ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Τα Μαθηματικά της Επιστήμης των Υπολογιστών

Λευτέρης Μ. Κυρούσης
Χρήστος Ι. Μπούρας
Παύλος Γ. Σπυράκης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Στοιχειώδης Συνδυαστική

1.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε μερικούς στοιχειώδεις τρόπους να μετράμε πεπερασμένα αντικείμενα ή γεγονότα. Όταν μετράμε χρησιμοποιούμε πολύ συχνά, σχεδόν πάντα όμως χωρίς να το αναφέρουμε ρητά, τους παρακάτω δύο βασικούς κανόνες:

Κανόνας του αθροίσματος: Αν ένα γεγονός μπορεί να συμβεί κατά m τρόπους και ένα άλλο γεγονός μπορεί να συμβεί κατά n τρόπους, τότε υπάρχουν $m+n$ το πλήθος τρόποι κατά τους οποίους ένα από τα δύο γεγονότα μπορεί να συμβεί.

Κανόνας του γινομένου: Αν ένα γεγονός μπορεί να συμβεί κατά m τρόπους και ένα άλλο γεγονός μπορεί να συμβεί κατά n τρόπους, τότε υπάρχουν $m \cdot n$ το πλήθος τρόποι κατά τους οποίους και τα δύο γεγονότα μπορούν να συμβούν.

Παράδειγμα 1.1: Ας υποθέσουμε ότι στο Πανεπιστήμιο υπάρχουν 7 μαθήματα πρωϊνά και 5 μαθήματα απογευματινά. Πόσες επιλογές έχει ένας σπουδαστής για να πάρει 1 πρωϊνό και 1 απογευματινό μάθημα; Πόσες έχει ένας άλλος σπουδαστής που ενδιαφέρεται να πάρει ένα μόνο μάθημα (αδιαφορώντας για απόγευμα ή πρωί);

Λύση. Υπάρχουν $7 \times 5 = 35$ επιλογές για ένα σπουδαστή που θέλει να πάρει 1 πρωινό και 1 απογευματινό μάθημα. Ενώ για ένα σπουδαστή που θέλει να πάρει μόνο 1 μάθημα (αδιαφορώντας για απόγευμα ή πρωί) υπάρχουν $7 + 5$ επιλογές.

Αν από μία συλλογή n αντικειμένων θέλουμε να επιλέξουμε r χωρίς να έχει σημασία η σειρά επιλογής, τότε ο αριθμός των τρόπων που είναι δυνατό να γίνει αυτό καλείται αριθμός των *συνδυασμών* r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα και συμβολίζεται με $C(n,r)$. Εναλλακτικά χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό $\binom{n}{r}$ (προφέρεται: n ανά r ή r από n), αντί του $C(n,r)$.

Αν πάλι από μία συλλογή n αντικειμένων θέλουμε να επιλέξουμε r και να τα στοιχίσουμε το ένα κατόπιν του άλλου, τότε ο αριθμός των τρόπων που μπορεί να γίνει αυτό καλείται αριθμός των *διατάξεων* r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα και συμβολίζεται με $P(n,r)$.

Είναι σχετικά απλό να υπολογίσουμε το $P(n,r)$. Υπάρχουν n δυνατοί τρόποι να επιλεγεί το πρώτο από τα r αντικείμενα, $n-1$ τρόποι να επιλεγεί το δεύτερο, κ.ο.κ. έως το τελευταίο, για το οποίο υπάρχουν $n-r+1$ τρόποι να επιλεγεί. Επομένως ο συνολικός αριθμός των διατάξεων είναι:

$$P\left(n,r\right) = n\left(n-1\right)\ldots\left(n-r+1\right) = \frac{n!}{\left(n-r\right)!}. \tag{1.1}$$

Ένα άμεσο συμπέρασμα του τύπου (1.1) είναι ότι υπάρχουν $r!$ τρόποι να διατάξουμε r αντικείμενα, δηλαδή υπάρχουν $r!$ *αντιμεταθέσεις* r αντικειμένων.

