 6, \ \forall n \in N$$

2ος τρόπος:

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2 \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k - 4x \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1} + 4x^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} (k+2) x^k \Longleftrightarrow$$

$$A(x) - a_0 - a_1 x - 4x[A(x) - a_0] + 4x^2 A(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2} - (2 + 3x) \Longleftrightarrow$$

$$(4x^2 - 4x + 1)A(x) - 6 - 7x + 24x = \frac{2-x}{(1-x)^2} - (2 + 3x) \Longleftrightarrow$$

$$A(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2(2x-1)^2} + \frac{4-20x}{(2x-1)^2} = \frac{-5x+6}{(1-x)^2} \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{5}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} = 5 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-1)^k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-1)^k x^k$$

Αρα,

$$a_n = 5\binom{-1}{n}(-1)^n + \binom{-2}{n}(-1)^n = 5 + n + 1 = n + 6, \ \forall n \in N.$$

3. **1ος τρόπος:**

Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή της γραμμικής και παίρνουμε τη χαρακτηριστική της εξίσωση προκειμένου να προσδιορίσουμε την ομογενή λύση της γραμμικής. Είναι,

$$a_n - 2a_{n-1} = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση $x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$, οπότε $a_n^{(h)} = A2^n$. Στη συνέχεια επιχειρούμε να βρούμε την ειδική λύση της γραμμικής. Εστω $a_n^{(p)} = C$. Τότε,

$$C - 2C = 1 \Longrightarrow -C = 1 \Longrightarrow C = -1$$

Αρα η γενική λύση της γραμμικής είναι,

$$a_n = A2^n - 1 \overbrace{\Longrightarrow}^{n=0} A - 1 = 1 \Longrightarrow A = 2$$

Αρα,

$$a_n = 2^{n+1} - 1,\ \forall n \in N$$

2ος τρόπος:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot x^k \Longrightarrow$$

$$A(x) - a_0 - 2xA(x) = \frac{1}{1-x} - 1 \Longrightarrow A(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} = -\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k}(-1)^k x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k}(-2)^k x^k.$$

Αρα,

$$a_n = 2^{n+1} - 1,\ \forall n \in N$$

4. **1ος τρόπος:**

Είναι $a_n = 2a_{n-1} + n, a_1 = 1$. Θέτουμε $a_0 = 0$ ώστε η δοθείσα να ισχύει $\forall n \in N$. Εχουμε $a_n - 2a_{n-1} = 0$ η αντίστοιχη ομογενής και έτσι η χαρακτηριστική εξίσωση είναι,

$$x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

οπότε $a_n^{(h)} = A2^n$. Για την ειδική λύση δοκιμάζουμε την $a_n^{(p)} = Cn + D$ και έχουμε,

$$Cn + D - 2[C(n-1) + D] = n \Longrightarrow -Cn + 2C - D = n \Longrightarrow$$

$$(C = -1, D = -2)$$

Αρα,

$$a_n^{(p)} = -n - 2$$

Ετσι η γραμμική σχέση έχει γενική λύση,

$$a_n = A2^n - n - 2 \overbrace{\Longrightarrow}^{n=0} A - 2 = 0 \Longrightarrow A = 2$$

δηλαδή,

$$a_n = 2^{n+1} - n - 2,\ \forall n \in N$$

2ος τρόπος:

$$a_n = 2a_{n-1} + n \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k - 2x\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \Longrightarrow$$

$$A(x) - a_0 - 2xA(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1-2x)} = -\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{(1-x)^2} \Longrightarrow$$

$$A(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k}(-2)^k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k}(-1)^k x^k$$

Αρα,

$$a_n = -1 + 2^{n+1} - (n+1) = 2^{n+1} - n - 2,\ \forall n \in N$$

5. **1ος τρόπος:**

Εχουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^3+6x^2+12x+8=0\Longrightarrow$$

$$x^3+2x^2+4x^2+8x+4x+8=0\Longrightarrow$$

$$x^2(x+2)+4x(x+2)+4(x+2)=0\Longrightarrow(x+2)(x^2+4x+4)=0\Longrightarrow$$

$$(x+2)^3=0\Longrightarrow x=-2,\ \text{τριπλ ρζα},$$

Επομένως,

$$a_n=(An^2+Bn+C)(-2)^n\overbrace{\Longrightarrow}^{n=0,1,2}\left\{\begin{array}{l}C=1\\(A+B+C)(-2)=-2\\(4A+2B+C)(-2)^2=8\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}C=1\\A+B+C=1\\4A+2B+C=2\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}C=1\\A+B=0\\4A-2A=1\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=\frac{1}{2}\\B=-\frac{1}{2}\\C=1\end{array}\right\}$$

Αρα,

$$a_n=(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1)(-2)^n,\ \forall n\in N$$

2ος τρόπος:

$$a_n+6a_{n-1}+12a_{n-2}+8a_{n-3}=0\Longrightarrow$$

$$\sum_{k=3}^{\infty}a_kx^k+6x\sum_{k=3}^{\infty}a_{k-1}x^{k-1}+12x^2\sum_{k=3}^{\infty}a_{k-2}x^{k-2}+8x^3\sum_{k=3}^{\infty}a_{k-3}x^{k-3}=0\Longrightarrow$$

$$A(x)-a_0-a_1x-a_2x^2+6x[A(x)-a_0-a_1x]+$$

$$+12x^2[A(x)-a_0]+8x^3A(x)=0\Longrightarrow$$

$$(8x^3+12x^2+6x+1)A(x)-12x^2-6x+12x^2-8x^2+2x-1=0\Longrightarrow$$

$$A(x)=\frac{8x^2+4x+1}{8x^3+12x^2+6x+1}=\frac{8x^2+4x+1}{(2x+1)^3}=$$

$$=\frac{2}{2x+1}+\frac{-2}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^3}\Longrightarrow$$

$$A(x)=2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}2^kx^k-2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}2^kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{k}2^kx^k$$

Αρα,

$$a_k=2(-1)^k2^k-2(-1)^k(k+1)2^k+(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}2^k\Longrightarrow$$

$$a_n=(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1)(-2)^n,\ \forall n\in N$$

6. **1ος τρόπος:**

Η αντίστοιχη ομογενής της γραμμικής είναι η,

$$a_n+2a_{n-1}+a_{n-2}=0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^2+2x+1=0\Longrightarrow x=-1\ \text{διπλ ρζα}.$$

Αρα η $a_n^{(h)} = (An+B)(-1)^n$. Για να βρούμε την ειδική λύση της γραμμικής δοκιμάζουμε την $a_n^{(p)} = C2^n$. Εχουμε,

$$C2^n + 2C2^{n-1} + C2^{n-2} = 2^n \Longrightarrow 4C + 4C + C = 4 \Longrightarrow$$

$$9C = 4 \Longrightarrow C = \frac{4}{9}$$

Αρα $a_n^{(p)} = \frac{2^{n+2}}{9}$. Επομένως,

$$a_n = (An+B)(-1)^n + \frac{2^{n+2}}{9} \overset{n=0,1}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} B + \frac{4}{9} = 1 \\ -A - B + \frac{8}{9} = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \frac{5}{9} \\ A = -\frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

Αρα,

$$a_n = (-\frac{2n}{3} + \frac{5}{9})(-1)^n + \frac{2^{n+2}}{9},\ \forall n \in N$$

2ος τρόπος:

$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2^n \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k + 2x \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1} + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} 2^k x^k \Longrightarrow$$

$$A(x) - a_0 - a_1 x + 2x[A(x) - a_0] + x^2 A(x) = \frac{1}{1-2x} - 1 - 2x \Longrightarrow$$

$$(x^2 + 2x + 1)A(x) - 1 - x - 2x = \frac{4x^2}{1-2x} \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{4x^2}{(1-2x)(x+1)^2} - \frac{3x+1}{(x+1)^2} \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1-2x} + (-\frac{16}{9}) \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1-2x} + \frac{11}{9} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{4}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-2)^k x^k + \frac{11}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^k - \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} x^k$$

Αρα,

$$a_n = \frac{4}{9} 2^n + \frac{11}{9}(-1)^n - \frac{2}{3}(n+1)(-1)^n \Longrightarrow$$

$$a_n = (-\frac{2n}{3} + \frac{5}{9})(-1)^n + \frac{2^{n+2}}{9},\ \forall n \in N$$

Ασκηση 3.2 *Να υπολογιστούν οι πιο κάτω $n \times n$ ορίζουσες με τη βοήθεια των σχέσεων αναδρομής:*

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\ 1}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \sigma\tau\lambda\eta\ 1}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Αρα $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, όπου $a_1 = 1$ και $a_2 = 0$. Η σχέση αυτή είναι ομογενής αναδρομική. Η χαρακτηριστική της εξίσωση $x^2 - x + 1 = 0$, έχει ρίζες,

$$x_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Επομένως,

$$a_n = A(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n + B(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^n =$$

$$= A(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^n + B(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3})^n =$$
$$= A\cos\frac{n\pi}{3} + Ai\sin\frac{n\pi}{3} + B\cos\frac{n\pi}{3} - Bi\sin\frac{n\pi}{3} =$$
$$= (A+B)\cos\frac{n\pi}{3} + (A-B)i\sin\frac{n\pi}{3}$$

Αν λοιπόν θέσουμε $A+B=C$ και $(A-B)i = D$ θα έχουμε,

$$a_n = C\cos\frac{n\pi}{3} + D\sin\frac{n\pi}{3} \overbrace{\Longrightarrow}^{n=1,2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}D = 1 \\ -\frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}D = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = 1 \\ D = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right\}$$

οπότε τελικά η γενική λύση της αναδρομικής σχέσης, δηλαδή η $n \times n$ ορίζουσα, έχει τιμή,

$$a_n = \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\ 1}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \sigma\tau\lambda\eta\ 1}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Αρα $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, όπου $a_1 = 2$ και $a_2 = 3$. Η αναδρομική αυτή ομογενής σχέση έχει χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 - 2x + 1 = 0$, με διπλή χαρακτηριστική ρίζα $x_1 = x_2 = 1$. Αρα η γενική της λύση είναι,

$$a_n = (An+B)(1)^n = An + B$$

και από τις αρχικές συνθήκες για $n = 1, 2$ έχουμε,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = A + B = 2 \\ a_2 = 2A + B = 3 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \end{array} \right\}$$

Αρα,

$$a_n = n+1,\ \forall n \in N^*$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\ 1}$$

$$= (1+a^2)\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} -$$

$$-a\begin{vmatrix} a & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \sigma\tau\lambda\eta\ 1}$$

$$= (1+a^2)\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} -$$

$$-a^2\begin{vmatrix} 1+a^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Αρα $b_n = (1+a^2)b_{n-1} - a^2 b_{n-2}$, με $b_1 = 1+a^2$ και $b_2 = a^4+a^2+1$. Η σχέση αυτή είναι ομογενής γραμμική σχέση αναδρομής με χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^2 - (1+a^2)x + a^2 = 0 \Longrightarrow (x_1 = 1 \vee x_2 = a^2)$$

Αρα έχει γενική λύση,

$$b_n = A1^n + Ba^{2n} = A + Ba^{2n} \overbrace{\Longrightarrow}^{n=1,2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A + Ba^2 = 1+a^2 \\ A + Ba^4 = a^4+a^2+1 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \frac{1+a^2}{a^2} - \frac{A}{a^2} \\ A + a^2(1+a^2) - a^2 A = a^4+a^2+1 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \frac{a^4}{a^2(a^2+1)} \\ A = \frac{1}{1-a^2} \end{array} \right\}$$

Επομένως,

$$b_n = \frac{1}{1-a^2} + \frac{a^{2(n+2)}}{a^2(a^2-1)} \Longrightarrow$$

$$b_n = \frac{1}{1-a^2} - \frac{a^{2(n+1)}}{1-a^2},\ \forall n \in N^*$$

Ασκηση 3.3 *Εστω ότι στρίβουμε ένα νόμισμα n φορές. Υπάρχουν προφανώς 2^n ακολουθίες πιθανών αποτελεσμάτων. Ποιός είναι ο αριθμός των ακολουθιών των αποτελεσμάτων, στις οποίες ποτέ δεν εμφανίζεται "Κεφάλι" (Κ) σε διαδοχικά στριψίματα;*

Εστω μία ακολουθία μήκους n από Κ και Γ που δίνει ένα πιθανό αποτέλεσμα. Ας πάρουμε την τελευταία θέση στην ακολουθία και ας τη σημειώσουμε σαν "ξεχωριστή θέση". Τότε αν a_n είναι ο αριθμός των ακολουθιών μήκους n, στις οποίες δεν έχουμε δύο διαδοχικά Κ, θα έχουμε την εξής σχέση: Εάν στη θέση n, που ξεχωρίσαμε, έχουμε Γ, τότε θεωρούμε τις θέσεις από 1 εώς n-1 σαν μία νέα ακολουθία μήκους n-1, στην οποία πάλι δεν πρέπει να έχουμε δύο Κ γειτονικά, ενώ αν στη θέση n έχουμε Κ, τότε επειδή στη θέση n-1 πρέπει υποχρεωτικά να έχουμε Γ, παίρνουμε σαν νέα ακολουθία τις θέσεις από 1 εώς n-2. Σ' αυτές η ακολουθία μήκους n-2 δεν πρέπει να έχει δύο διαδοχικά Κ. Ετσι έχουμε την ομογενή αναδρομική σχέση $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, με αρχικές συνθήκες $a_1 = 2$ και $a_2 = 3$.

Αυτή έχει χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow (x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$$

Ετσι,

$$a_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \overbrace{\Longrightarrow}^{n=1,2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\sqrt{5}}{2}A + \frac{1-\sqrt{5}}{2}B = 2 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}A + \frac{3-\sqrt{5}}{2}B = 3 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \end{array} \right\}$$

Αρα,

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n,\ \forall n \in N^*.$$

Ασκηση 3.4 *Να βρεθεί με τη βοήθεια των σχέσεων αναδρομής ο αριθμός των δυαδικών ακολουθιών μήκους n, που δεν περιλαμβάνουν διαδοχικά μηδενικά.*

Για $n \geq 0$, έστω a_n ο αριθμός των δυαδικών ακολουθιών μήκους n, που δεν περιέχουν διαδοχικά μηδενικά. Ας είναι $a_n^{(0)}$ ο αριθμός αυτών των ακολουθιών που τελειώνουν σε μηδέν και $a_n^{(1)}$ αυτών που τελειώνουν σε ένα. Προφανώς $a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)}$. Επίσης ισχύει η αναδρομική σχέση,

$$a_n = 2a_{n-1}^{(1)} + 1a_{n-1}^{(0)}$$

αφού από μία δυαδική ακολουθία n-1 ψηφίων που τελειώνει σε ένα, μπορούμε να πάρουμε δύο αποδεκτές ακολουθίες n ψηφίων προσθέτοντας στο τέλος έναν άσσο ή ένα μηδενικό, ενώ από μία δυαδική ακολουθία n-1 ψηφίων, που τελειώνει σε μηδέν, μπορούμε να πάρουμε μόνο μία αποδεκτή ακολουθία n ψηφίων προσθέτοντας έναν άσσο στο τέλος της. Συνεπώς θα έχουμε,

$$a_n = a_{n-1}^{(1)} + [a_{n-1}^{(1)} + a_{n-1}^{(0)}] =$$

$$= a_{n-1}^{(1)} + a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Αρα η σχέση αναδρομής που επιλύει το πρόβλημα είναι η $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, με $n \geq 2$ και $a_0 = 1, a_1 = 2$. Η σχέση αυτή είναι ομογενής αναδρομική δευτέρου βαθμού με χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 - x - 1 = 0$.

Από την Ασκηση 3.3 έχουμε ($x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$). Ετσι η αναδρομική σχέση έχει γενική λύση της μορφής,

$$a_n = A(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Αρα από αρχικές συνθήκες $a_0 = 1$ και $a_1 = 2$ έχουμε,

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}A + \frac{1+\sqrt{5}}{2}B = 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \\ B = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \end{array} \right\}$$

Επομένως ο αριθμός των δυαδικών ακολουθιών μήκους n που δεν περιέχουν συνεχόμενα μηδενικά είναι,

$$a_n = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{10})^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

Ασκηση 3.5 *Να λυθούν οι παρακάτω σχέσεις αναδρομής:*

1. $$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3, T(1) = 1$$

2. $$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1, T(1) = 1$$

3. $$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n, T(1) = 1$$

4. $$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + 2n^{1.5}, T(1) = 1$$

5. $$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log n, T(1) = 1$$

6. $$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \log n, T(1) = 1$$

1. $$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3 = 8[8T(\frac{n}{2^2}) + (\frac{n}{2})^3] + n^3 =$$

$$= 8^2T(\frac{n}{2^2}) + 8(\frac{n}{2})^3 + n^3 = 8^2[8T(\frac{n}{2^3}) + (\frac{n}{2^2})^3] + 8(\frac{n}{2})^3 + n^3 =$$

$$= 8^3T(\frac{n}{2^3}) + 8^2(\frac{n}{2^2})^3 + 8(\frac{n}{2})^3 + n^3 = \ldots =$$

$$= 8^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} 8^k(\frac{n}{2^k})^3$$

Ετσι αν θεωρήσουμε $n = 2^i$ έχουμε,

$$T(n) = (2^3)^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1}(2^3)^k(\frac{n}{2^k})^3 \Longrightarrow$$

$$n^3 + \sum_{k=0}^{i-1} n^3 = T(n) \Longrightarrow T(n) = n^3 + n^3\log n$$

Αρα $T(n) = O(n^3\log n)$.

2.

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1 = T(\frac{n}{2^2}) + 1 + 1 = T(\frac{n}{2^3}) + 3 = \ldots =$$
$$= T(\frac{n}{2^i}) + i$$

Εστω ότι $n = 2^i$. Τότε,

$$T(n) = \log n + 1 \Longrightarrow T(n) = O(\log n)$$

3.

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n = 2[2T(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2}] + n =$$
$$= 2^2T(\frac{n}{2^2}) + 2n = 2^2[2T(\frac{n}{2^3}) + \frac{n}{2^2}] + 2n =$$
$$= 2^3T(\frac{n}{2^3}) + 3n = \ldots = 2^iT(\frac{n}{2^i}) + in$$

Επομένως άν $n = 2^i$, έχουμε,

$$T(n) = n + n\log n \Longrightarrow T(n) = O(n\log n)$$

4.

$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + 2n^{1.5} = 3[3T(\frac{n}{2^2}) + 2(\frac{n}{2})^{1.5}] + 2n^{1.5} =$$
$$= 3^2T(\frac{n}{2^2}) + 3 \cdot 2(\frac{n}{2})^{1.5} + 2n^{1.5} =$$
$$= 3^2[3T(\frac{n}{2^3}) + 2(\frac{n}{2^2})^{1.5}] + 3 \cdot 2(\frac{n}{2})^{1.5} + 2n^{1.5} =$$
$$= 3^3T(\frac{n}{2^3}) + 3^2 \cdot 2(\frac{n}{2^2})^{1.5} + 3 \cdot 2(\frac{n}{2})^{1.5} + 2n^{1.5} = \ldots =$$
$$= 3^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} 3^k \cdot 2(\frac{n}{2^k})^{1.5}$$

Αρα αν $n = 2^i$ έχουμε,

$$T(n) = 3^i + \sum_{k=0}^{i-1} 3^k \cdot 2(\frac{n}{2^k})^{1.5} = 3^i + 2n^{1.5}\sum_{k=0}^{i-1} \frac{3^k}{(2^{1.5})^k} =$$
$$= 3^i + 2n^{1.5}\frac{(\frac{3}{2^{1.5}})^i - 1}{\frac{3}{2^{1.5}} - 1} = 3^i + \frac{(1.06)^i - 1}{0.06}2n^{1.5} \Longrightarrow$$
$$T(n) = O(33n^{1.5}(1.06)^{\log n}) = O(n^{1.5}(1.06)^{\log n})$$

5.

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log n = 2[2T(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2}\log\frac{n}{2}] + n\log n =$$
$$= 2^2T(\frac{n}{2^2}) + 2\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} + n\log n =$$
$$= 2^2[2T(\frac{n}{2^3}) + \frac{n}{2^2}\log\frac{n}{2^2}] + 2\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} + n\log n =$$
$$= 2^3T(\frac{n}{2^3}) + n\log\frac{n}{2^2} + n\log\frac{n}{2} + n\log n = \ldots =$$
$$= 2^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} n\log\frac{n}{2^k}$$

Αν $2^i = n$, έχουμε,

$$T(n) = n + n[\log n + \log\frac{n}{2} + \ldots + \log\frac{n}{2^{i-1}}] =$$

$$= n + n\log\frac{n^i}{2^0 2^1 \dots 2^{i-1}} = n + n\log\frac{n^i}{2^{\frac{i(i-1)}{2}}} =$$

$$= n(\log n)^2 - \frac{(\log n)^2}{2} + \frac{\log n}{2} + n = O(n(\log n)^2)$$

6.

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \log n = 2[2T(\frac{n}{2^2}) + \log\frac{n}{2}] + \log n =$$

$$= 2^2 T(\frac{n}{2^2}) + 2\log\frac{n}{2} + \log n =$$

$$= 2^2[2T(\frac{n}{2^3}) + \log\frac{n}{2^2}] + 2\log\frac{n}{2} + \log n =$$

$$= 2^3 T(\frac{n}{2^3}) + 2^2\log\frac{n}{2^2} + 2\log\frac{n}{2} + \log n = \dots =$$

$$= 2^i T(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k \log\frac{n}{2^k}$$

Αρα αν $2^i = n$ έχουμε,

$$T(n) = n + \sum_{k=0}^{i-1}[2^k \log n] - \sum_{k=0}^{i-1} 2^k \log 2^k =$$

$$= n + \log n \sum_{k=0}^{i-1} 2^k - \sum_{k=0}^{i-1} k2^k =$$

$$= n + (2^i - 1)\log n - (i2^i - 2^{i+1} + 2) =$$

$$= n + n\log n - \log n - (n\log n - 2n + 2) = 3n - \log n - 2$$

Αρα $T(n) = O(n)$.

Ασκηση 3.6 *Εστω a_r ο αριθμός των τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε (με επαναλήψεις) r γράμματα από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$, με τον περιορισμό ότι το γράμμα 0 θα επιλεγεί ζυγές φορές. Βρείτε μία σχέση αναδρομής για το πρόβλημα και λύστε τη.(Βλέπε και Κεφάλαιο 2 για ένα άλλο τρόπο με γεννήτριες συναρτήσεις)*

Εστω a_r ο ζητούμενος αριθμός. Ως γνωστόν το συνολικό πλήθος των τρόπων επιλογής r γραμμάτων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$, με επαναλήψεις, είναι,

$$\binom{r+2}{2} = \frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

Εάν πάρουμε μία τυχαία επιλογή r γραμμάτων, τότε αυτή μπορεί να προκύψει κατά μοναδικό τρόπο είτε από μία έγκυρη επιλογή r-1 γραμμάτων με την προσθήκη ενός μηδενικού, εάν η τυχαία επιλογή είναι άκυρη, είτε από μία έγκυρη επιλογή r γραμμάτων χωρίς αλλαγή, εάν η τυχαία επιλογή είναι έγκυρη. Ετσι έχουμε τη σχέση αναδρομής

$$a_{r-1} + a_r = \frac{(r+1)(r+2)}{2} \quad a_n + a_{n-1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Αυτή είναι μη ομογενής γραμμική αναδρομική εξίσωση με αντίστοιχη ομογενή,

$$a_n + a_{n-1} = 0$$

που έχει χαρακτηριστική εξίσωση $x + 1 = 0$ και απλή ρίζα $x = -1$. Αρα η ομογενής λύσις της γραμμικής είναι $a_n^{(h)} = A(-1)^n$. Για να βρούμε την ειδική λύση δοκιμάζουμε την $a_n^{(p)} = Bn^2 + Cn + D$. Είναι,

$$Bn^2 + Cn + D + Bn^2 - 2Bn + B + Cn - C + D = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + \frac{2}{2} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2B=\frac{1}{2} \\ -2B+2C=\frac{3}{2} \\ B-C+2D=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} B=\frac{1}{4} \\ C=1 \\ D=\frac{7}{8} \end{array}\right\}$$

Αρα $a_n^{(p)}=\frac{1}{4}n^2+n+\frac{7}{8}$, επομένως,

$$a_n=A(-1)^n+\frac{1}{4}n^2+n+\frac{7}{8}\overbrace{\Longrightarrow}^{n=1}$$

$$\frac{1}{4}+1+\frac{7}{8}-A=2\Longrightarrow A=\frac{1}{8}.$$

Συνεπώς,

$$a_n=\frac{2n^2+8n+7+(-1)^n}{8},\ \forall n\in N^*$$

Ασκηση 3.7 *Ενας πατέρας δίνει στο γιο του n χιλιάρικα. Ο γιος μπορεί να ξοδέψει τα λεφτά με τον εξής τρόπο:*

Κάθε μέρα μπορεί να κάνει μία από τις ακόλουθες αγορές:

1. *1 βιβλίο (τιμή:1000 δρχ.)*
2. *10 δισκέτες (τιμή:2000 δρχ.)*
3. *1 θήκη (τιμή:1000 δρχ.)*

Ποιός είναι ο αριθμός των δυνατών τρόπων να ξοδέψει τα χρήματα; (Είναι εύκολο να λυθεί το πρόβλημα με σχέση αναδρομής 2ης τάξης. Προσπαθείστε όμως να βρείτε και μία σχέση αναδρομής 1ης τάξης, η οποία να λύνει το πρόβλημα).

1ος τρόπος με σχέση αναδρομής 2ης τάξης:

Εστω a_n ο αριθμός των δυνατών τρόπων να ξοδέψει ο γιος n χιλιάρικα. Ο συνολικός αριθμός των τρόπων αυτών είναι το άθροισμα των τρόπων να ξοδέψει ένα χιλιάρικο επί τους τρόπους να ξοδέψει τα υπόλοιπα n-1 χιλιάρικα συν τους τρόπους να ξοδέψει δύο χιλιάρικα επί τους τρόπους να ξοδέψει n-2 χιλιάρικα. Δηλαδή,

$$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$$

Η σχέση αυτή είναι ομογενής αναδρομική 2ης τάξης. Εχει χαρακτηριστική εξίσωση $x^2-2x-1=0$, με ρίζες $x_1=1+\sqrt{2}$ και $x_2=1-\sqrt{2}$. Αρα είναι,

$$a_n=A(1+\sqrt{2})^n+B(1-\sqrt{2})^n$$

με $a_0=1, a_1=2$ και έτσι,

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=1 \\ A+B+\sqrt{2}(A-B)=2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=1 \\ A-B=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\}$$

Αρα,

$$a_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1},\ \forall n\in N$$

2ος τρόπος με σχέση αναδρομής 1ης τάξης:

Παρατηρούμε ότι έχουμε:

$$a_0=1, a_1=2, a_2=5, a_3=12, \ldots,$$

ή αλλιώς $a_{n+1} = (1+\sqrt{2})a_n + (1-\sqrt{2})^{n+1}$. Αυτή είναι μία μη ομογενής αναδρομική σχέση 1ης τάξης, η οποία έχει σα λύση τη ζητούμενη ακολουθία. Εχουμε $a_n^{(h)} = A(1+\sqrt{2})^n$. Εστω $a_n^{(p)} = B(1-\sqrt{2})^n$. Τότε,

$$B(1-\sqrt{2})^{n+1} = B(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^{n+1} \Longrightarrow$$

$$B(1-\sqrt{2}) = B(1+\sqrt{2}) + 1 \Longrightarrow B - B\sqrt{2} = B + B\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} \Longrightarrow$$

$$B = -\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

Αρα,

$$a_n = A(1+\sqrt{2})^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1}$$

οπότε αφού $a_0 = 1$, έχουμε,

$$A - \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 \Longrightarrow A = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

Συνεπώς τελικά είναι,

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1},\ \forall n \in N$$

Ασκηση 3.8 *Ποιός είναι ο αριθμός των τρόπων να ανεβούμε n σκαλιά, εάν εμείς κάθε στιγμή ανεβαίνουμε ένα ή δύο σκαλιά;*

Εστω a_n ο αριθμός των τρόπων να ανεβούμε n σκαλιά. Τότε αυτός θα είναι $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, γιατί είτε ανεβαίνουμε ένα σκαλί με ένα τρόπο και μας μένουν n-1 σκαλιά με a_{n-1} τρόπους, είτε ανεβαίνουμε 2 σκαλιά με ένα τρόπο και μας μένουν $n-2$ σκαλιά με a_{n-2} τρόπους. Επίσης έχουμε $a_0 = 1, a_1 = 1$. Κατά συνέπεια η ζητούμενη ακολουθία (a_n) είναι η ακολουθία των αριθμών Fibonacci με,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1},\ \forall n \in N$$

Ασκηση 3.9 *Πόσες νόμιμες αριθμητικές εκφράσεις μήκους n χωρίς παρενθέσεις κατασκευάζονται από τα στοιχεία 0,1,2,...,9 και τα σύμβολα των δυαδικών πράξεων $+, *$ και $/$.*

Για κάθε θετικό ακέραιο n έστω a_n ο ζητούμενος αριθμός των νόμιμων αριθμητικών εκφράσεων μήκους n, που κατασκευάζονται από τα δέκα δεκαδικά ψηφία και τους τρείς δυαδικούς τελεστές. Τότε προφανώς $a_1 = 10$ αφού οι μόνες νόμιμες εκφράσεις μήκους 1 είναι τα 10 δεκαδικά ψηφία. Επίσης έχομε $a_2 = 100$ διότι οι μόνες νόμιμες εκφράσεις μήκους δύο είναι οι 00,01,...,99. Θεωρούμε ότι δεν χρησιμοποιούνται περιττά "+" μπροστά από θετικούς αριθμούς.

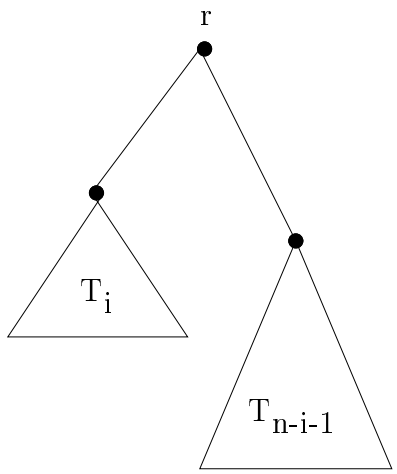
Για $n \geq 3$ διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις για το a_n :

- Εάν x είναι μία αριθμητική έκφραση με n-1 σύμβολα, το τελευταίο σύμβολο πρέπει να είναι ένα ψηφίο. Με προσθήκη στα δεξιά αυτού του ψηφίου ενός ακόμα ψηφίου μπορούμε να πάρουμε $10a_{n-1}$ αριθμητικές εκφράσεις n ψηφίων όπου τα δύο τελευταία τους σύμβολα είναι δεκαδικά ψηφία.

- Εστω y μία έκφραση n-2 συμβόλων. Για να πάρουμε μία έκφραση n συμβόλων (που δεν προκύπτει από την προηγούμενη περίπτωση) προσθέτομε στα δεξιά της y μία από τις 29 εκφράσεις δύο συμβόλων +1,...,+9,+0, $*$1,...,$*$9,$*$0, /1,...,/9.

Από τις παραπάνω δύο περιπτώσεις παίρνουμε τη σχέση αναδρομής,

$$a_n = 10a_{n-1} + 29a_{n-2}$$



Σχήμα 3.1: Το δυαδικό δένδρο της Ασκησης 3.10.

όπου $n \geq 2$ και $a_1 = 10, a_2 = 100$. Η παραπάνω σχέσις είναι ομογενής αναδρομική σχέσις 2ου βαθμού με χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^2 - 10x - 29 = 0 \Longrightarrow (x = 5 - 3\sqrt{6} \vee x = 5 + 3\sqrt{6})$$

Αρα έχει γενική λύση της μορφής,

$$a_n = A(5 - 3\sqrt{6})^n + B(5 + 3\sqrt{6})^n$$

και αφού $a_1 = 10, a_2 = 100$ παίρνουμε τις εξισώσεις,

$$\left\{ \begin{array}{l} (5 - 3\sqrt{6})A + (5 + 3\sqrt{6})B = 10 \\ (79 - 30\sqrt{6})A + (79 + 30\sqrt{6})B = 100 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{5}{3\sqrt{6}} \\ B = \frac{5}{3\sqrt{6}} \end{array} \right\}$$

Συνεπώς τελικά η γενική λύση της ομογενούς αναδρομικής σχέσης, η οποία αποτελεί και την απάντηση στο πρόβλημα που τέθηκε, είναι η,

$$a_n = -\frac{5}{3\sqrt{6}}(5 - 3\sqrt{6})^n + \frac{5}{3\sqrt{6}}(5 + 3\sqrt{6})^n.$$

Ασκηση 3.10 *Ενα δυαδικό δένδρο n κορυφών είναι είτε άδειο, αν $n = 0$, είτε μία τριάδα (T_i, r, T_{n-i-1}), όπου r είναι ένας διακεκριμμένος κόμβος (η ρίζα), T_i είναι ένα δυαδικό δένδρο i κορυφών και T_{n-i-1} είναι ένα δυαδικό δένδρο n-i-1 κορυφών (αριστερό και δεξιό υποδένδρο αντίστοιχα.). Πόσα δυαδικά δένδρα n κορυφών υπάρχουν;*

Εστω a_n ο ζητούμενος αριθμός των δυαδικών δένδρων με n κορυφές. Τότε,

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i-1}$$

γιατί ο a_n είναι άθροισμα των τρόπων σχηματισμού αριστερού υποδένδρου με $0, 1, 2, \ldots, n-1$ κόμβους επί τους τρόπους αντίστοιχα σχηματισμού δεξιού υποδένδρου με τους υπόλοιπους κόμβους, δηλαδή $n-1, n-2, \ldots, 1, 0$. Ετσι θα έχουμε

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} x^n \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}x^n \overbrace{\Longrightarrow}^{A(x)\ \text{γεννητρια της}\ a_n}$$

$$\frac{1}{x}[A(x)-a_0] = [A(x)]^2 \Longrightarrow xA^2(x) - A(x) + 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x} \pm \frac{1}{2x}[1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}x^k]$$

κι επειδή $a_n \geq 0$ επιλέγουμε το "-" και έχουμε

$$A(x) = \frac{1}{2x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2(2k+1)}\binom{2k+2}{k+1}x^k$$

Αρα,

$$a_n = \frac{1}{2(2n+1)}\binom{2n+2}{n+1} \quad a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, n \geq 0$$

Οι αριθμοί αυτοί καλούνται και *αριθμοί Catalan.*

Ασκηση 3.11 *Με τη βοήθεια των σχέσεων αναδρομής να υπολογιστεί ο αριθμός των τρόπων επιλογής r αντικειμένων με επαναλήψεις από ένα σύνολον n διαφορετικών αντικειμένων.*

Εστω n θετικός ακέραιος. Για $r \geq 0$, έστω $a_{n,r}$ ο αριθμός των τρόπων επιλογής r αντικειμένων με επαναλήψεις από n διαφορετικά αντικείμενα. Για $n \geq 0$, ας είναι $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ το σύνολον αυτών των αντικειμένων και ας θεωρήσουμε το αντικείμενο b_1. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Το αντικείμενο b_1 δεν επιλέγεται ποτέ. Τότε τα r αντικείμενα επιλέγονται από το σύνολον $\{b_2, \ldots, b_n\}$. Αυτό μπορεί να γίνει με $a_{n-1,r}$ τρόπους.
- Το αντικείμενο b_1 επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά. Τότε πρέπει να επιλέξομε r-1 αντικείμενα από το σύνολον $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ έτσι ώστε να είναι δυνατή η επανεπιλογή του b_1. Υπάρχουν $a_{n,r-1}$ τρόποι για να επιτευχθεί αυτό.