Ας προχωρήσουμε τώρα και στον υπολογισμό του $C\left(n,r\right)$. Παρατηρούμε ότι $P\left(n,r\right) = P\left(r,r\right) \cdot C\left(n,r\right)$. Ο τύπος αυτός ισχύει διότι οι διατάξεις προκύπτουν από τους συνδυασμούς θεωρώντας για τον κάθε συνδυασμό τους διαφορετικούς τρόπους κατά τους οποίους μπορούν να αντιμετατεθούν τα αντικείμενά του. Με βάση τον τύπο (1.1) τώρα προκύπτει:

$$C\left(n,r\right) = \frac{n!}{r!\left(n-r\right)!} = \frac{n\left(n-1\right)\ldots\left(n-r+1\right)}{r!}. \tag{1.2}$$

Παράδειγμα 1.2: Με πόσους τρόπους μπορούν 3 εξετάσεις να προγραμματιστούν μέσα σε μια περίοδο 5 ημερών, έτσι ώστε να μην έχουμε δυο εξετάσεις την ίδια ημέρα;

Λύση. Επειδή πρόκειται για συγκεκριμένες εξετάσεις, είναι φανερό ότι έχει σημασία και η σειρά που θα γίνουν αυτές. Άρα η απάντηση είναι $P\left(5,3\right) = 60$.

Παράδειγμα 1.3: Με πόσους τρόπους ένας μάγειρας μπορεί να προγραμματίσει κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας 3 γεύματα με κρέας;

Λύση. Επειδή δεν καθορίζονται τα γεύματα κρέατος, η απάντηση είναι ο αριθμός των συνδυασμών 3 ημερών από τις 7, δηλαδή $C\left(7,3\right) = 35$.

1.2 Διωνυμικοί Συντελεστές

Είναι φανερό ότι το $\left(1+x\right)^n$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n. Για να βρούμε το συντελεστή του x^r στο πολυώνυμο αυτό αρκεί να βρούμε τον αριθμό των τρόπων να επιλέξουμε r από τους n όρους x που εμφανίζονται στο γινόμενο $\left(1+x\right)\ldots\left(1+x\right)$ (n φορές).

Όπως είδαμε ο αριθμός αυτός είναι ο $C\left(n,r\right)$. Επομένως ο συντελεστής του x^r στο πολυώνυμο $\left(1+x\right)^n$ είναι ο $C\left(n,r\right)$. Για το λόγο αυτό οι αριθμοί $C\left(n,r\right)$ καλούνται διωνυμικοί συντελεστές. Ο τύπος

$$\left(1+x\right)^n = \sum_{r=0}^{n} C\left(n,r\right) x^r \tag{1.3}$$

καλείται ανάπτυγμα του διωνύμου του Newton.

Θέτοντας $x = s/t$ στον τύπο (1.3) προκύπτει, μετά την εκτέλεση των πράξεων, ο τύπος

$$\left(s+t\right)^n = \sum_{r=0}^{n} C\left(n,r\right) s^r t^{n-r}. \tag{1.4}$$

Παράδειγμα 1.4: Να υπολογισθεί ο σταθερός όρος στο ανάπτυγμα του $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$.

Λύση. Σύμφωνα με τον (1.4) έχουμε:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12} = \sum_{r=0}^{12} C\left(12, r\right)\left(x^2\right)^r \left(\frac{1}{x}\right)^{12-r} = \sum_{r=0}^{12} C\left(12, r\right) x^{3r-12}.$$

Ο σταθερός όρος είναι ο συντελεστής του x^0. Άρα θέτουμε $3r - 12 = 0$, δηλαδή $r = 4$ και επομένως ο ζητούμενος συντελεστής είναι $C\left(12, 4\right) = 495$.

Από τον (1.2) προκύπτει αμέσως ότι

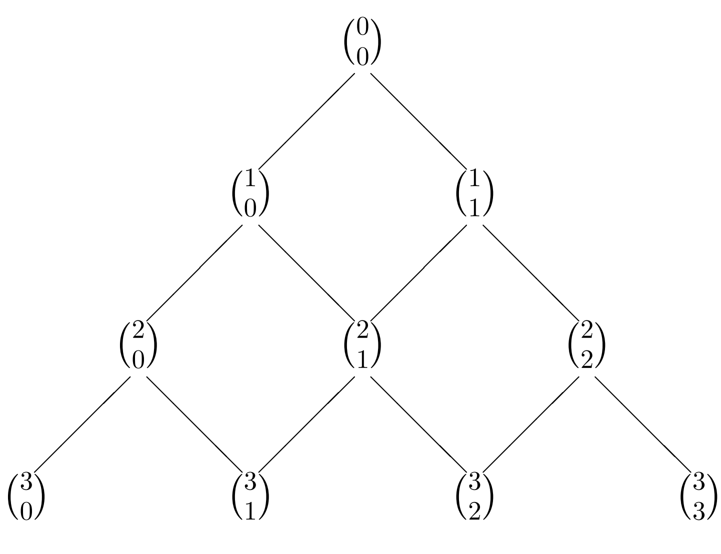
$$C\left(n, r\right) = C\left(n, n - r\right). \tag{1.5}$$

Επίσης μπορεί εύκολα να αποδειχθεί αλγεβρικά ότι:

$$C\left(n, r\right) = C\left(n - 1, r\right) + C\left(n - 1, r - 1\right). \tag{1.6}$$

Για να αποδείξουμε τον (1.6) όχι αλγεβρικά, αλλά με συνδυαστικά επιχειρήματα σκεφτόμαστε ως εξής: για να επιλέξουμε r αντικείμενα από n, σταθεροποιούμε ένα αντικείμενο και στη συνέχεια είτε επιλέγουμε r αντικείμενα από τα υπόλοιπα $n - 1$, είτε επιλέγουμε $r - 1$ αντικείμενα από τα υπόλοιπα $n - 1$ και παίρνουμε και αυτό που έχουμε σταθεροποιήσει.

Ο τύπος (1.6) οδηγεί στην κατάστρωση των πράξεων για τον υπολογισμό του $C\left(n, r\right)$ που είναι γνωστή ως τρίγωνο του Pascal. Στην κατάστρωση αυτή υπολογίζουμε τον αριθμό που αντιστοιχεί σε έναν κόμβο του τριγώνου προσθέτοντας τους αριθμούς των δυο πλησιέστερων από τα πάνω κόμβων του τριγώνου (Σχ. 1.1). Οι ακραίοι κόμβοι παίρνουν όλοι την τιμή 1. Τέλος μια άλλη χρήσιμη



Σχήμα 1.1: Τρίγωνο του Pascal

ιδιότητα των διωνυμικών συντελεστών είναι η εξής:

$$C\left(n, r\right) = \frac{n}{r} C\left(n - 1, r - 1\right). \tag{1.7}$$

Για να αποδείξουμε την (1.7) με συνδυαστικά επιχειρήματα σκεφτόμαστε ως εξής: για να επιλέξουμε r αντικείμενα, αρκεί να επιλέξουμε ένα και στη συνέχεια να επιλέξουμε $r-1$ από τα $n-1$. Υπάρχουν n τρόποι για την επιλογή του ενός και $C(n-1,r-1)$ τρόποι για την επιλογή των $r-1$. Κατ' αυτόν τον τρόπο όμως είναι σα να «μετράμε» και ποιό είναι το πρώτο από τα r επιλεγέντα αντικείμενα. Ο αριθμός όμως $C(n,r)$ δε μετρά διατάξεις. Άρα για να έχουμε το σωστό αποτέλεσμα αρκεί να διαιρέσουμε με r. Ασφαλώς, ο τύπος (1.7) μπορεί εύκολα να αποδειχθεί αλγεβρικά με βάση τον (1.2).

Επίσης, επαναλαμβάνοντας τον (1.6), παίρνουμε εύκολα τον τύπο:

$$\binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k} \tag{1.8}$$

Τέλος από τον (1.8) μπορούμε να αποδείξουμε:

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}. \tag{1.9}$$

Πράγματι, $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n+1}{n-r}$ με βάση τον (1.5). Αλλά:

$$\binom{n+1}{n-r} = \binom{r+(n-r)+1}{n-r} = \sum_{k=0}^{n-r} \binom{r+k}{k}$$

με βάση τον (1.8).