Αφού οι παραπάνω δύο τρόποι επιλογής των r αντικειμένων είναι αμοιβαία αποκλειόμενοι και καλύπτουν όλες τις δυνατές επιλογές έχουμε,

$$a_{n,r} = a_{n-1,r} + a_{n,r-1}$$

Εστω

$$f_n = \sum_{r=0}^{\infty} a_{n,r}x^r$$

η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots$. Από την προηγούμενη σχέση για $n \geq 1, r \geq 1$ παίρνουμε,

$$a_{n,r}x^r = a_{n-1,r}x^r + a_{n,r-1}x^r \Longrightarrow$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_{n,r}x^r = \sum_{r=1}^{\infty} a_{n-1,r}x^r + \sum_{r=1}^{\infty} a_{n,r-1}x^r$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις προφανείς αρχικές συνθήκες $a_{n,0} = 1$ για $n \geq 0$ και $a_{0,r} = 0$ για $r > 0$ παίρνουμε,

$$f_n - a_{n,0} = f_{n-1} - a_{n-1,0} + x\sum_{r=1}^{\infty} a_{n,r-1}x^{r-1} \Longrightarrow$$

$$f_n - 1 = f_{n-1} - 1 + xf_n \Longrightarrow f_n - xf_n = f_{n-1} \Longrightarrow$$

$$f_n = \frac{f_{n-1}}{1-x} \Longrightarrow f_n = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}$$

Αφού ο $a_{n,r}$ είναι ο συντελεστής του x^r εις το ανάπτυγμα της f_n θα έχομε $a_{n,r} = \binom{-n}{r}(-1)^r = \binom{n+r-1}{r}$[1]

[1] Το αποτέλεσμα που προέκυψε είναι γνωστό από τη στοιχειώδη θεωρία της Συνδυαστικής Ανάλυσης, όπου και έχει αποδειχθεί με καθαρά συνδυαστικά επιχειρήματα.

Ασκηση 3.12 *Πόσες ακολουθίες μήκους n μπορούν να σχηματιστούν από τα a,b,c,d με τέτοιο τρόπο ώστε τα a,b να μην είναι ποτέ γειτονικά.*

Εστω a_n ο αριθμός των ακολουθιών n ψηφίων από τα $\{a, b, c, d\}$, στις οποίες τα a,b δεν είναι ποτέ γειτονικά, και οι οποίες αρχίζουν από a ή b. Ομοια έστω b_n ο αριθμός των αντίστοιχων ακολουθιών, που αρχίζουν από c ή d. Τότε,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = 2b_{n-1} + a_{n-1} \\ b_n = 2b_{n-1} + 2a_{n-1} \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} \end{array} \right\} \overbrace{\Longrightarrow}^{a_0=0, b_0=1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) = 2xB(x) + xA(x) \\ B(x) - 1 = 2xB(x) + 2xA(x) \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) = \frac{2x}{x-1}[-B(x)] \\ B(x) - 1 = 2xB(x) + \frac{4x^2}{1-x} B(x) \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$B(x) = \frac{x-1}{2x^2 + 3x - 1} \Longrightarrow B(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-1)}{(x + \frac{3+\sqrt{17}}{4})(x + \frac{3-\sqrt{17}}{4})} \Longrightarrow$$

$$B(x) = \frac{\frac{\sqrt{17}+7}{4\sqrt{17}}}{x + \frac{3+\sqrt{17}}{4}} + \frac{\frac{\sqrt{17}-7}{4\sqrt{17}}}{x + \frac{3-\sqrt{17}}{4}} \Longrightarrow$$

$$B(x) = \frac{\sqrt{17}+7}{3\sqrt{17}+17}(1 + \frac{4x}{3+\sqrt{17}})^{-1} + \frac{\sqrt{17}-7}{3\sqrt{17}-17}(1 + \frac{4x}{3-\sqrt{17}})^{-1} \Longrightarrow$$

$$B(x) = \frac{\sqrt{17}+7}{3\sqrt{17}+17} \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{4}{3+\sqrt{17}})^k x^k + \frac{\sqrt{17}-7}{3\sqrt{17}-17} \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{4}{3-\sqrt{17}})^k x^k$$

οπότε,

$$b_n = \frac{\sqrt{17}+7}{3\sqrt{17}+17}(-\frac{4}{3+\sqrt{17}})^n + \frac{\sqrt{17}-7}{3\sqrt{17}-17}(-\frac{4}{3-\sqrt{17}})^n \ \forall n \in N.$$

Ομως,

$$b_n = 2b_{n-1} + 2a_{n-1} \Longrightarrow a_n + b_n = \frac{b_{n+1}}{2} \Longrightarrow$$

$$a_n + b_n = \frac{1}{2} \cdot [\frac{\sqrt{17}+7}{3\sqrt{17}+17}(-\frac{4}{3+\sqrt{17}})^{n+1} + \frac{\sqrt{17}-7}{3\sqrt{17}-17}(-\frac{4}{3-\sqrt{17}})^{n+1}]$$
$$\forall n \in N^*$$

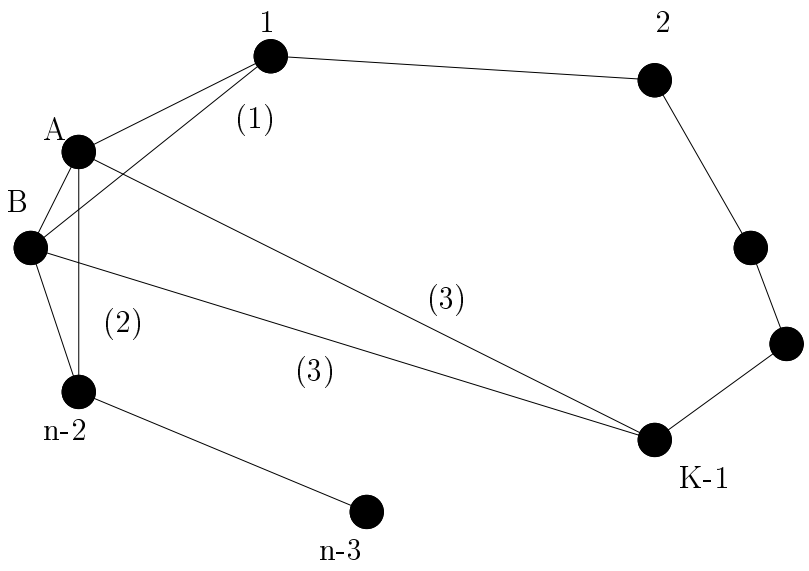
Ασκηση 3.13 *Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε παρενθέσεις στο γινόμενο $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ βάζοντας παρένθεση σε κάθε δύο όρους του γινομένου, έτσι ώστε να πολλαπλασιάζονται δύο όροι κάθε φορά.*

Ας είναι a_n ο αριθμός των τρόπων να τοποθετήσουμε παρενθέσεις στο γινόμενο n όρων. Θεωρούμε τα δύο υπογινόμενα $x_1 x_2 \ldots x_{n-r}$ και $x_{n-r+1} x_{n-r+2} \ldots x_n$. Υπάρχουν a_{n-r} τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στην 1η έκφραση και a_r τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στη 2η έκφραση, επομένως $a_r \cdot a_{n-r}$ τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις σε όλο το γινόμενο, όπου βεβαίως το τελευταίο ζεύγος εκφράσεων, που θα πολλαπλασιαστεί είναι το ζεύγος των δύο παραπάνω υπογινομένων. Οταν το r κινηθεί από 1 εώς n-1 παίρνουμε τη σχέση αναδρομής,

$$a_n = a_{n-1}a_1 + a_{n-2}a_2 + \ldots + a_2 a_{n-2} + a_1 a_{n-1},$$

με $a_1 = 1$ Θέτουμε $a_0 = 0$ και γράφουμε την προηγούμενη,

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} x^n \Longrightarrow$$



Σχήμα 3.2: Το κυρτό n-γωνο της Ασκησης 3.14.

$$A(x) - a_1x - a_0 = A^2(x) - a_0^2 - (a_1a_0 + a_0a_1)x \Longrightarrow$$
$$A^2(x) - A(x) + x = 0 \Longrightarrow A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

Δεχόμαστε τη λύση με το "-", που δίδει θετικούς συντελεστάς δυνάμεων του x. Ετσι έχουμε,

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{2}{n}\tbinom{2n-2}{n-1}x^n]$$

οπότε,

$$A(x) = \frac{1\cdot 1}{2} + \frac{1}{2}[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\tbinom{2n-2}{n-1}x^n] \Longrightarrow A(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tbinom{2n-2}{n-1}x^n$$

Αρα είναι,

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n}\tbinom{2n-2}{n-1} & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Ασκηση 3.14 *Να βρεθεί ο αριθμός d_n των τριγωνισμών ενός κυρτού n-γώνου. Τριγωνισμός είναι ένα σύνολο από n-3 διαγώνιες, όπου κάθε δύο απ' αυτές δεν τέμνονται στο εσωτερικό του n-γώνου.*

Ας ξεχωρίσουμε δύο γειτονικές κορυφές του n-γώνου, έστω τις A,B, κι ας είναι $1, 2, \ldots, n-2$ οι υπόλοιπες n-2 κορυφές του n-γώνου, όπως διατρέχουμε την περιφέρεια του n-γώνου από το A προς το B. Τότε ο αριθμός των τριγωνισμών είναι, έστω T_n, ίσος με τον αριθμό των τριγωνισμών ενός (n-1)-γώνου, με δοσμένη την A στον τριγωνισμό του n-γώνου, συν τον αριθμό των τριγωνισμών ενός (n-1)-γώνου, με δοσμένη τη B στον τριγωνισμό του n-γώνου, συν, τέλος, τον αριθμό

$$\sum_{k=3}^{n-2} T_kT_{n+1-k},$$

όπου το k κινείται από την κορυφή 2 εώς την κορυφή n-3, οπότε και σχηματίζεται ένα k-γωνο, με κορυφές $A, 1, \ldots, k-1$, κι ένα (n+1-k)-γωνο, με κορυφές $k-1, k, \ldots, n-2, B$, $(k = 3, 4, \ldots, n-2)$. Ετσι έχουμε,

$$T_n = \sum_{k=3}^{n-2} T_kT_{n-k+1} + 2T_{n-1} \overbrace{\Longrightarrow}^{T_2=1} T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_kT_{n+1-k} \overbrace{\Longrightarrow}^{T_k=S_{k-2}}$$

$$S_{n-2} = \sum_{k=2}^{n-1} S_{k-2}S_{n-1-k} \Longrightarrow S_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-3} S_k S_{n-3-k} \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} S_{n-2}x^{n-3} = \sum_{n=3}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-3} S_k S_{n-3-k}x^{n-3} \Longrightarrow \frac{1}{x}[S(x) - s_0] = S^2(x) \Longrightarrow$$

$$xS^2(x) - S(x) + 1 = 0 \Longrightarrow S(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Αρα (βλέπε Ασκηση 3.10) οι S_n είναι οι αριθμοί Catalan, δηλαδή,

$$S_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

όπου $n \geq 0$. Επομένως,

$$T_n = S_{n-2} \Longrightarrow T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}, n \geq 3$$

Ασκηση 3.15

1. *Πόσες ακολουθίες n ψηφίων από τα ψηφία 0,1,2,3 έχουν μονό αριθμό από 0;*
2. *Να βρεθεί ο αριθμός των ακολουθιών n ψηφίων από τα 0,1 στις οποίες το δείγμα 010 εμφανίζεται στο n–οστό ψηφίο.*

1. Εστω a_{n-1} ο αριθμός των (n-1)-ψηφίων ακολουθιών, που έχουν μονό αριθμό από 0. Τότε ο αριθμός των ακολουθιών (n-1)-ψηφίων, που έχουν ζυγό αριθμό 0, είναι $4^{n-1} - a_{n-1}$. Σε κάθε μία από τις a_{n-1} ακολουθίες με μονό αριθμό 0, τα ψηφία 1,2,3 μπορούν να προστεθούν, για να δώσουν ακολουθίες μήκους n με μονό αριθμό 0. Σε κάθε μία από τις $4^{n-1} - a_{n-1}$ ακολουθίες με ζυγό αριθμό 0 το 0 μπορεί να προστεθεί για να πάρουμε ακολουθίες μήκους n με μονό αριθμό 0. Ετσι,

   $$a_n = 3a_{n-1} + 4^{n-1} - a_{n-1},$$

   όπου $a_1 = 1$, και έτσι θέτουμε $a_0 = 0$ και έχουμε,

   $$a_n - 2a_{n-1} = 4^{n-1}, a_0 = 0$$

   Η σχέση αυτή είναι μη ομογενής γραμμική με αντίστοιχη ομογενή $a_n - 2a_{n-1} = 0$ και χαρακτηριστική ρίζα $x = 2$, οπότε $a_n^{(h)} = A2^n$. Δοκιμάζουμε $a_n^{(p)} = B4^n$ και έχουμε,

   $$B4^n - 2B4^{n-1} = 4^{n-1} \Longrightarrow 4B - 2B = 1 \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$$

   οπότε,

   $$a_n = A2^n + \frac{1}{2}4^n \overbrace{\Longrightarrow}^{n=0} A + \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

   Επομένως,

   $$a_n = \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}2^n, \ \forall n \in N.$$

2. Εστω a_n ο ζητούμενος αριθμός ακολουθιών. Μεταξύ όλων των ακολουθιών n δυαδικών ψηφίων υπάρχουν 2^{n-3} ακολουθίες, που έχουν τα 010 σαν τρία τελευταία ψηφία.Αυτές μπορούν να διαιρεθούν σε δύο ομάδες: Αυτές, που έχουν το 010 να εμφανίζεται στο n-οστό ψηφίο κι αυτές, στις οποίες το 010 δεν εμφανίζεται στο n-οστό ψηφίο. Στην πρώτη ομάδα υπάρχουν a_n ακολουθίες, ενώ οι ακολουθίες της δεύτερης ομάδας πρέπει να εμφανίζουν το 010 στο (n-2) ψηφίο, αφού αυτός είναι ο μοναδικός λόγος, για τον οποίο δε δεχόμαστε την εμφάνιση του 010 στα τρία τελευταία ψηφία.Ετσι η τελευταία ομάδα έχει a_{n-2} ακολουθίες, οπότε,

   $$2^{n-3} = a_n + a_{n-2}, n \geq 5, a_3 = 1, a_4 = 2$$

Εχουμε,

$$a_n + a_{n-2} = 0 \Longrightarrow x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm i$$

Αρα,

$$a_n^{(h)} = Ai^n + B(-i)^n =$$

$$= A(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^n + B(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2})^n =$$

$$= (A+B)\cos\frac{n\pi}{2} + i(A-B)\sin\frac{n\pi}{2} =$$

$$= C\cos\frac{n\pi}{2} + D\sin\frac{n\pi}{2}$$

Δοκιμάζουμε $a_n^{(p)} = F2^n$,

$$F2^n + F2^{n-2} = 2^{n-3} \Longrightarrow 8F + 2F = 1 \Longrightarrow F = \frac{1}{10}$$

Αρα,

$$a_n = C\cos\frac{n\pi}{2} + D\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{10}2^n \overbrace{\Longrightarrow}^{n=3,4}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} -D + \frac{4}{5} = 1 \\ C + \frac{8}{5} = 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} D = -\frac{1}{5} \\ C = \frac{2}{5} \end{array} \right\}$$

Επομένως,

$$a_n = \frac{2}{5}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{5}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2^n}{10},\ \forall n \in N.$$

Ασκηση 3.16 *Να λυθεί η σχέση αναδρομής* $a_n = 10a_{n-1}^2, n \geq 1, a_0 = 1$.