Τώρα το ζητούμενο αποδεικνύεται παρατηρώντας ότι:

$$\sum_{k=0}^{n-r} \binom{r+k}{k} = \sum_{k=0}^{n-r} \binom{r+k}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}.$$

Ο τύπος $C(n,r) = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$ αποδείχθηκε με τον περιορισμό ότι τα n και r είναι φυσικοί αριθμοί και $n \geq r$ (σε αυτές τις περιπτώσεις έχει νόημα να μιλάμε για επιλογή r αντικειμένων από n). Είναι δυνατό όμως να ορίσουμε τους διωνυμικούς συντελεστές και για τις περιπτώσεις όπου το n είναι τυχόν πραγματικός. Θέτουμε λοιπόν:

$$C(n,r) = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!},\ n \in \mathbb{R}\ \&\ r \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Στο βιβλίο αυτό, δε θα δώσουμε ορισμό για το $C(n,r)$ όταν $r \notin \mathbb{N}$.

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί (άσκηση!) ότι $C(-1,r) = (-1)^r$ και $C(-2,r) = (-1)^r (r+1)$. Επίσης,

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{r} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!} = \frac{(-1)^r \cdot 2^{-r} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2r-1)}{r!} = \\
&= \frac{(-1)^r \cdot 2^{-r} \cdot 2^{-r} \cdot (2r)!}{(r!)^2} = \frac{(-1)^r \cdot 2^{-2r} \cdot (2r)!}{(r!)^2} \\
&= (-1)^r \cdot 2^{-2r} \cdot \binom{2r}{r}.
\end{aligned}$$

Ακόμη, όταν $n < 0$ ισχύει ότι (αποδείξτε το!):

$$\binom{n}{r} = (-1)^r \binom{r-n-1}{r},\ r \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Στη Μαθηματική Ανάλυση αποδεικνύεται ότι αν $n \in \mathbb{R}$ και $|x| < 1$, η σειρά $\sum\limits_{r=0}^{\infty} C(n,r)\, x^r$ συγκλίνει απολύτως στην $(1+x)^n$. Άρα έχουμε το γενικευμένο διωνυμικό τύπο:

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} C(n,r)\, x^r,\ n \in \mathbb{R}\ \&\ |x| < 1. \tag{1.12}$$

Επίσης οι τύποι (1.5) – (1.8), καθώς και άλλοι αντίστοιχοι με αυτούς, ισχύουν και στην περίπτωση $n \in \mathbb{R}$. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα αν ερμηνεύσουμε τους τύπους αυτούς σαν ισότητες πολυωνύμων βαθμού r της μεταβλητής n, οι οποίες ισχύουν για τις άπειρες τιμές $n = r, r+1, \ldots$ Πράγματι, μία ισότητα πολυωνύμων βαθμού r που επαληθεύεται για $r+1$ ή περισσότερες (διαφορετικές) τιμές ισχύει για κάθε πραγματική τιμή.

Προτού κλείσουμε την παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη τον τύπο του Stirling

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 \tag{1.13}$$

όπου e η βάση των φυσικών λογαρίθμων.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι παρά το γεγονός ότι η διαφορά $\left|n! - \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right|$ αποκλίνει στο άπειρο, η έκφραση $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ είναι μια καλή προσέγγιση για το $n!$, ακόμη και για μικρές τιμές του n.

Ο Πίνακας 1.1 δείχνει τις 10 πιο βασικές ταυτότητες που ισχύουν στους διωνυμικούς συντελεστές. Αποδείξτε με συνδυαστικά επιχειρήματα όσες δεν έχουν ήδη αποδειχθεί.