Θέτουμε $b_n = \log a_n$ με $b_0 = \log 1 = 0$ και έχουμε,

$$\log a_n = \log 10 + \log a_{n-1}^2 \Longrightarrow \log a_n = 2\log a_{n-1} + \log 10 \Longrightarrow$$

$$b_n = 2b_{n-1} + 1$$

Η τελευταία έχει λύση (βλέπε Ασκηση 3.1) $b_n = 2^{n+1} - 1,\ \forall n \in N$, και άρα

$$a_n = 10^{b_n} \Longrightarrow a_n = 10^{2^{n+1}-1},\ \forall n \in N.$$

Κεφάλαιο 4

Θεωρία Μέτρησης Pólya

The old Rocker wore his hair too long,wore his trouser cuffs too tight.
Unfashionable to the end-drank his ale too light.
Death's head belt buckle-yesterday's dreams-
The transport caf'prophet of doom
Ringing no change in his double-sewn seams,in his post-war-babe gloom.

Now he's too old to Rock'n'Roll but he's too young to die
Yes, he's too old to Rock'n'Roll but he's too young to die...

He once owned a Harley Davidson and a Triumph Bonneville.
Counted his friends in burned out spark plugs And prays that he always will.
But he's the last of the blue blood greaser boys All his mates are doing time
Married with three kids up by the ring road Sold their souls straight down the line
And some of them own little sports cars and meet at the tennis club do's For drinks on a Sunday-work on Monday They've thrown away their blue suede shoes.

Now they're too old to Rock'n'Roll but they're too young to die
Yes, they're too old to Rock'n'Roll but they're too yoyng to die...

So the old Rocker gets out his bike to make a ton before he takes his leave
Upon the A1 by Scotch Corner just like it used to be.
And as he flies-tears in his eyes-his wind-whipped words echo the final take
As he hits the trunk road doing around 120 with no room left to brake

And he was too old to Rock'n'Roll
And he was too young to die...

Too Old To Rock'n'Roll:Too Young To Die
JETHRO TULL

Ασκηση 4.1 *Εστω p_k ο αριθμός των διαμερίσεων ενός συνόλου, που περιέχει k στοιχεία. Είναι προφανώς $p_0 = 1$. Δείξτε ότι*

$$p_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p_i.$$

Για να διαμερίσουμε ένα σύνολο S με $|S| = n+1$ ακολουθούμε την εξής μέθοδο. Ξεχωρίζουμε ένα στοιχείο από τα n+1 στοιχεία του συνόλου και το βάζουμε στην άκρη. Επειτα είτε δημιουργούμε μία διαμέριση παίρνοντας μαζεμένα n στοιχεία από τα υπόλοιπα n με $\binom{n}{n}$ τρόπους και διαμερίζοντας τα υπόλοιπα $n-n = 0$ στοιχεία, είτε δημιουργούμε μία διαμέριση παίρνοντας μαζεμένα n-1 στοιχεία από τα n με $\binom{n}{n-1}$ τρόπους και διαμερίζοντας το υπόλοιπο 1 στοιχείο, είτε ..., είτε, γενικώς, παίρνουμε μαζί $n-k$ στοιχεία με $\binom{n}{n-k}$ τρόπους και τα υπόλοιπα k στοιχεία τα διαμερίζουμε ελεύθερα με p_k τρόπους. Τέλος στο σύνολο των μαζεμένων στοιχείων προσθέτουμε το στοιχείο, που ξεχωρίσαμε. Αυτό εξασφαλίζει ότι οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις, που κάναμε με τον παραπάνω τρόπο θα είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Ετσι ο συνολικός αριθμός διαμερίσεων θα είναι:

$$p_{n+1} = \binom{n}{n} p_0 + \binom{n}{n-1} p_1 + \binom{n}{n-2} p_2 + \ldots + \binom{n}{n-n} p_n =$$

$$= \binom{n}{0} p_0 + \binom{n}{1} p_1 + \ldots + \binom{n}{n} p_n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p_i$$

Ασκηση 4.2 *Εστω S ένα σύνολο, που περιέχει n στοιχεία.*

1. *Πόσες διαφορετικές διμελείς σχέσεις στο σύνολο S υπάρχουν;*
2. *Πόσες απ' αυτές είναι ανακλαστικές;*
3. *Πόσες απ' αυτές είναι συμμετρικές;*
4. *Πόσες απ' αυτές δεν είναι ούτε ανακλαστικές ούτε συμμετρικές;*
5. *Πόσες απ' αυτές είναι σχέσεις ισοδυναμίας;*

1. Ο ζητούμενος αριθμός των διμελών σχέσεων ισούται με τον πληθάριθμο του συνόλου των μη κενών υποσυνόλων του καρτεσιανού γινομένου $S \times S$. Είναι $|S \times S| = n^2$. Ετσι ο πληθάριθμος του συνόλου των μη κενών υποσυνόλων του $S \times S$ θα είναι $2^{n^2} - 1$.

2. Για να είναι μία από τις διμελείς σχέσεις στο S ανακλαστική πρέπει οπωσδήποτε να περιέχει τα ζεύγη $(x, x), x \in S \, \forall x \in S$. Αυτά είναι προφανώς n το πλήθος.Τα υπόλοιπα ζεύγη του $S \times S$ μπορεί να ανήκουν ή να μην ανήκουν στη διμελή σχέση. Ετσι ο ζητούμενος αριθμός είναι $2^{n^2-n} = 2^{n(n-1)}$.

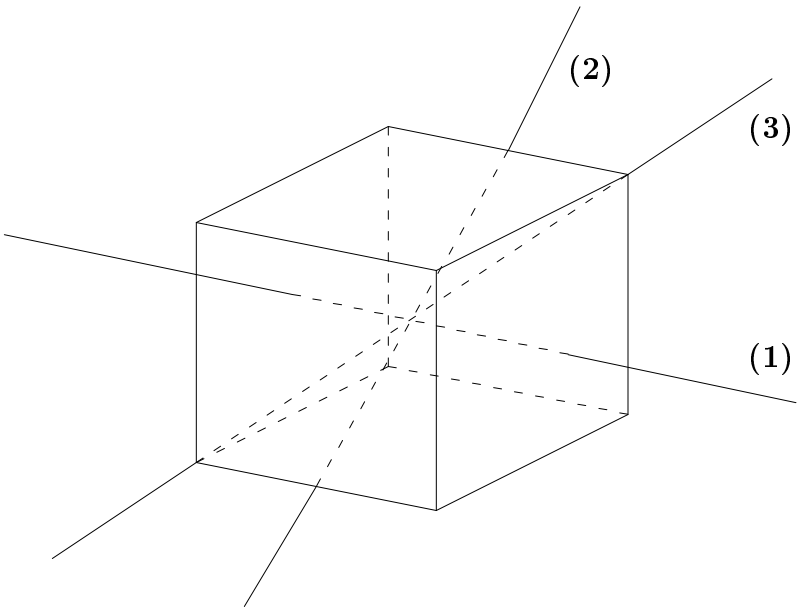
3. Για να είναι μία διμελής σχέση στο S συμμετρική πρέπει εάν περιέχει ένα από τα $n^2 - n$ ζευγάρια των $(x, y) \in S^2, x \neq y$, να περιέχει και το (y, x). Ετσι μία τέτοια σχέση είτε θα περιέχει το (x, y) είτε δε θα το περιέχει, είτε επίσης θα περιέχει ζεύγη (n το πλήθος) της μορφής $(x, x), x \in S$, είτε ελεύθερα δεν θα τα περιέχει. Συνεπώς ο αριθμός των συμμετρικών σχέσεων είναι,

$$2^n \cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}} - 1 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} - 1$$

4. Χρησιμοποιώντας την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού παίρνουμε για το ζητούμενο αριθμό,

$$2^{n^2} - 1 - 2^{n(n-1)} - 2^{\frac{n(n+1)}{2}} + 1 + 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{n^2} - 2^{n^2-n} - 2^{\frac{n^2+n}{2}} + 2^{\frac{n^2-n}{2}} - 1 + 1 =$$

$$= 2^{n^2} - 2^{n^2-n} - 2^{\frac{n^2+n}{2}} + 2^{\frac{n^2-n}{2}}$$



Σχήμα 4.1: Ο κύβος της άσκησης 4.3 και οι άξονες συμμετρίας του.

5. Αφού κάθε σχέση ισοδυναμίας διαμερίζει το S σε κλάσεις ισοδυναμίας και αντιστρόφως, ο αριθμός των σχέσεων ισοδυναμίας θα ισούται με τον αριθμό των διαφορετικών διαμερίσεων του S σε κλάσεις ισοδυναμίας. Αυτός είναι από την άσκηση 4.1,

$$p_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p_i$$

Ασκηση 4.3 *Οι έξι όψεις ενός κύβου θα χρωματιστούν με 6 διαφορετικά χρώματα, κάθε όψη με ένα διαφορετικό χρώμα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;*

Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με x, όπου x είναι ο αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας, στις οποίες διαιρείται το σύνολο των δυνατών χρωματισμών, από τη σχέση ισοδυναμίας την επαγομένη από την ομάδα μεταθέσεων G του κύβου. Από το Θεώρημα του Burnside είναι,

$$x = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \psi(\pi)$$

Το $|G|$ είναι 24 διότι οι δυνατές συμμετρίες του κύβου είναι οι εξής 24:

- η ταυτοτική με $\psi(\pi) = 6!$
- τρείς μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180° γύρω από άξονες, που συνδέουν κέντρα απέναντι όψεων,με $\psi(\pi) = 0$
- έξι μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90° γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων,με $\psi(\pi) = 0$
- έξι μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180° γύρω από άξονες, που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών, με $\psi(\pi) = 0$, και τέλος
- οκτώ μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120° γύρω από άξονες, που συνδέουν απέναντι κορυφές,με $\psi(\pi) = 0$

Αρα,

$$x = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\psi(\pi) = \frac{1}{24}6! = \frac{6!}{4!} = 30$$

Ασκηση 4.4 *Να βρεθεί ο αριθμός των διαφορετικών κολιέ με πέντε χάντρες,που μπορεί να είναι κίτρινες, μπλέ ή άσπρες. Δύο κολιέ θεωρούνται ίδια εάν η περιστροφή του ενός δίνει το άλλο. (Για απλότητα θεωρούμε ότι τα κολιέ δεν επιτρέπεται να αναποδογυριστούν.)*

Εστω S το σύνολο, που αποτελείται από τα $3^5 = 243$ διαφορετικά κολιέ, όταν δεν λαμβάνονται υπόψιν οι ισοδυναμίες λόγω περιστροφών. Εστω επίσης $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}$ η ομάδα μεταθέσεων, όπου π_1 είναι η ταυτοτική μετάθεση, π_2 η μετάθεση, που απεικονίζει ένα κολιέ σ' ένα άλλο, που είναι ίδιο με το προηγούμενο περιστραμμένο κατά μία χάντρα δεξιόστροφα, και π_3, π_4, π_5 οι μεταθέσεις, που απεικονίζουν ένα κολιέ σ' ένα όμοιο μ' αυτό, αλλά περιστραμμένο δεξιόστροφα κατά δύο, τρείς και τέσσερις χάντρες αντίστοιχα.

Ο αριθμός των στοιχείων του S, που παραμένουν αμετάβλητα,

- από την π_1 είναι 243
- από την π_2 είναι 3 διότι η περιστροφή του κολιέ κατά μία θέση θα δώσει το ίδιο κολιέ μόνο όταν και οι πέντε χάντρες έχουν το ίδιο χρώμα
- από τις π_3, π_4, π_5 είναι ομοίως 3

Ετσι σύμφωνα με το Θεώρημα του Burnside θα έχουμε για το ζητούμενο αριθμό των διαφορετικών κολιέ,

$$\frac{1}{5}(243 + 3 + 3 + 3 + 3) = 51$$

Ασκηση 4.5 *Υποθέτουμε ότι θα τυπώσουμε όλους τους αριθμούς με 5 ψηφία σε κομματάκια χαρτιού, με έναν αριθμό σε κάθε κομματάκι. Προφανώς υπάρχουν 10^5 τέτοια κομμάτια. (Για αριθμούς μικρότερους του 10.000 ,συμπληρώνουμε τον αριθμό με μηδενικά στην αρχή.) Παραταύτα, αφού τα ψηφία 0,1,6,8 και 9 γίνονται 0,1,9,8 και 6 αντίστοιχα, όταν διαβαστούν ανάποδα, υπάρχουν ζεύγη αριθμών, που θα μοιραστούν το ίδιο κομμάτι χαρτιού, το οποίο θα διαβάζεται ή ίσια ή ανάποδα. Π.χ. μπορούμε να φτιάξουμε ένα κομμάτι χαρτιού για τους δύο αριθμούς 89.166 και 99.168. Πόσα διαφορετικά κομματάκια χαρτιού χρειαζόμαστε σ' αυτή την περίπτωση για τους 10^5 αυτούς αριθμούς;*

Εστω S το σύνολο, που αποτελείται από τους 10^5 αριθμούς, και G η ομάδα μεταθέσεων του S, που αποτελείται από τις μεταθέσεις π_1, π_2, όπου π_1 είναι η ταυτοτική μετάθεση και π_2 η μετάθεση, που απεικονίζει έναν αριθμό στο S είτε στον εαυτό του, εάν δε δίνει άλλον αριθμό όταν αναποδογυριστεί, είτε στον αριθμό, που προκύπτει απ' αυτόν όταν διαβαστεί ανάποδα. Ο αριθμός των στοιχείων του S, που παραμένουν αμετάβλητα από την π_1 είναι 10^5, ενώ ο αριθμός των στοιχείων του S, που παραμένουν αμετάβλητα από την π_2 είναι $10^5 - 5^5 + 3\cdot 5^2$, γιατί υπάρχουν $10^5 - 5^5$ αριθμοί, που περιέχουν ένα τουλάχιστον στοιχείο εκ των 2,3,4,5 και 7, που δεν διαβάζεται ανάποδα, και $3\cdot 5^2$ αριθμοί, που παραμένουν ίδιοι είτε διαβαστούν ίσια είτε ανάποδα. Αρα ο αριθμός των διαφορετικών κομματιών από χαρτί, που χρειάζεται να φτιάξουμε είναι,

$$\frac{1}{2}(10^5 + 10^5 - 5^5 + 3\cdot 5^2) = 10^5 - \frac{1}{2}5^5 + \frac{3}{2}5^2 = 98475$$

Ασκηση 4.6 *Να βρεθεί ο αριθμός των διαφορετικών σειρών, που φτιάχνονται από 3 χάντρες, που μπορεί να είναι μπλέ ή κίτρινες.*

Εστω $D = \{1, 2, 3\}$ το σύνολον των τριών θέσεων σε κάθε σειρά και $R = \{b, y\}$ το σύνολον των δύο ειδών για τις χάντρες. Εστω επίσης $w(b) = b$ και $w(y) = y$, τα βάρη των στοιχείων του R. Είναι $G = \{\binom{123}{123}, \binom{123}{321}\}$,όπου η πρώτη μετάθεση είναι η ταυτοτική, ενώ η δεύτερη αντιστοιχεί στην αντιμετάθεση των δύο άκρων της σειράς.

Ο δείκτης κύκλων της G είναι,

$$P_G(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^3 + x_1x_2)$$

και ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών,

$$\frac{1}{2}[(b+y)^3+(b+y)(b^2+y^2)] = b^3+2b^2y+2by^2+y^3$$

Από τον αριθμό εύρεσης σχηματισμών, βλέπουμε ότι υπάρχει μία σειρά, που περιέχει 3 μπλέ χάντρες, 2 σειρές, που περιέχουν 2 μπλέ χάντρες και 1 κίτρινη κ.λ.π. Θέτοντας $w(b) = w(y) = 1$ βρίσκουμε ότι ο αριθμός των διαφορετικών σχηματισμών είναι 6.

Ασκηση 4.7

1. *Οι έξι όψεις ενός κύβου θα χρωματιστούν με 1 ή περισσότερα από 6 διαφορετικά χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;*

2. *Ενα απ' αυτά τα 6 χρώματα είναι κόκκινο. Βρείτε τον αριθμό των τρόπων να χρωματίσουμε τον κύβο έτσι ώστε ακριβώς τρείς από τις όψεις του να βαφούν κόκκινες.*

1. Εστω G η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχεί σε όλες τις δυνατές περιστροφές του κύβου. Υπάρχουν 24 μεταθέσεις στην ομάδα, που χωρίζονται στις εξής 5 κατηγορίες,

   - η ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^6
   - 3 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180° γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι πλευρών (όψεων),με αναπαραστάσεις $x_1^2x_2^2$
   - 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90° γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων,με αναπαραστάσεις $x_1^2x_4$
   - 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180° γύρω από άξονες, που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών,με αναπαραστάσεις x_2^3 και τέλος
   - 8 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120° γύρω από άξονες, που συνδέουν απέναντι κορυφές, με αναπαραστάσεις x_3^2

   Ετσι ο δείκτης κύκλων P_G της G είναι,

   $$P_G = \frac{1}{24}(x_1^6+3x_1^2x_2^2+6x_1^2x_4+6x_2^3+8x_3^2)$$

   οπότε ο αριθμός εύρεσης των κλάσεων ισοδυναμίας είναι,

   $$\frac{1}{24}[(x+y+z+r+s+t)^6+3(x+y+z+r+s+t)^2(x^2+y^2+z^2+r^2+s^2+t^2)^2+$$
   $$+6(x^2+y^2+z^2+r^2+s^2+t^2)^3+6(x+y+z+r+s+t)^2(x^4+y^4+z^4+r^4+s^4+t^4)+$$
   $$+8(x^3+y^3+z^3+r^3+s^3+t^3)^2]$$

   και θέτοντας $x=y=z=r=s=t=1$ παίρνουμε,

   $$\frac{1}{24}(6^6+3\cdot 6^2\cdot 6^2+6\cdot 6^3+6\cdot 6^2\cdot 6+8\cdot 6^2) = 2226$$

   τρόποι χρωματισμού.

2. Ας υποθέσουμε ότι ένα από τα χρώματα είναι το κόκκινο (έστω το x) και ότι θέλουμε τους τρόπους χρωματισμού του κύβου, έτσι ώστε ακριβώς τρεις από τις όψεις του να είναι κόκκινες. Τότε αναλύοντας τον αριθμό εύρεσης και θέτοντας $y+z+r+s+t=\lambda, y^2+z^2+r^2+s^2+t^2=\mu, y^3+z^3+r^3+s^3+t^3=\rho, y^4+z^4+r^4+s^4+t^4=\nu$ έχουμε,

   $$\frac{1}{24}[(x+\lambda)^6+3(x+\lambda)^2(x^2+\mu)^2+6(x^2+\mu)^3+6(x+\lambda)^2(x^4+\nu)+8(x^3+\rho)^2] =$$

   $$= \frac{1}{24}[\sum_{k=0}^{6}\tbinom{6}{k}x^k\lambda^{6-k}+3(x^2+2\lambda x+\lambda^2)(x^4+2\mu x^2+\mu^2)+$$

$$+6(x^6+3x^4\mu+3x^2\mu^2+\mu^3)+$$
$$+6(x^2+2\lambda x+\lambda^2)(x^4+\nu)+8(x^6+2x^3\rho+\rho^2)]$$

οπότε για τα x^3 έχουμε,

$$\frac{1}{24}[\binom{6}{3}\lambda^3x^3+3\cdot 4\lambda\mu x^3+8\cdot 2\rho x^3]=$$

$$=\frac{1}{24}[20(y+z+r+s+t)^3x^3+12(y+z+r+s+t)(y^2+z^2+r^2+s^2+t^2)x^3+$$
$$+16(y^3+z^3+r^3+s^3+t^3)x^3]$$

οπότε θέτοντας $x=y=z=r=s=t=1$ παίρνουμε,

$$\frac{1}{24}(20\cdot 5^3+12\cdot 5\cdot 5+16\cdot 5)=120$$

τρόποι χρωματισμού του κύβου, έτσι ώστε ακριβώς τρεις από τις όψεις του να είναι κόκκινες.

Ασκηση 4.8 *Οι έξι όψεις ενός κύβου θα χρωματιστούν με 4 διαφορετικά χρώματα A,B,C και D. Με πόσους τρόπους μπορεί να χρωματιστεί ο κύβος, έτσι ώστε δύο από τις όψεις του να χρωματιστούν A, δύο B, μία C και μία D.*

Εάν τα χρώματα είναι τέσσερα, τότε ο αριθμός εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας γίνεται από την άσκηση 4.7,

$$\frac{1}{24}[(x+y+z+r)^6+3(x+y+z+r)^2(x^2+y^2+z^2+r^2)^2+$$
$$+6(x+y+z+r)^2(x^4+y^4+z^4+r^4)+6(x^2+y^2+z^2+r^2)^3+8(x^3+y^3+z^3+r^3)^2],$$

οπότε τους επιθυμητούς χρωματισμούς τους παίρνουμε από το,

$$\frac{1}{24}[(x+y+z+r)^6+3(x+y+z+r)^2(x^2+y^2+z^2+r^2)^2]$$

Το γινόμενο $(x+y+z+r)^6$ δίνει το συντελεστή του x^2y^2zr ίσο με $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 2\cdot 1=180$ και το $3(x+y+z+r)^2(x^2+y^2+z^2+r^2)^2$ δίνει συντελεστή του x^2y^2zr $3\cdot 2\cdot 2=12$, οπότε οι ζητούμενοι τρόποι είναι,

$$\frac{180+12}{24}=8$$

Ασκηση 4.9 *Ενας κύλινδρος, που έχει διαιρεθεί σε 6 τμήματα θα χρωματιστεί με 1 ή περισσότερα από διαφορετικά χρώματα. Με πόσους τρόπους επιτυγχάνεται αυτό;*

Εστω G η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχεί σε όλες τις δυνατές συμμετρίες του κυλίνδρου. Εχουμε δύο μεταθέσεις στη G:

- την ταυτοτική,για την οποία η κυκλική αναπαράσταση είναι x_1^6
- την περιστροφή γύρω από οριζόντιο άξονα, που χωρίζει το τρίτο από το τέταρτο μέρος, κατά 180°, με αναπαράσταση x_2^3

Συνεπώς ο δείκτης κύκλων P_G της G είναι,

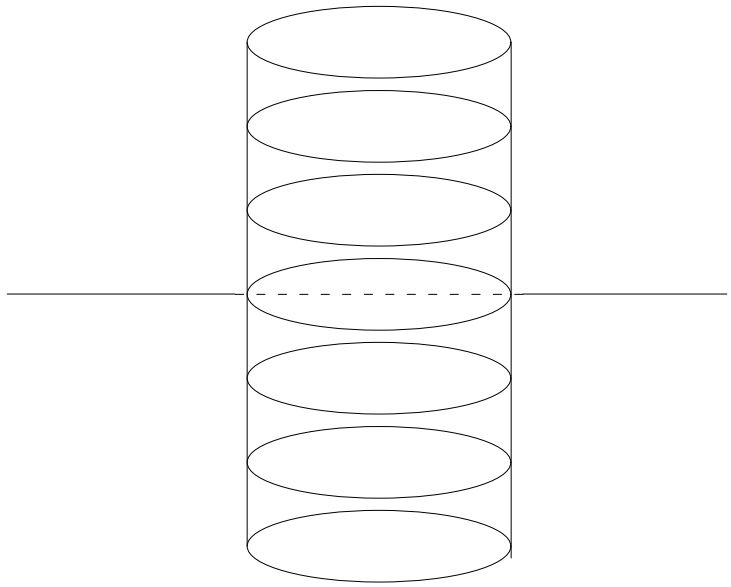
$$P_G=\frac{1}{2}(x_1^6+x_2^3)$$

και αν με $y_1,y_2,\ldots,y_n$ συμβολίσουμε τα διαφορετικά χρώματα, ο αριθμός εύρεσης των κλάσεων ισοδυναμίας γίνεται,

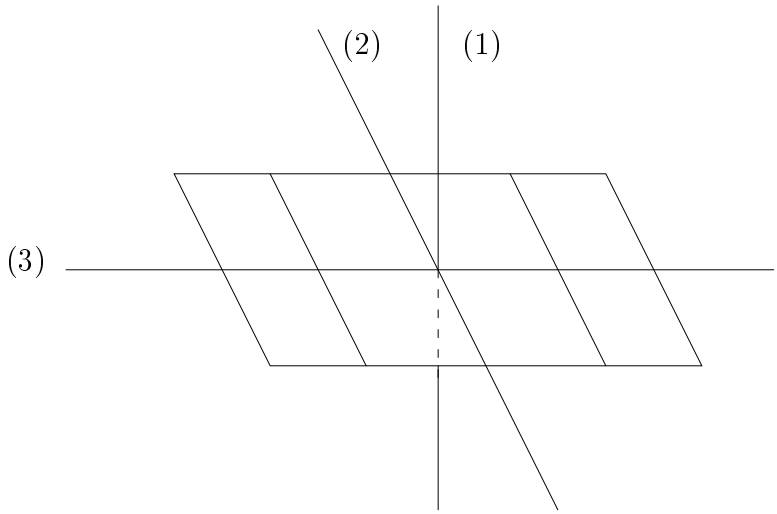
$$\frac{1}{2}[(y_1+y_2+\ldots+y_n)^6+(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)^3]$$

Ετσι για $y_1=y_2=\ldots=y_n=1$ έχουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός τρόπων χρωματισμού είναι,

$$\frac{1}{2}(n^6+n^3)=\frac{n^3(n^3+1)}{2}$$



Σχήμα 4.2: Ο κύλινδρος της άσκησης 4.8 διαιρεμένος σε έξι τμήματα και ο άξονας συμμετρίας του.



Σχήμα 4.3: Η 2×4 σκακιέρα της άσκησης 4.10 και οι άξονες συμμετρίας της.

Ασκηση 4.10 *Βρείτε τον αριθμό των σκακιέρων με διαστάσεις 2×4, που αποτελούνται από άσπρα και κόκκινα τετράγωνα, με τον περιορισμό ότι τα κόκκινα τετράγωνα θα είναι 3 και τα άσπρα 5. (Θεωρούμε ότι οι σκακιέρες αναποδογυρίζονται.)*

Εστω G η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχεί σε όλες τις δυνατές περιστροφές της σκακιέρας. Εχουμε $|G| = 4$, γιατί στην G ανήκουν,

- η ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^8
- η μετάθεση, που αντιστοιχεί σε περιστροφή της σκακιέρας γύρω από άξονα, που είναι κάθετος στη σκακιέρα και διέρχεται από το κέντρο της, κατά 180°, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4
- η μετάθεση, που αντιστοιχεί σε περιστροφή κατά 180° γύρω από τον οριζόντιο άξονα, που κόβει τις δύο γραμμές της σκακιέρας, με αναπαράσταση x_2^4 και
- η μετάθεση, που αντιστοιχεί σε περιστροφή γύρω από τον κάθετο άξονα, που κόβει στη μέση τις 4 στήλες της σκακιέρας, κατά 180°, με αναπαράσταση x_2^4

Ετσι ο δείκτης κύκλων της G είναι,

$$\frac{1}{4}(x_1^8 + 3x_2^4)$$

και για τον αριθμό εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας έχουμε,

$$\frac{1}{4}[(x+y)^8 + 3(x^2+y^2)^4] = \frac{1}{4}[\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x^k y^{8-k} + 3\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^{2k}y^{8-2k}]$$

θέλουμε το συντελεστή του x^3y^5, οπότε έχουμε,

$$\frac{1}{4}[\binom{8}{3} + 3 \cdot 0]x^3y^5 = 14x^3y^5$$

Ασκηση 4.11 *Εστω ένας κυκλικός δίσκος Δ και τέσσερις άξονες, ένας οριζόντιος, ένας κατακόρυφος και δύο διαγώνιοι, με κλήσεις 45° και -45° αντίστοιχα, που διέρχονται από το κέντρο του και τον διαιρούν σε 8 ισοεμβαδικούς κυκλικούς τομείς.*

1. *Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν οι 8 αυτοί ισεμβαδικοί τομείς να χρωματιστούν με 3 χρώματα, αν οι δύο πρώτοι άξονες (οριζόντιος και κάθετος) είναι διαφορετικοί από τους δύο διαγώνιους;*
2. *Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να χρωματιστούν με 3 χρώματα, εάν και οι 4 άξονες είναι όμοιοι μεταξύ τους;*

1. Εστω G η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχεί σε όλες τις δυνατές συμμετρίες του κυκλικού δίσκου. Εχουμε,

   - 4 περιστροφές, καθεμιά γύρω από έναν από τους τέσσερις άξονες κατά 180°, με κυκλικές αναπαραστάσεις x_2^4
   - την ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^8
   - 3 περιστροφές γύρω από άξονα κάθετο στο κέντρο του κυκλικού δίσκου κατά $90^o, 180^o, 270^o$ αντίστοιχα , με κυκλικές αναπαραστάσεις x_4^2, x_2^4, x_4^2 αντίστοιχα

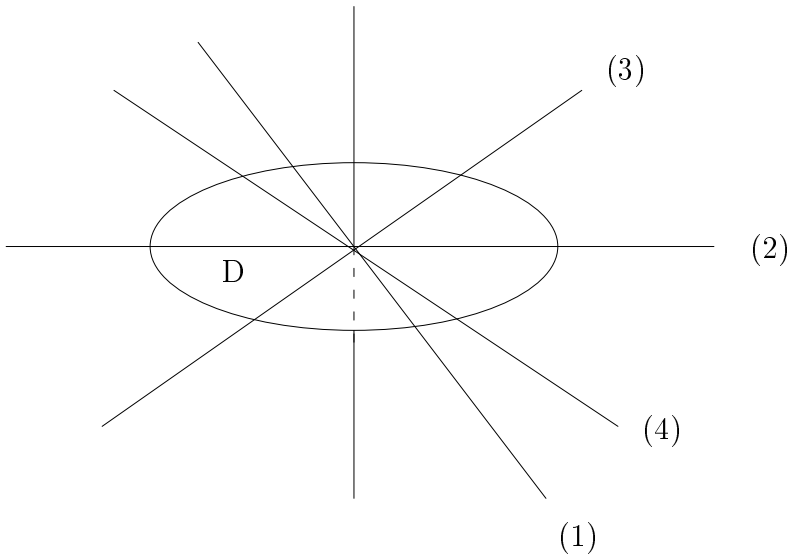
   Ετσι ο δείκτης κύκλων P_G της G είναι,

   $$P_G = \frac{1}{8}(x_1^8 + 4x_2^4 + 2x_4^2 + x_2^4) = \frac{1}{8}(x_1^8 + 5x_2^4 + 2x_4^2)$$

   οπότε για 3 χρώματα ο αριθμός εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας είναι,

   $$\frac{1}{8}[(x+y+z)^8 + 5(x^2+y^2+z^2)^4 + 2(x^4+y^4+z^4)^2] \overbrace{=}^{x=y=z=1}$$

   $$= \frac{1}{8}(3^8 + 5 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^2) = 873$$



Σχήμα 4.4: Ο κυκλικός δίσκος Δ της άσκησης 4.11 με τους τέσσερις άξονες του.

2. Εάν οι τέσσερις άξονες ληφθούν όμοιοι μεταξύ τους, εκτός των παραπάνω 8 μεταθέσεων θα έχουμε και άλλες 4,

   - τις περιστροφές κατά $45^o, 135^o, 225^o$ και 315° γύρω από τον κάθετο στο κέντρο του κύκλου άξονα, με κυκλικές αναπαραστάσεις x_8

   οπότε ο δείκτης κύκλων P_G γίνεται,

$$P_G = \frac{1}{12}(x_1^8 + 5x_2^4 + 2x_4^2 + 4x_8)$$

   οπότε ο αριθμός εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας γίνεται,

$$\frac{1}{12}[(x+y+z)^8 + 5(x^2+y^2+z^2)^4 + 2(x^4+y^4+z^4)^2 + 4(x^8+y^8+z^8)] \overbrace{=}^{x=y=z=1}$$

$$= \frac{1}{12}(3^8 + 5 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3) = 583$$

Ασκηση 4.12 *Βρείτε τους διαφορετικούς τρόπους χρωματισμού των οκτώ κορυφών ενός κύβου με δύο χρώματα x και y.*

Θεωρούμε το σύνολο D των 8 κορυφών του κύβου, το σύνολο $R = \{x, y\}$ των 2 χρωμάτων με $w(x) = x$ και $w(y) = y$. Αν G είναι η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές περιστροφές του κύβου, θα έχουμε $|G| = 24$ μεταθέσεις, που είναι οι εξής,

- η ταυτοτική μετάθεση, με κυκλική αναπαράσταση x_1^8
- 3 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180° γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4
- 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90° γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων, με κυκλική αναπαράσταση x_4^2
- 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές γύρω από άξονες, που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4

- 8 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120° γύρω από άξονες, που συνδέουν απέναντι κορυφές, με κυκλική αναπαράσταση $x_1^2x_3^2$

Συνεπώς ο δείκτης κύκλων P_G της ομάδας G είναι,

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2)$$

και ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών,

$$\frac{1}{24}[(x+y)^8 + 9(x^2+y^2)^4 + 6(x^4+y^4)^2 + 8(x+y)^2(x^3+y^3)^2]$$

Θέτουμε $x = y = 1$ και υπολογίζουμε τον αριθμό των διαφορετικών σχηματισμών

$$\frac{1}{24}(2^8 + 9 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^2 \cdot 2^2) = 23$$

που είναι ο ζητούμενος αριθμός.