1.3 Ομάδες Μη Διακεκριμένων Αντικειμένων

Έστω ότι έχουμε n αντικείμενα που αποτελούνται από t ομάδες με πληθυσμούς $q_1, q_2, \ldots, q_r$, αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι τα αντικείμενα κάθε ομάδας δεν είναι διακεκριμένα μεταξύ τους (σαν μπίλιες του ίδιου χρώματος). Τότε υπάρχουν

$$\frac{n!}{q_1! q_2! \ldots q_t!} \tag{1.14}$$

τρόποι να τα διατάξουμε. Πράγματι, $n!$ είναι όλοι οι τρόποι διάταξης αν τα αντικείμενα θεωρηθούν διακεκριμένα. Στην περίπτωση τώρα των ομάδων με μη διακεκριμένα στοιχεία πρέπει να διαιρέσουμε το $n!$ με τον αριθμό των διαφορετικών διατάξεων που δημιουργούνται εξ αιτίας της υποθέσεως ότι τα αντικείμενα δεν είναι διακεκριμένα. Ο αριθμός αυτός είναι $q_1!, q_2!, \ldots, q_r!$.

Παράδειγμα 1.5: Ποιό είναι το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων γραμμάτων που φτιάχνονται από τα γράμματα που περιέχονται στη έκφραση «μια πάπια μα ποιά πάπια»;

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	ακέραιοι $n \geq r \geq 0$,
$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$	ακέραιοι $n \geq r \geq 0$,
$\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$	ακέραιος $r > 0$, πραγματικός n,
$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$	ακέραιος $r > 0$, πραγματικός n,
$\binom{n}{r} = (-1)^r \binom{r-n-1}{r}$	ακέραιος $r \geq 0$, πραγματικός n,
$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$	ακέραιοι $m \geq r \geq 0$, πραγματικός n,
$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r}$	ακέραιος $n \geq 0$, πραγματικοί x, y,
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$	πραγματικοί n, x, $\lvert x\rvert < 1$,
$\binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}$	ακέραιοι $r, n \geq 0$,
$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{r}$	ακέραιοι $r, n \geq 0$,
$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$	ακέραιος $r \geq 0$, πραγματικοί n, m,

Πίνακας 1.1: Βασικές ταυτότητες των διωνυμικών συντελεστών

Λύση. Παρατηρούμε ότι:

υπάρχουν	$q_1 = 2$	γράμματα	είδους	"μ",
"	$q_2 = 4$	"	"	"ι",
"	$q_3 = 7$	"	"	"α",
"	$q_4 = 5$	"	"	"π",
"	$q_5 = 1$	"	"	"ο".

Άρα συνολικά υπάρχουν

$$\frac{19!}{2!4!7!5!1!} = 4.190.266.080$$

διατάξεις γραμμάτων.

Παράδειγμα 1.6: Να αποδειχθεί ότι το $(k!)!$ διαιρείται ακριβώς από το $(k!)^{(k-1)!}$.

Λύση. Θεωρούμε $k!$ αντικείμενα και τα χωρίζουμε σε $(k-1)!$ ομάδες με k μη διακεκριμένα στοιχεία η κάθε μία. Το πλήθος των συνδυασμών των αντικειμένων αυτών είναι $\frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}$. Ο αριθμός όμως αυτός πρέπει να είναι ακέραιος.

1.4 Συνδυασμοί και Διατάξεις με Επανάληψη

Υπάρχουν n^r διατάξεις r αντικειμένων από n αντικείμενα όταν επιτρέπονται επαναληπτικές εμφανίσεις των αντικειμένων. Πράγματι, έχουμε n επιλογές για το πρώτο αντικείμενο, ομοίως n για το δεύτερο, κ.ο.κ. μέχρι το r-οστό αντικείμενο.

Παράδειγμα 1.7: Να υπολογιστεί πόσοι αριθμοί μεταξύ 1 και 10^{10} περιέχουν το ψηφίο 1.

Λύση. Επειδή τα διάφορα του 1 ψηφία είναι 9, με βάση την προηγούμενη παράγραφο οι αριθμοί μεταξύ 0 και 9.999.999.999 που δεν περιέχουν το ψηφίο 1 είναι 9^{10}. Άρα μεταξύ 1 και 10^{10} υπάρχουν $9^{10}-1$ αριθμοί που δεν περιέχουν το ψηφίο 1. Επομένως, στο ίδιο διάστημα, υπάρχουν $10^{10}-9^{10}+1$ αριθμοί που περιέχουν το ψηφίο 1.

Περισσότερο ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση των συνδυασμών r αντικειμένων από n αντικείμενα με επανάληψη. Παρατηρήστε ότι διαιρώντας απλώς το n^r (που είναι ο αριθμός των συνδυασμών) με $r!$ δεν παίρνουμε τον αριθμό των διατάξεων και αυτό διότι επιτρέπεται ένας απροσδιόριστος αριθμός επαναλήψεων του ίδιου αντικειμένου.

Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των συνδυασμών με επανάληψη θεωρούμε ότι το σύνολο των αντικειμένων από όπου γίνεται η επιλογή του συνδυασμού είναι οι αριθμοί $\{1,\ldots,n\}$ και σκεφτόμαστε ως εξής: ένας συνδυασμός r αντικειμένων από n με επανάληψη είναι μία ακολουθία $x_1,\ldots,x_r$ όπου $1 \le x_i \le n$ και $x_i \le x_j$ όταν $1 \le i \le j \le r$. Η απεικόνιση όμως

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r) \to (x_1+0, x_2+1, \ldots, x_r+r-1)$$

είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση από το σύνολο των μη φθίνουσων ακολουθιών με r όρους από το $\{1,\ldots,n\}$ στο σύνολο των γνησίως αυξουσών ακολουθιών με όρους από το $\{1,\ldots,n+r-1\}$. Το σύνολο όμως των γνησίως αυξουσών ακολουθιών r όρων από το $\{1,\ldots,n+r-1\}$ έχει πληθικό αριθμό ίσο με τον αριθμό των συνδυασμών χωρίς επανάληψη r αντικειμένων από $n+r-1$ αντικείμενα. Συμπεραίνουμε λοιπόν τελικά ότι ο αριθμός των συνδυασμών r αντικειμένων από n αντικείμενα με επανάληψη είναι $C(n+r-1,r)$.

Παράδειγμα 1.8: Πόσες ζαριές υπάρχουν στο τάβλι;

Λύση. Ο αριθμός των ζαριών στο τάβλι είναι ο συνδυασμός (επειδή δεν ενδιαφέρει η σειρά που πέφτουν τα ζάρια) 2 αντικειμένων από 6, δηλαδή

$$C\,(6+2-1,2) = C\,(7,2) = 21.$$

Παράδειγμα 1.9: Πόσες φορές θα εκτελεστεί η εντολή writeln στο πιο κάτω τμήμα ενός προγράμματος Pascal;

```
For i := 1 to 20 do
    For j := 1 to i do
        For k := 1 to j do
            writeln (i*j+k);
```

Λύση. Συμπεραίνουμε από τους συντακτικούς κανόνες της εντολής For ότι κάθε φορά που θα εκτελείται η εντολή writeln ισχύει η συνθήκη $1 \le k \le j \le i \le 20$. Ζητάμε λοιπόν να βρούμε τον αριθμό των τρόπων να συνδυάσουμε τα i, j, k, επιτρέποντας επαναλήψεις, με τιμές από $1, 2, \ldots, 20$.
Αυτός είναι $\binom{20+3-1}{3} = 1540$. Επομένως η εντολή writeln θα εκτελεστεί 1540 φορές.

1.5 Υποσύνολα

Υπάρχουν $2^n - 1$ τρόποι να επιλέξουμε ένα ή περισσότερα αντικείμενα από n αντικείμενα, χωρίς επανάληψη και χωρίς να «μετράει» η διάταξη. Πράγματι, υπάρχουν δύο επιλογές για το πρώτο αντικείμενο: να το διαλέξουμε ή όχι. Δύο επίσης επιλογές για το δεύτερο, κ.ο.κ. μέχρι το τελευταίο. Ο όρος -1 εμφανίζεται για να αποκλείσουμε την περίπτωση όπου κανένα αντικείμενο δεν επιλέγεται.

Επίσης, επειδή υπάρχουν $C\,(n,k)$ τρόποι για να επιλέξουμε k αντικείμενα από n, με βάση τα προηγούμενα καταλήγουμε στο ότι:

$$2^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} C\,(n,k),$$

ή αλλιώς

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C\,(n,k). \tag{1.15}$$

Ο παραπάνω τύπος αποδεικνύεται εύκολα και αλλιώς: αν στον (1.3) θέσω $x = 1$.