Ασκηση 4.13 *Θεωρείστε την κλάση των οργανικών μορίων της μορφής*

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & & | & & \\ X & - & C & - & X \\ & & | & & \\ & & X & & \end{array}$$

όπου C είναι άτομο άνθρακα και κάθε X συμβολίζει οποιοδήποτε από τα συστατικά CH_3 *(μεθύλιο),*C_2H_5 *(αιθύλιο), H (υδρογόνο) ή Cl (χλώριο). Κάθε τέτοιο μόριο μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν ένα κανονικό τετράεδρο με το άτομο του άνθρακα να καταλαμβάνει την κεντρική θέση και τα συστατικά X στις κορυφές. Να βρεθεί ο αριθμός των διαφορετικών μορίων αυτής της μορφής.*

Ο ζητούμενος αριθμός συμπίπτει με τον αριθμό των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο D των τεσσάρων κορυφών του τετραέδρου και πεδίο τιμών το σύνολο R των τεσσάρων συστατικών CH_3, C_2H_5, H και Cl, και ομάδα μεταθέσεων G το σύνολο όλων των δυνατών μεταθέσεων, που αντιστοιχούν στις περιστροφές του τετραέδρου. Αυτές είναι,

- η ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^4
- 8 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120° γύρω από άξονες, που συνδέουν μία κορυφή με το κέντρο της απέναντι όψεως, με κυκλική αναπαράσταση x_1x_3
- 3 μεταθέσεις, που αντιστοιχούνσε περιστροφές 180° γύρω από άξονες, που συνδέουν μέσα απέναντι ακμών, με κυκλική αναπαράσταση x_2^2

Ετσι ο δείκτης κύκλων P_G είναι,

$$P_G = \frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)$$

και ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών,

$$\frac{1}{12}[(x+y+z+w)^4 + 8(x+y+z+w)(x^3+y^3+z^3+w^3) + 3(x^2+y^2+z^2+w^2)^2]$$

οπότε για $x = y = z = w = 1$ έχουμε για το ζητούμενο αριθμό,

$$\frac{1}{12}(4^4 + 8 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2) = 36$$

Ασκηση 4.14 *Βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να χρωματίσουμε 5 από τις 8 κορυφές ενός κύβου μαύρες και τις υπόλοιπες 3 άσπρες.*

Εστω G η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχεί σε όλες τις δυνατές συμμετρίες του κύβου. Υπάρχουν 24 τέτοιες μεταθέσεις,

- η ταυτοτική με κυκλική αναπαράσταση x_1^8
- 3 περιστοφές 180° γύρω από άξονες, που ενώνουν τα μέσα απέναντι όψεων, με αναπαράσταση x_2^4
- 6 περιστροφές 90° γύρω από τους ίδιους άξονες, με αναπαραστάσεις x_4^2
- 6 περιστροφές 180° γύρω από άξονες, που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών, με αναπαραστάσεις x_2^4 και τέλος
- 8 περιστροφές 120° γύρω από άξονες, που ενώνουν απέναντι κορυφές, με αναπαραστάσεις $x_1^2x_3^2$

Ετσι ο δείκτης κύκλων P_G της G είναι,

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2)$$

και ο αριθμός εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας για δύο χρώματα x,y είναι,

$$\frac{1}{24}[(x+y)^8 + 9(x^2+y^2)^4 + 6(x^4+y^4)^2 + 8(x+y)^2(x^3+y^3)^2] =$$

$$= \frac{1}{24}[\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x^k y^{8-k} + 9\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^{2k}y^{8-2k} +$$

$$+6(x^8 + 2x^4y^4 + y^8) + 8(x^2 + 2xy + y^2)(x^6 + 2x^3y^3 + y^6)].$$

Ετσι ο συντελεστής του x^5y^3 είναι,

$$\frac{1}{24}[\binom{8}{5} + 8\cdot 2] = \frac{1}{24}(\frac{6\cdot 7\cdot 8}{6} + 16) = 3.$$

Αρα ο ζητούμενος αριθμός τρόπων είναι 3.

Ασκηση 4.15 *Δείξτε ότι ο $n^8 + 17n^4 + 6n^2$ διαιρείται με το 24 για κάθε θετικό αριθμό n.*

Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας για το χρωματισμό των κορυφών ενός κύβου με τα n χρώματα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι,

$$\frac{1}{24}[(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^8 + 9(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^4 +$$

$$+6(a_1^4 + \ldots + a_n^4)^2 + 8(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3)^2]$$

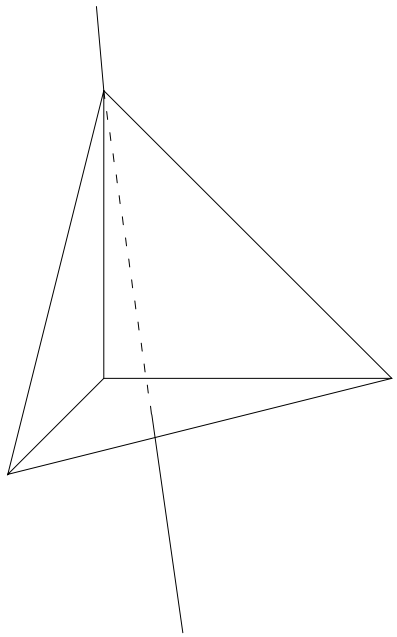
Ετσι θέτοντας $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ παίρνουμε τον αριθμό των δυνατών χρωματισμών των κορυφών του κύβου με 1 ή περισσότερα από n διαφορετικά χρώματα, που είναι,

$$\frac{n^8 + 9n^4 + 6n^2 + 8n^2n^2}{24} = \frac{n^8 + 17n^4 + 6n^2}{24}$$

Οπως εξηγήθηκε, ο αριθμός αυτός αναπαριστά τρόπους χρωματισμού και συνεπώς είναι ακέραιος.

Ασκηση 4.16 *Εστω D το σύνολο των 4 όψεων μίας κανονικής πυραμίδας και G η ομάδα μεταθέσεων του D, που παράγεται από την περιστροφή της πυραμίδας.*

1. *Βρείτε το δείκτη κύκλων P_G της G.*
2. *Ενα ή περισσότερα από 4 χρώματα, χρυσαφί, κόκκινο, άσπρο και μπλέ χρησιμοποιούνται για να βάψουμε τις όψεις της πυραμίδας. Βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών χρωματισμών.*



Σχήμα 4.5: Η κανονική πυραμίδα με τον άξονα συμμετρίας της.

1. Εστω G η ομάδα μεταθέσεων της πυραμίδας D. Είναι $|G| = 3$ διότι στη G υπάρχουν,

   - η ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^4
   - η μετάθεση, που αντιστοιχεί σε περιστροφή κατά 120° γύρω από τον κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο της βάσεώς της, με αναπαράσταση x_1x_3 και τέλος
   - η μετάθεση, που αντιστοιχεί σε περιστροφή κατά -120° γύρω από τον ίδιο άξονα, με αναπαράσταση x_1x_3

   Αρα ο δείκτης κύκλων P_G της G είναι,

$$P_G = \frac{1}{3}(x_1^4 + 2x_1x_3)$$

2. Εάν θέλουμε να βάψουμε τις 4 όψεις της πυραμίδας με 4 χρώματα, έστω x,y,z,t, παίρνουμε για τον αριθμό εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας,

$$\frac{1}{3}[(x+y+z+t)^4 + 2(x+y+z+t)(x^3+y^3+z^3+t^3)] \overbrace{=}^{x=y=z=t=1}$$

$$= \frac{1}{3}(4^4 + 2 \cdot 4 \cdot 4) = 96$$

   που είναι ο ζητούμενος αριθμός.

Ασκηση 4.17 *Βρείτε τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους 6 σφαίρες, 3 κόκκινες, 2 άσπρες και 1 μπλέ, μπορούν να τοποθετηθούν σε τρία διαφορετικά κουτιά.*

Εστω D το σύνολον των 6 σφαιρών , $D = \{a, b, c, d, e, f\}$, όπου οι a,b,c είναι κόκκινες, οι d,e είναι άσπρες και η f είναι μπλέ. Εστω επίσης R το σύνολο των κουτιών με $R = \{c_1, c_2, c_3\}$, και $w(c_1) = c_1, w(c_2) = c_2$ και $w(c_3) = c_3$.

Ο δείκτης κύκλων της ομάδας μεταθέσεων G επί του D βρίσκεται με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων. Εχουμε στην ομάδα 12 συνολικά μεταθέσεις, αφού έχουμε 3! μεταθέσεις των

στοιχείων a,b,c, 2! μεταθέσεις των στοιχείων d,e και τέλος 1 μετάθεση του στοιχείου e, δηλαδή συνολικά $3! \cdot 2! \cdot 1 = 12$ μεταθέσεις. Ετσι,

$$P_G = \frac{1}{12}[(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)(x_1^2 + x_2)x_1] =$$

$$= \frac{1}{12}(x_1^6 + 4x_1^4x_2 + 2x_1^3x_3 + 3x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2x_3)$$

οπότε ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών γίνεται,

$$\frac{1}{12}[(c_1 + c_2 + c_3)^6 + 4(c_1 + c_2 + c_3)^4(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + 2(c_1 + c_2 + c_3)^3(c_1^3 + c_2^3 + c_3^3) +$$

$$+3(c_1 + c_2 + c_3)^2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)^2 + 2(c_1 + c_2 + c_3)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(c_1^3 + c_2^3 + c_3^3)]$$

Θέτοντας $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ παίρνουμε,

$$\frac{1}{12}(3^6 + 4 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 3 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3) = 180$$

Ασκηση 4.18 *Πόσοι είναι οι τρόποι χρωματισμού με μαύρο και άσπρο χρώμα μιας 2×2 σκακιέρας, όταν λαμβάνονται υπόψιν οι περιστροφές της σκακιέρας και μας ενδιαφέρουν οι σχηματισμοί μόνον ως προς την αντίθεσή τους. (Δηλαδή αν σε ένα σχηματισμό τα χρώματα εναλλαγούν, ο σχηματισμός, που προκύπτει, θεωρείται ίδιος με τον αρχικό.)*

Εστω $D = \{a, b, c, d\}$ το σύνολον των 4 τετραγώνων της σκακιέρας και $R = \{x, y\}$ το σύνολον των 2 χρωμάτων, μαύρο και άσπρο. Εστω

$$G = \{\tbinom{abcd}{abcd}, \tbinom{abcd}{bcda}, \tbinom{abcd}{cdab}, \tbinom{abcd}{dabc}\}$$

όπου οι μεταθέσεις αντιστοιχούν στις περιστροφές της σκακιέρας. Οταν μας ενδιαφέρουν οι σχηματισμοί μόνον ως προς την αντίθεσή τους, έχουμε και την ομάδα μεταθέσεων,

$$H = \{\tbinom{xy}{xy}, \tbinom{xy}{yx}\}$$

επί του συνόλου R των χρωμάτων, όπου η δεύτερη μετάθεση σημαίνει την εναλλαγή των 2 χρωμάτων x και y. Από την επέκταση του Θεωρήματος του Pólya, θα πάρουμε για τον ζητούμενο αριθμό τρόπων,

$$\frac{1}{8}(\frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + 2\frac{\partial}{\partial z_4})[e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + e^{2(z_2+z_4)}]_{z_1=z_2=z_3=z_4=0} =$$

$$= \frac{1}{8}[2^4e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + 2^2e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} +$$

$$+2^2e^{2(z_2+z_4)} + 2 \cdot 2e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + 2 \cdot 2e^{2(z_2+z_4)}]_{z_1=\ldots=z_4=0} =$$

$$= \frac{1}{8}(2^4 + 2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2) = 4$$

Ασκηση 4.19 *Ενας ορισμένος αριθμός μυνημάτων θα αναπαρασταθούν από ακολουθίες μήκους n από 4 ψηφία και θα μεταδοθούν μέσω ενός καναλιού επικοινωνίας. Για κάθε ένα από τα ψηφία 0,1,2 και 3, που θα λαμβάνεται, ένα αντίστοιχο φωτάκι θα ανάβει, έτσι ώστε να μπορεί να αποθηκεύεται η αποστελλόμενη ακολουθία. Δυστυχώς στα φωτάκια για τα ψηφία 2 και 3 δεν είχαν δοθεί ονόματα όταν φτιάχτηκε ο δέκτης κι έτσι δεν υπάρχει τρόπος να καθοριστεί ποιό από τα δύο ψηφία αποστέλλεται. Ετσι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλες τις 4^n n-ακολουθίες για να αναπαραστήσουμε 4^n διαφορετικά μυνήματα. Ζητείται ο αριθμός των διαφορετικών μυνημάτων μήκους n, που μπορούν να αποσταλούν.*

Εστω $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ το σύνολο των n θέσεων στην ακολουθία μήκους n από τα 4 ψηφία $\{0, 1, 2, 3\}$. Εστω $R = \{0, 1, 2, 3\}$ το σύνολο των 4 αυτών ψηφίων. Τότε,

$$G = \{\binom{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_1 a_2 \ldots a_n}\}$$

είναι η ομάδα μεταθέσεων G του D και

$$H = \{\binom{0123}{0123}, \binom{0123}{0132}\}$$

είναι η ομάδα μεταθέσεων του R. Ο αριθμός των διαφορετικών μυνημάτων, που μπορούν να αποσταλούν ισούται με τον αριθμό των διαφορετικών σχηματισμών από το D στο R και σύμφωνα με την επέκταση του Θεωρήματος του Pólya ισούται με,

$$\frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} P_G(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \ldots) P_H(e^{z_1+z_2+\cdots}, e^{2(z_2+z_4+\ldots)}, \ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\partial^n}{\partial z_1^n})(e^{4z_1} + e^{2z_1})_{z_1=0} =$$

$$= \frac{1}{2}(4^n e^{4z_1} + 2^n e^{2z_1})_{z_1=0} = \frac{1}{2}(4^n + 2^n)$$

Ασκηση 4.20 *Με πόσους τρόπους μπορούν 5 βιβλία, 2 από τα οποία είναι ίδια, να μοιραστούν σε 4 παιδιά εάν μεταξύ τους υπάρχει ένα ζευγάρι όμοιων διδύμων.*

Εστω $D = \{a, b, c, d, e\}$ το σύνολον των 5 βιβλίων, οπου τα a,b είναι ίδια. Αφού 2 τρόποι καταμερισμού των βιβλίων είναι ισοδύναμοι εάν ο ένας προκύπτει από τον άλλον με εναλλαγή των a,b έχουμε,

$$G = \{\binom{abcde}{abcde}, \binom{abcde}{bacde}\}$$

την ομάδα μεταθέσεων του D. Εστω $R = \{u, v, x, y\}$ το σύνολο των τεσσάρων παιδιών με τα u,v διδύμους. Αφού 2 τρόποι καταμερισμού των βιβλίων είναι ισοδύναμοι εάν οι δίδυμοι u,v αλλάζουν μεταξύ τους τα βιβλία, που παίρνουν, έχουμε

$$H = \{\binom{uvxy}{uvxy}, \binom{uvxy}{vuxy}\}$$

την ομάδα μεταθέσεων του R.

Ο ζητούμενος αριθμός των τρόπων καταμερισμού των 5 βιβλίων στα 4 παιδιά είναι σύμφωνα με τη γενίκευση του Θεωρήματος του Pólya,

$$\frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} P_G(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \ldots) P_H(e^{z_1+z_2+\cdots}, e^{2(z_2+z_4+\ldots)}, \ldots) =$$

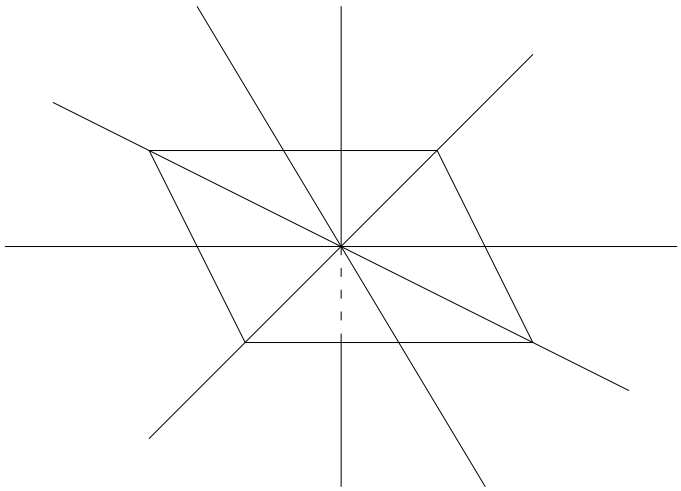
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\frac{\partial^5}{\partial z_1^5} + \frac{\partial^3}{\partial z_1^3} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2})[e^{4(z_1+z_2)} + e^{2(z_1+z_2)} e^{2z_2}]_{z_1=z_2=0} =$$

$$= \frac{1}{4}[4^5 e^{4(z_1+z_2)} + 4^4 e^{4(z_1+z_2)} + 2^5 e^{2(z_1+z_2)} e^{2z_2} +$$

$$+ 4 \cdot 2^3 e^{2(z_1+z_2)} e^{2z_2}]_{z_1=z_2=0} =$$

$$= \frac{1}{4}(4^5 + 4^4 + 2^5 + 4 \cdot 2^3) = \frac{1}{4} 1.344 = 336$$

Ασκηση 4.21 *Οι πλευρές ενός τετραγώνου χρωματίζονται με τρία χρώματα. Δύο χρωματισμοί καλούνται ισοδύναμοι εάν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με περιστροφή του τετραγώνου και / ή με μετάθεση των χρωμάτων. Βρείτε τον αριθμό των κλάσεων ισοδυναμίας των χρωματικών σχηματισμών.*



Σχήμα 4.6: Το τετράγωνο της άσκησης 4.21 και οι άξονες συμμετρίας του.

Εστω $D = \{a, bc, d\}$ το σύνολον των πλευρών του τετραγώνου και G η ομάδα μεταθέσεων επί του D με,

$$G = \{\tbinom{abcd}{abcd}, \tbinom{abcd}{dabc}, \tbinom{abcd}{bcda}, \tbinom{abcd}{cdab}, \tbinom{abcd}{badc}, \tbinom{abcd}{dcba}, \tbinom{abcd}{cbad}, \tbinom{abcd}{adcb}\}.$$

Εστω επίσης $R = \{x, y, z\}$ το σύνολον των τριών χρωμάτων και H η ομάδα μεταθέσεων του R με,

$$H = \{\tbinom{xyz}{xyz}, \tbinom{xyz}{xzy}, \tbinom{xyz}{zyx}, \tbinom{xyz}{yxz}, \tbinom{xyz}{yzx}, \tbinom{xyz}{zxy}\}.$$

Εχουμε,

$$P_G = \frac{1}{8}(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 2x_4)$$

και

$$P_H = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$$

Ετσι σύμφωνα με την επέκταση του Θεωρήματος του Pólya ο ζητούμενος αριθμός κλάσεων ισοδυναμίας των χρωματικών σχηματισμών είναι,

$$\frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} P_G(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \ldots) \times P_H(e^{z_1+z_2+\cdots}, e^{2(z_2+z_4+\ldots)}, \ldots) =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6}(\frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2} + 3\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + 2\frac{\partial}{\partial z_4}) \times$$

$$\times [e^{3(z_1+z_2+z_3+z_4)} + 3e^{z_1+z_2+z_3+z_4}e^{2(z_2+z_4)} + 2e^{3z_3}]_{z_1=z_2=z_3=z_4=0} =$$

$$= \frac{1}{48}[3^4 e^{3(z_1+\ldots+z_4)} + 3e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)} +$$

$$+2(3^3 e^{3(z_1+\ldots+z_4)} + 3e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)} + 6e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)}) +$$

$$+3(3^2 e^{3(z_1+\ldots+z_4)} + 3e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)} + 6e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)} +$$

$$+6e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)} + 12e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)}) +$$

$$+2(3e^{3(z_1+\ldots+z_4)} + 3e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)} + 6e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)})] =$$

$$= \frac{1}{48}[3^4 + 3 + 2(3^3 + 3 + 6) + 3(3^2 + 3 + 6 + 6 + 12) + 2(3 + 3 + 6) =$$

$$= \frac{1}{48}288 = 6$$

Ασκηση 4.22

1. *Τα τετράγωνα μιας 4×4 σκακιέρας θα χρωματιστούν με μαύρη και άσπρη μπογιά. Για να δημιουργήσουμε όλους τους μαυρόασπρους σχηματισμούς, πόσα διαφορετικά σχήματα πρέπει να κάνουμε;*

2. *Εάν κάθε σχήμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε όπως είναι είτε σαν το αρνητικό του (δηλαδή να θεωρούμε το μαύρο άσπρο και το άσπρο μαύρο στο σχήμα), πόσα διαφορετικά σχήματα πρέπει να κάνουμε;*

(Στη λύση, που παρουσιάζουμε, θεωρούμε για ευκολία ότι η σκακιέρα δεν είναι διαφανής, δηλαδή δεν μπορούμε να πάρουμε κάποιο έγκυρο σχήμα με αναποδογύρισμα κάποιου άλλου.)

1. Εστω $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_{16}\}$ το σύνολον των 16 τετραγώνων της 4×4 σκακιέρας και $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ η ομάδα μεταθέσεων επί του D με π_1 τη ταυτοτική μετάθεση, με κυκλική αναπαράσταση x_1^{16}, π_2 τη μετάθεση, που αντιστοιχεί σε αριστερόστροφη περιστροφή της σκακιέρας κατά 90° γύρω από άξονα, κάθετο στο κέντρο της, με κυκλική αναπαράσταση x_4^4, και π_3, π_4 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές κατά 180° και 270°, αντίστοιχα, γύρω από τον ίδιο άξονα, με κυκλικές αναπαραστάσεις x_2^8, x_4^4, αντίστοιχα. Τότε ο δείκτης κύκλων της G είναι,
$$P_G = \frac{1}{4}(x_1^{16} + x_2^8 + 2x_4^4)$$
Εστω $R = \{x, y\}$ το σύνολον των 2 χρωμάτων, μαύρο και άσπρο. Εστω επίσης $w(x) = x$ και $w(y) = y$. Τότε ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών γίνεται,
$$\frac{1}{4}[(x+y)^{16} + (x^2+y^2)^8 + 2(x^4+y^4)^4]$$
Θέτοντας $x = y = 1$ παίρνουμε για το ζητούμενο αριθμό σχημάτων,
$$\frac{1}{4}(2^{16} + 2^8 + 2 \cdot 2^4) = 16456$$

2. Επιπλέον έχουμε και την ομάδα μεταθέσεων
$$H = \{\tbinom{xy}{xy}, \tbinom{xy}{yx}\}$$
πάνω στο R με δείκτη κύκλων $P_H = x_1^2 + x_2$. Τότε σύμφωνα με το γενικευμένο Θεώρημα του Pólya ο ζητούμενος αριθμός σχημάτων είναι,
$$\frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} P_G(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \ldots) \times P_H(e^{z_1+z_2+\cdots}, e^{2(z_2+z_4+\ldots)}, \ldots)_{z_1=z_2=\ldots=0} =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(\frac{\partial^{16}}{\partial z_1^{16}} + \frac{\partial^8}{\partial z_2^8} + 2\frac{\partial^4}{\partial z_4^4})[e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + e^{2(z_2+z_4)}]_{z_1=\ldots=z_4=0} =$$
$$= \frac{1}{8}(2^{16} + 2^8 + 2^8 + 2 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^4) = 8264$$

Κεφάλαιο 5

Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού

I can see that your head has been twisted and fed
with worthless foam from the mouth
I can tell you are torn between staying and
returning back to the South
You' ve been fooled into thinking that
the finishing end is at hand
Yet there' s no one to beat you, no one to defeat you
'cept the thoughts of yourself feeling bad

I' d forever talk to you, but soon my words
would turn into a meaningless ring
For deep in my heart I know there' s
no help I can bring
Everything passes, everything changes just do
what you thing you should do
And someday, maybe, who knows, baby,
I'll come and be crying to you

To Ramona
BOB DYLAN

Ασκηση 5.1 *Πόσες τοποθετήσεις των ψηφίων* $0, 1, 2, \ldots, 9$ *υπάρχουν, στις οποίες το πρώτο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το 1 και το τελευταίο ψηφίο να είναι μικρότερο από το 8 ;*

Εστω $N = 10!$ οι συνολικές μεταθέσεις των ψηφίων $0, 1, \ldots, 9$. Εστω επίσης c_1 το γεγονός το πρώτο ψηφίο στις μεταθέσεις να είναι μικρότερο ή ίσο με το 1 και c_2 το γεγονός το τελευταίο ψηφίο νά είναι μεγαλύτερο ή ισο με το 8. Τότε αναζητούμε το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2})$ και έχουμε,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1c_2) =$$

$$= 10! - 2 \cdot 9! - 2 \cdot 9! + 4 \cdot 8! = 2338560$$

Ασκηση 5.2 *Πόσοι ακέραιοι μικρότεροι του 70 είναι σχετικά πρώτοι με τον 70; (Σχετικά πρώτοι σημαίνει ότι δεν έχουν κοινούς διαιρέτες με εξαίρεση τη μονάδα)*

Είναι $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$. Εστω $S = \{1, 2, 3, \ldots, 70\}$ με $N = |S| = 70$ και $c_i, (1 \leq i \leq 3)$ το γεγονός ένας αριθμός $k \in S$ να διαιρείται με το 2, το 5 ή το 7 αντίστοιχα. Για να είναι ένας $k \in S$ σχετικά πρώτος με το 70 πρέπει να μην είναι διαιρέσιμος με κανέναν από τους 2,5,7, οπότε ψάχνουμε το,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) =$$

$$= N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3)] + [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3)] - N(c_1c_2c_3) =$$

$$= 70 - (35 + 14 + 10) + (7 + 5 + 2) - 1 = 24$$

Ασκηση 5.3 *Πόσες λέξεις n ψηφίων από το αλφάβητο* $\{0, 1, 2\}$ *υπάρχουν, με ένα τουλάχιστον 0, ένα τουλάχιστον 1 και ένα τουλάχιστον 2;*

Εστω S το σύνολο των λέξεων n ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$ με $N = |S| = 3^n$. Εστω επίσης c_i με $0 \leq i \leq 2$ το γεγονός μία λέξη n ψηφίων του S να μήν περιέχει το ψηφίο i. Τότε ζητάμε το $N(\overline{c_0}\ \overline{c_1}\ \overline{c_2})$ και έχουμε,

$$N(\overline{c_0}\ \overline{c_1}\ \overline{c_2}) =$$

$$= N - N(c_0) - N(c_1) - N(c_2) + N(c_0c_1) + N(c_0c_2) + N(c_1c_2) - N(c_0c_1c_2) =$$

$$= 3^n - 2^n - 2^n - 2^n + 1 + 1 + 1 - 0 =$$

$$= 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 = 3(3^{n-1} - 2^n + 1)$$

Ασκηση 5.4 *Σε ένα σχολείο υπάρχουν 1000 μαθητές. Απ' αυτούς οι 400 μιλάνε Γαλλικά, οι 300 Ιταλικά και 200 μιλάνε Γερμανικά. Εάν υπάρχουν 200 μαθητές,που μιλάνε οποιεσδήποτε 2 γλώσσες και 100 μαθητές, που μιλάνε και τις 3 γλώσσες, πόσοι είναι οι μαθητές, που δε μιλάνε καμμιά γλώσσα;*

Εστω S το σύνολο των μαθητών με $N = |S| = 1000$. Εστω επίσης F,I,G τα γεγονότα ένας μαθητής να μιλάει Γαλλικά, Ιταλικά ή Γερμανικά αντίστοιχα. Τότε ψάχνουμε το $N(\overline{F}\ \overline{I}\ \overline{G})$ και σύμφωνα με την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού έχουμε,

$$N(\overline{F}\ \overline{I}\ \overline{G}) =$$

$$= N - N(F) - N(I) - N(G) + N(FI) + N(FG) + N(IG) - N(FIG) =$$

$$= 1000 - 400 - 300 - 200 + 200 - 100 = 200$$

Ασκηση 5.5 *Σε ένα Σεμινάριο Μαθηματικών διαρκείας 12 εβδομάδων ο Γιώργος συνάντησε 7 από τους παλιούς του συμμαθητές στο 5ο Λύκειο. Κατά τη διάρκεια του σεμιναρίου γευμάτισε με κάθε συμμαθητή του 35 φορές, με κάθε ζευγάρι συμμαθητών του 16 φορές, με κάθε τριάδα 8 φορές, με κάθε τετράδα 4 φορές, με κάθε πεντάδα 2 φορές, με κάθε εξάδα 1 φορά, ενώ δεν εγευμάτισε καμιά φορά και με τους επτά μαζί. Αν ο Γιώργος γευμάτιζε καθημερινά κατά τη διάρκεια των 84 ημερών του σεμιναρίου, υπήρξε μέρα κατά την οποία γευμάτισε μόνος;*

Εστω $\{1, 2, \ldots, 7\}$ το σύνολον των επτά συμμαθητών με τους οποίους συναντήθηκε ο Γιώργος στο σεμινάριο. Ας είναι $c_i, 1 \leq i \leq 7$, το γεγονός ότι ο Γιώργος γευμάτισε με τον συμμαθητή του i. Τότε αναζητούμε τον αριθμό $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_7})$. Αρα είναι, ότι,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_7}) = N - \binom{7}{1}N(c_i) + \binom{7}{2}N(c_ic_j) - \binom{7}{3}N(c_ic_jc_k) +$$

$$+\binom{7}{4}N(c_ic_jc_kc_l) - \binom{7}{5}N(c_ic_jc_kc_lc_m) + \binom{7}{6}N(c_ic_jc_kc_lc_mc_n) - N(c_1c_2 \ldots c_7) =$$

$$= 84 - 7 \cdot 35 + 21 \cdot 16 - 35 \cdot 8 + 35 \cdot 4 - 21 \cdot 2 + 7 \cdot 1 - 0 = 0$$

Αρα ο Γιώργος δεν γευμάτισε μόνος καμιά φορά κατά τη διάρκεια του σεμιναρίου.

Ασκηση 5.6 *Για $n \in Z^+$, ας είναι $\varphi(n)$ ο αριθμός των θετικών ακεραίων m, όπου $1 \leq m < n$ και $(m, n) = 1$, δηλαδή m,n είναι σχετικά πρώτοι. Αυτή η συνάρτησις είναι γνωστή σαν συνάρτησις φι του Euler. Να βρεθεί ένας τύπος, που να μας δίνει το $\varphi(n)$.*

Για κάθε $n \geq 2$ μπορούμε να γράψουμε το n σαν $n = p_1^{e_1}p_2^{e_2} \ldots p_t^{e_t}$, όπου $p_1, p_2, \ldots, p_t$ είναι διακεκριμμένοι πρώτοι αριθμοί και $e_i \geq 1, 1 \leq i \leq t$. Εστω $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ με $N = |S| = n$ και για $1 \leq i \leq t$, λέμε ότι το $k \in S$ ικανοποιεί τη συνθήκη c_i, εάν το k είναι διαιρέσιμο διά του p_i. Τότε για $1 \leq k \leq n, (k, n) = 1$ εάν το k δεν είναι διαιρέσιμο με κανένα πρώτο $p_i, 1 \leq i \leq t$. Επομένως $\varphi(n) = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \ldots\ \overline{c_t})$. Επομένως έχουμε,

$$\varphi(n) = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \ldots\ \overline{c_t}) =$$

$$= N - N(c_1) - N(c_2) - \ldots - N(c_t)$$

$$+N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \ldots + N(c_{t-1}c_t)$$

$$-N(c_1c_2c_3) - N(c_1c_2c_4) - \ldots - N(c_{t-2}c_{t-1}c_t)$$

$$+ \ldots + (-1)^t N(c_1c_2 \ldots c_t) =$$

$$= n - [\frac{n}{p_1} + \ldots + \frac{n}{p_t}] + [\frac{n}{p_1p_2} + \ldots + \frac{n}{p_{t-1}p_t}] -$$

$$-[\frac{n}{p_1p_2p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{t-2}p_{t-1}p_t}] + \ldots + (-1)^t \frac{n}{p_1p_2 \cdots p_t} =$$

$$= \frac{n}{p_1p_2 \cdots p_t}[p_1p_2 \ldots p_t - (p_2p_3 \ldots p_t + \ldots + p_1p_2 \ldots p_{t-1}) +$$

$$+(p_3p_4 \ldots p_t + \ldots + p_1p_2 \ldots p_{t-2}) - \ldots + (-1)^t] =$$

$$= \frac{n}{p_1p_2 \cdots p_t}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_t - 1) == n\frac{p_1 - 1}{p_1}\frac{p_2 - 1}{p_2} \ldots \frac{p_t - 1}{p_t} =$$

$$= n \prod_{p_i \backslash n} \frac{p_i - 1}{p_i} = n \prod_{p_i \backslash n} (1 - \frac{1}{p_i})$$

Ασκηση 5.7 *Εστω $n \in Z^+$.*

1. *Προσδιορίστε το $\varphi(2^n)$*
2. *Προσδιορίστε το $\varphi(2^n p)$, όπου p πρώτος.*

(φ είναι η συνάρτησις φι του Euler με $\varphi(n)$ τον αριθμό των ακεραίων m με $1 \leq m < n$, που είναι σχετικά πρώτοι με τον n.)

Γνωρίζουμε από την άσκηση 5.6 ότι ισχύει

$$\varphi(n) = n \prod_{p \backslash n} (1 - \frac{1}{p})$$

1. Θέτουμε όπου n το 2^n. Τότε ο μόνος πρώτος διαιρέτης του 2^n είναι ο 2, οπότε

$$\varphi(2^n) = 2^n(1 - \frac{1}{2}) = 2^{n-1}$$

2. Θέτομε όπου n το $2^n p$. Τότε οι μόνοι πρώτοι διαιρέτες είναι οι 2 και p. Ετσι

$$\varphi(2^n p) = 2^n p(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{p}) = 2^{n-1}(p-1)$$

Ασκηση 5.8 *Να βρεθεί ο αριθμός των θετικών ακεραίων n,$1 \leq n \leq 100$ και n να μην διαιρείται από τους 2,3 και 5.*

Εστω $S = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ με $N = |S| = 100$ και c_i με $1 \leq i \leq 3$ η ιδιότητα ο k με $1 \leq k \leq 100$ ($k \in S$) να διαιρείται αντίστοιχα με το 2,3 και 5. Τότε ψάχνουμε το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$ και έχουμε,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) =$$

$$= N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1c_2) + N(c_2c_3) + N(c_1c_3) - N(c_1c_2c_3) =$$

$$= 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26$$

Ασκηση 5.9 *Ενας φοιτητής θέλει να φτιάξει ένα πρόγραμμα για μια χρονική περίοδο 7 ημερών, έτσι ώστε κάθε μέρα να μελετά ένα μόνο μάθημα. Τα μαθήματα είναι μαθηματικά, φυσική, χημεία και οικονομία. Να βρεθεί ο αριθμός αυτών των προγραμμάτων.*

Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τις λέξεις 7 ψηφίων, που μπορούμε να φτιάξουμε από το αλφάβητο $\{\mu, \varphi, \chi, o\}$, όπου όμως σε κάθε λέξη θα χρησιμοποιούμε κάθε γράμμα του αλφαβήτου αυτού τουλάχιστον 1 φορά. Εστω S το σύνολο όλων των λέξεων 7 ψηφίων από το συγκεκριμμένο αλφάβητο. Τότε $N = |S| = 4^7 = 16.384$. Εστω επίσης $c_i, 1 \leq i \leq 4$, η ιδιότητα το γράμμα μ,φ,χ,ο να μην περιέχεται καμμιά φορά σε μία λέξη του S αντίστοιχα. Δηλαδή θέλουμε να υπολογίσουμε το,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + N(c_4)] +$$

$$+[N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \ldots + N(c_3c_4)] -$$

$$-[N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + N(c_1c_3c_4) + N(c_2c_3c_4)] +$$

$$+N(c_1c_2c_3c_4) =$$

$$= 16.384 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4 + 0 = 8400$$

Ασκηση 5.10 *Πόσοι μη κατευθυνόμενοι γράφοι 5 σημείων, χωρίς απομονωμένα σημεία και χωρίς θηλειές, υπάρχουν;*

Ας είναι S το σύνολον των μη κατευθυνόμενων γράφων με σημεία $\{a,b,c,d,e\}$, που δεν περιέχουν θηλειές. Τότε έχουμε $N = |S| = 2^{10}$, αφού υπάρχουν $\binom{5}{2} = 10$ γραμμές, με τις οποίες είναι δυνατόν να συνδεθούν τα σημεία του γράφου και κάθε μία απ' αυτές τις γραμμές μπορεί να περιλαμβάνεται ή να μην περιλαμβάνεται στο γράφο ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες.