Αν τώρα τα αντικείμενα αποτελούνται από t ομάδες, με μη διακεκριμένα στοιχεία η κάθε μία, οι οποίες αποτελούνται από $q_1, \ldots, q_t$ στοιχεία, αντίστοιχα, τότε ο αριθμός των συνδυασμών ενός ή περισσότερων αντικειμένων ισούται με

$$(q_1+1)\,(q_2+1)\ldots(q_t+1) - 1. \tag{1.16}$$

Πράγματι, υπάρχουν $q+1$ τρόποι να διαλέξουμε αντικείμενα από την πρώτη ομάδα: να διαλέξουμε 1 ή 2 ή ... ή q_1 ή κανένα. Το επιχείρημα συνεχίζεται όπως και στον υπολογισμό του 2^n.

Παράδειγμα 1.10: Να βρεθεί ο αριθμός των διαιρετών του 180.

Λύση. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Προφανώς οι διαιρέτες σχηματίζονται από συνδυασμούς από τις εξής ομάδες:

$$\begin{array}{ll} \text{1η ομάδα :} & \{2,2\} \\ \text{2η ομάδα :} & \{3,3\} \\ \text{3η ομάδα :} & \{5\} \end{array}$$

Άρα ο αριθμός των διαιρετών είναι $(2+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 18$ (ο όρος -1 δεν εμφανίζεται διότι αντιστοιχεί στο συνδυασμό $2^0 3^0 5^0 = 1$ και το 1 είναι διαιρέτης του 180).

1.6 Διανομές Αντικειμένων σε Υποδοχές

Ας υποθέσουμε ότι τοποθετούμε r διακεκριμένα αντικείμενα και n διακεκριμένες υποδοχές. Ο αριθμός των τρόπων να κατανείμουμε τα αντικείμενα στις υποδοχές είναι n^r. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι η τοποθέτηση του πρώτου αντικειμένου ισοδυναμεί με επιλογή της αντίστοιχης υποδοχής, βλέπουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των διατάξεων με επανάληψη r αντικειμένων από n, ο οποίος γνωρίζουμε ότι ισούται με n^r. Παρατηρήστε ότι στην παραπάνω αρίθμηση δε μετράει η σειρά με την οποία τα αντικείμενα εμφανίζονται στην κάθε υποδοχή.

Για να υπολογίσουμε τώρα τον αριθμό των διανομών όταν μετράει η σειρά τοποθέτησης των αντικειμένων σε κάθε υποδοχή σκεφτόμαστε τις n υποδοχές σαν n διαστήματα ανάμεσα σε $n+1$ διαδοχικά σημεία σε μια ευθεία όπου θα πρέπει να τοποθετηθούν τα r αντικείμενα. Το πρώτο από αυτά τα σημεία πρέπει πάντα να τοποθετηθεί στην αρχή και το τελευταίο στο τέλος. Άρα είναι τα υπόλοιπα $n-1$ σημεία που θα πρέπει να διαχωρίσουν τα r αντικείμενα τα οποία είναι διακεκριμένα. Τα $n-1$ σημεία που ορίζουν τις υποδοχές είναι μη διακεκριμένα, Συνολικά λοιπόν υπάρχουν $n-1+r$ αντικείμενα που πρέπει να μετρήσουμε τις διατάξεις τους. Με βάση τον (1.14) ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} = (n+r-1)\,(n+r-2)\ldots n. \tag{1.17}$$

Υπάρχει και άλλος τρόπος να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα: Υπάρχουν n υποψήφιες υποδοχές για το πρώτο αντικείμενο. Ας φανταστούμε τώρα ότι η τοποθέτηση του πρώτου αντικειμένου διαιρεί την αντίστοιχη υποδοχή σε δυο διαφορετικά μεταξύ τους μέρη. Ο αριθμός των υποψήφιων υποδοχών για το δεύτερο αντικείμενο αυξάνεται έτσι σε $n+1$. Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο μέχρι το r-οστό αντικείμενο για το οποίο υπάρχουν $n+r-1$ υποψήφιες υποδοχές.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου τα r αντικείμενα είναι μη διακεκριμένα. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να υπολογίσουμε τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης των αντικειμένων σε n υποδοχές. Ο πιο απλός είναι να διαιρέσουμε τον τύπο που δίνει τον αριθμό των διανομών για r διακεκριμένα αντικείμενα με $r!$. Έτσι παίρνουμε τον αριθμό