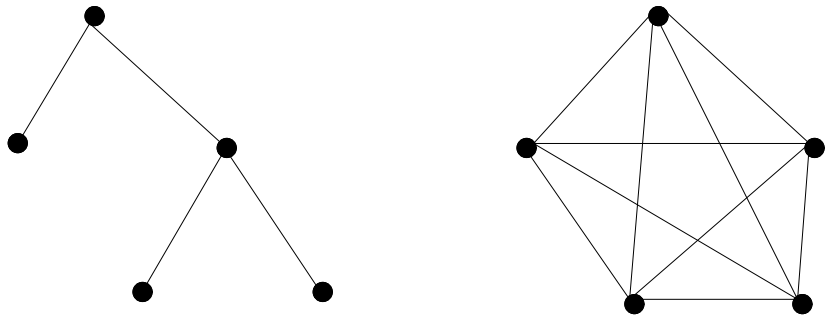
Εστω τώρα $c_i, 1 \leq i \leq 5$, η συνθήκη που καθορίζει ότι στο δοθέντα γράφο το σημείο a,b,c,d ή e αντίστοιχα, είναι απομονωμένο. Προφανώς η απάντηση στο πρόβλημα είναι,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}) = N - \binom{5}{1}N(c_i) + \binom{5}{2}N(c_ic_j) -$$

$$-\binom{5}{3}N(c_ic_jc_k) + \binom{5}{4}N(c_ic_jc_kc_l) - \binom{5}{5}N(c_1c_2c_3c_4c_5) =$$

$$= 2^{10} - 5 \cdot 2^6 + 10 \cdot 2^3 - 10 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 1 = 768.$$

Ασκηση 5.11 *Εάν ρίξουμε οκτώ διαφορετικά ζάρια, ποιά είναι η πιθανότητα να εμφανιστούν και τα έξι δυνατά ενδεχόμενα .*



Σχήμα 5.1: Δύο από τους γράφους, που μετράμε στην άσκηση 5.10.

Εστω $c_i, 1 \leq i \leq 6$, το γεγονός να μην εμφανισθεί το ενδεχόμενο i. Τότε αναζητούμε το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_6})$. Εχουμε,

$$N = 6^8, N(c_i) = 5^8, N(c_i c_j) = 4^8$$

$$N(c_i c_j c_k) = 3^8, N(c_i c_j c_k c_l) = 2^8, N(c_i c_j c_k c_l c_m) = 1$$

και τέλος,

$$N(c_1 c_2 \ldots c_6) = 0$$

Επομένως έχουμε ότι,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_6}) = N - \binom{6}{1}5^8 + \binom{6}{2}4^8 - \binom{6}{3}3^8 + \binom{6}{4}2^8 - \binom{6}{5} + 0 = 191520.$$

Αρα η ζητούμενη πιθανότητα να εμφανιστούν και τα έξι δυνατά ενδεχόμενα είναι $P = \frac{N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_6})}{N} = \frac{191520}{6^8} = 0.114$

Ασκηση 5.12 *Μία γιαγιά έχει 8 εγγόνια στα οποία αρέσουν τα παγωτά. Στην κατάψυξή της έχει αρκετό παγωτό για να βάλει 6 μπάλλες κρέμα, 3 μπάλλες σοκολάτα, 6 μπάλλες φράουλα και 5 μπάλλες μόκα. Την ημέρα των γεννεθλίων της όλα τα εγγόνια της την επισκέπτονται και το μεγαλύτερο της απαριθμεί πόσες απαιτήσεις υπάρχουν για κάθε είδος παγωτού. Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να ζητήσουν τα εγγόνια παγωτό έτσι ώστε να φέρουν τη γιαγιά στη δύσκολη θέση να μην μπορεί να τα ικανοποιήσει.*

Εστω N ο αριθμός όλων των τρόπων με τους οποίους μπορούν τα εγγόνια να ζητήσουν παγωτό. Προφανώς είναι $N = 4^8 = 65536$. Ας είναι c_i η ιδιότητα κάποιος από τους τρόπους αυτούς να μην μπορεί να εξυπηρετηθεί λόγω ανεπάρκειας του παγωτού i $(1 \leq i \leq 4)$. Τότε προφανώς ο αριθμός των τρόπων, που δεν φέρνουν σε δύσκολη θέση τη γιαγιά είναι ο $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$. Αρα είναι,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - (N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + N(c_4)) + \binom{4}{2}N(c_i c_j) -$$

$$-\binom{4}{3}N(c_i c_j c_k) + \binom{4}{4}N(c_1 c_2 c_3 c_4) =$$

$$= 4^8 - (\binom{8}{7} \cdot 4 + \binom{8}{4} \cdot 4^4 + \binom{8}{7} \cdot 4 + \binom{8}{6} \cdot 4^2) + 0 - 0 + 0 = 47104$$

Αφού καταφέραμε να υπολογίσουμε με τη βοήθεια της Αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού τους τρόπους αυτούς που δεν φέρνουν σε δύσκολη θέση τη γιαγιά όταν πάρει τις απαιτήσεις των εγγονών της, είναι εύκολο, δεδομένου ότι γνωρίζομε το συνολικό αριθμό των δυνατών απαιτήσεων, να υπολογίσουμε τον αριθμό των τρόπων που δυσκολεύουν τη γιαγιά. Αυτός είναι

$$N - N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = 65536 - 47104 = 18432$$

Ασκηση 5.13 *Να βρεθεί ο αριθμός των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξισώσεως* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, *με* $x_i \leq 7, 1 \leq i \leq 4$.

Εστω S το σύνολον των λύσεων της εξισώσεως $x_1+x_2+x_3+x_4=18$, με $0 \le x_i$ για $1 \le i \le 4$. Είναι προφανώς $|S| = N = \binom{4+18-1}{18} = \binom{21}{18}$.

Λέμε ότι μία λύσις (x_1, x_2, x_3, x_4) ικανοποιεί τη συνθήκη $c_i, 1 \le i \le 4$, εάν $x_i > 7$ ή $x_i \ge 8$. Τότε η απάντηση στο δοσμένο πρόβλημα είναι η $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, που εξετάζομε, έχουμε $N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = N(c_4)$. Υπολογίζουμε το $N(c_1)$ ως εξής: Βρίσκουμε τον αριθμό των ακεραίων λύσεων της εξισώσεως $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, x_i \ge 0, 1 \le i \le 4$. Τότε προσθέτουμε 8 στην τιμή του x_1 και παίρνουμε τις λύσεις της εξίσωσης, που ικανοποιούν την συνθήκη c_1. Αρα $N(c_i) = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10}$, για κάθε $1 \le i \le 4$. Με παρόμοιο επιχείρημα βρίσκουμε ότι ο $N(c_1c_2)$ είναι ο αριθμός των ακεραίων λύσεων της $x_1+x_2+x_3+x_4 = 2$ με $x_i \ge 0, 1 \le i \le 4$. Αρα $N(c_1c_2) = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2}$. Τέλος είναι προφανές ότι $N(c_ic_jc_k) = 0$ για οποιαδήποτε επιλογή τριών συνθηκών, και $N(c_1c_2c_3c_4) = 0$.

Σύμφωνα λοιπόν με την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού θα έχουμε για τον ζητούμενο αριθμό λύσεων της εξίσωσης, που ικανοποιούν τους δοσμένους περιορισμούς,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - \binom{4}{1}N(c_1) + \binom{4}{2}N(c_1c_2) - \binom{4}{3}N(c_1c_2c_3) + \binom{4}{4}N(c_1c_2c_3c_4) =$$

$$= \binom{21}{18} - \binom{4}{1}\binom{13}{10} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} - 0 + 0 = 246$$

Ασκηση 5.14 *Βρείτε τον αριθμό των θετικών ακεραίων x που είναι τέτοιοι ώστε $x \le 9999999$ και το άθροισμα των ψηφίων τους ισούται με 31.*

Εστω $x_1, x_2, \ldots, x_7$ τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού x, που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος. Προφανώς ο ζητούμενος αριθμός των ακεραίων αυτών ισούται με τον αριθμό των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 31$$

όπου $0 \le x_i \le 9$ για $1 \le i \le 7$. Ας είναι λοιπόν c_i η ιδιότητα στη λύση $(x_1, x_2, \ldots, x_7)$ της παραπάνω εξίσωσης το x_i να είναι μεγαλύτερο του 9. Τότε αναζητούμε προφανώς το $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\ldots\overline{c_7})$.

Εχουμε (Βλέπε και άσκηση 5.13) ότι,

$$N = \binom{31+7-1}{31} = \binom{37}{31}, N(c_i) = \binom{21+7-1}{21} = \binom{27}{21}, N(c_ic_j) = \binom{11+7-1}{11} = \binom{17}{11}$$

$$N(c_ic_jc_k) = \binom{1+7-1}{1} = \binom{7}{1}, N(c_ic_jc_kc_l) = 0, N(c_ic_jc_kc_lc_m) = 0$$

$$N(c_ic_jc_kc_lc_mc_n) = 0, N(c_1c_2\ldots c_7) = 0$$

Ετσι σύμφωνα με την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού έχουμε,

$$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\ldots\overline{c_7}) = \binom{37}{31} - \binom{7}{1}\binom{27}{21} + \binom{7}{2}\binom{17}{11} - \binom{7}{3}\binom{7}{1} = 512365$$

Ασκηση 5.15 *Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 9 σφαίρες μέσα από ένα κουτί που περιέχει 12 σφαίρες, τρείς εκ των οποίων είναι πράσινες, τρείς άσπρες, τρείς μπλε και τρείς κόκκινες.*

Ο ζητούμενος αριθμός τρόπων επιλογής ισούται με τον αριθμό των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

όπου $0 \le x_i \le 3$ για $1 \le i \le 4$. Ας είναι, όπως και στην άσκηση 5.14, c_i η ιδιότητα σε κάποια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της παραπάνω εξίσωσης το x_i να είναι μεγαλύτερο του 3. Τότε προφανώς ο ζητούμενος αριθμός λύσεων είναι ο $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$.

Θα έχουμε, κατά τρόπο ανάλογο, ότι,

$$N = \binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{9}, N(c_i) = \binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{5}, N(c_ic_j) = \binom{1+4-1}{1} = \binom{4}{1}$$

$$N(c_ic_jc_k) = 0, N(c_1c_2c_3c_4) = 0$$

Επομένως έχουμε,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = \binom{12}{9} - \binom{4}{1}\binom{8}{5} + \binom{4}{2}\binom{4}{1} - 0 + 0 = 20$$

Ασκηση 5.16 *Πόσες διαφορετικές ακέραιες λύσεις υπάρχουν για την εξίσωση*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20, 0 \leq x_i \leq 8$$

Σε αριθμοθεωρητική γλώσσα αναζητούμε τις διαμερίσεις του 20 σε άθροισμα 6 το πολύ ακεραίων, από τους οποίους κανένας δεν πρέπει να υπερβαίνει τον 8. Σε συνδυαστική γλώσσα αναζητούμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε 20 όμοιες μπάλλες σε 6 διακεκριμμένα κουτιά με τον περιορισμό κάθε κουτί να έχει το πολύ 8 μπάλλες. Ας είναι, c_i το γεγονός το κουτί i να περιέχει πάνω από 8 μπάλλες και $N(c_i)$ ο αριθμός των τοποθετήσεων 20 μπαλλών στα 6 κουτιά ώστε να συμβαίνει το γεγονός i. Τότε ζητούμε τον αριθμό $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \ldots\ \overline{c_6})$ και έχουμε,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}\ \overline{c_6}) = N - \sum_i N(c_i) + \sum_{i,j} N(c_i c_j) - \sum_{i,j,k} N(c_i c_j c_k) +$$

$$+ \sum_{i,j,k,l} N(c_i c_j c_k c_l) - \sum_{i,j,k,l,m} N(c_i c_j c_k c_l c_m) + N(c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6) =$$

$$= N - 6N(c_i) + \binom{6}{2} N(c_i c_j) =$$

$$= \frac{25!}{20!5!} - 6\frac{(11+5)!}{11!5!} + \binom{6}{2}\frac{(2+5)!}{2!5!} =$$

$$= 53.130 - 6 \cdot 4368 + 15 \cdot 21 = 27237$$

Ασκηση 5.17 *Να βρεθεί ο αριθμός των μεταθέσεων των γραμμάτων του Λατινικού αλφαβήτου $a, b, c, \ldots, x, y, z$ στις οποίες δεν εμφανίζονται τα δείγματα spin,game,path και net.*

Εστω S το σύνολο όλων των δυνατών μεταθέσεων. Είναι $N = |S| = 26!$. Αν $c_i, 1 \leq i \leq 4$, είναι η ιδιότητα να εμφανίζεται το δείγμα spin,game,path και net αντίστοιχα, τότε ψάχνουμε για το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$, και έχουμε,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) - N(c_4) +$$

$$+ N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + \ldots + N(c_3 c_4) -$$

$$- N(c_1 c_2 c_3) - N(c_1 c_2 c_4) - N(c_1 c_3 c_4) - N(c_2 c_3 c_4) +$$

$$+ N(c_1 c_2 c_3 c_4) =$$

$$= 26! - 23! - 23! - 23! - 24! + 20! + 20! - 0 + 0 = 4,02593 \times 10^{26}$$

Ασκηση 5.18 *Εστω τα πεπερασμένα σύνολα A,B με $|A| = m, |B| = n$ και $m \geq n$. Ας είναι $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ και S= το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \longrightarrow B$. Προφανώς $N = |S| = n^m$. Για $1 \leq i \leq n$, ας είναι c_i η συνθήκη στο S, που ικανοποιείται όταν η συνάρτησις $f : A \longrightarrow B$ δεν έχει στο πεδίο τιμών της το b_i. Να βρεθεί ο αριθμός $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \ldots\ \overline{c_n})$.*

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \ldots\ \overline{c_n}) = N - \binom{n}{1} N(c_i) + \binom{n}{2} N(c_i c_j) -$$

$$- \binom{n}{3} N(c_i c_j c_k) + \ldots + (-1)^n N(c_1 c_2 \ldots c_n) =$$

$$= n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} 1^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^m$$

Βιβλιογραφία

[AHU74] Aho A., Hopcroft J., Ullman J., "The design and analysis of computer algorithms", Addison-Wesley 1974

[AHU83] Aho A., Hopcroft J., Ullman J., "Data Structures and algorithms", Addison-Wesley 1983

[D64] DeBruijn N., "Polya's Theory of Counting", In Applied Combinatorial Mathematics, ed. Beckenbach, John Wiley 1964

[F68] Feller W., "An Introduction to Probability Theory and its Applications", Vol.I, 3rd ed., John Wiley 1968

[GKP89] Graham R., Knuth D., Patashnik O., "Concrete Mathematics", Addison-Wesley 1989

[G84] Grimaldi R., "Discrete and Combinatorial Mathematics An Applied Introduction", Second Edition, Addison-Wesley 1984

[ΚΜΣ92] Κυρούσης Λ., Μπούρας Χ., Σπυράκης Π., "ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: Τα Μαθηματικά της Επιστήμης των Υπολογιστών", Εκδόσεις Gutenberg 1992

[L85] Liu C., "Elements of Discrete Mathematics", Second Edition, McGraw-Hill 1985

[L68] Liu C., "Introduction to Combinatorial Mathematics", McGraw-Hill 1968

[Lo79] Lovasz L., "Combinatorial Problems and Exercises", North-Holland 1979

[Lu80] Lueker G., "Some Techniques for Solving Recurrences", Computing Surveys, Vol. 12, No. 4, December 1980

[M86] Marshall H., "Combinatorial Theory", Second Edition, John Wiley and Sons 1986

[P37] Polya G., "Kombinatorische Anzahlbestimmungen fur Gruppen, Graphen und Chemishe Verbindungen", Acta Informatica 68, 1937, pp. 145-254

[R87] Read R., "Polya's Theorem and its Progeny", Mathematics Magazine 60, No. 5, December 1987, pp. 275-282

[RND77] Reingold M., Nievergelt J.,Deo N., "Combinatorial Algorithms: Theory and Practice", Englewood Cliffs 1977

[Ri58] Riordan J., "An Introduction to Combinatorial Analysis", John Wiley 1958

[RW85] Ross K.A., Wright C.R.B., "Discrete Mathematics", Prentice Hall 1985

[TM85] Tomescu I., Melter R., "Problems in Combinatorics and Graph Theory", John Wiley and Sons 1985

[T87] Townsend M., "Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and Graph Theory", Benjamin/Cummings Publishing Company 1987

[Tu84] Tucker A., "Applied Combinatorics", Second Edition, John Wiley and Sons 1984

[MAA72] "Topics in Combinatorial Mathematics", Mathematical Association of America 1972