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = \binom{n+r-1}{r}. \tag{1.18}$$

Ένας άλλος τρόπος για να καταλήξουμε στον ίδιο τύπο είναι να μιμηθούμε την πρώτη απόδειξη που δώσαμε για την περίπτωση των r διακεκριμένων αντικειμένων, με την επιπλέον παρατήρηση ότι τώρα όχι μόνον τα $n-1$ σημεία που ορίζουν τις υποδοχές είναι μια ομάδα από μη διακεκριμένα αντικείμενα, αλλά επίσης και τα r αντικείμενα προς τοποθέτηση είναι μη διακεκριμένα. Χρησιμοποιώντας τον (1.14) έχουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} \tag{1.19}$$

Τέλος, ένας ακόμη τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών με επανάληψη r αντικειμένων από n αντικείμενα (δηλαδή τις υποδοχές).

Παράδειγμα 1.11: Να υπολογιστεί ο αριθμός των τρόπων που r μη διακεκριμένα αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε n υποδοχές, με τον περιορισμό ότι όλες οι υποδοχές θα δεχθούν τουλάχιστον ένα αντικείμενο ($r \geq n \geq 1$). Ποιός είναι ο αριθμός αυτός αν απαιτήσουμε ακριβώς μία υποδοχή να είναι κενή ($r \geq n-1 \geq 1$);

Λύση. Πρώτα τοποθετούμε ένα αντικείμενο σε κάθε υποδοχή και μας μένουν $r-n$ αντικείμενα. Ο αριθμός των τρόπων να διανεμηθούν αυτά στις υποδοχές είναι

$$\binom{n+(r-n)-1}{r-n} = \binom{r-1}{r-n} = \binom{r-1}{n-1}$$

Άρα $C\,(r-1, n-1)$ είναι ο αριθμός των τρόπων να διανείμουμε τα αντικείμενα χωρίς να αφήσουμε κενή υποδοχή.

Για την περίπτωση τώρα της ακριβώς μίας άδειας υποδοχής, αρκεί να επιλέξουμε την άδεια υποδοχή και να κατανείμουμε τα αντικείμενα στις εναπομένουσες $n-1$ υποδοχές, φροντίζοντας αυτές όλες να δεχθούν τουλάχιστον ένα αντικείμενο. Άρα η απάντηση για την περίπτωση της ακριβώς μίας κενής υποδοχής είναι $nC(r-1, n-2)$.

Ο Πίνακας 1.2 δείχνει όλους τους τύπους για τις διανομές αντικειμένων σε υποδοχές κάτω από διαφορετικές παραδοχές.

Παραδοχές	Αριθμός τρόπων (με δυνατότητα κενών υποδοχών)
n διακεκριμένες υποδοχές r διακεκριμένα αντικείμενα δε μετράει η σειρά στις υποδοχές	n^r
n διακεκριμένες υποδοχές r διακεκριμένα αντικείμενα μετράει η σειρά στις υποδοχές	$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$
n διακεκριμένες υποδοχές μη διακεκριμένα αντικείμενα	$\binom{n+r-1}{r}$

Πίνακας 1.2: Τυπολόγιο για τη διανομή αντικειμένων σε υποδοχές

1.7 Ασκήσεις

1.1 Κατά πόσους τρόπους 3 αριθμοί μπορούν να επιλεγούν από τους αριθμούς 1–300 έτσι ώστε το άθροισμα τους να είναι διαιρετό με το 3 (δεν ενδιαφέρει η σειρά των αριθμών);

1.2 Να βρεθεί ο αριθμός των τετραψήφιων αριθμών του δεκαδικού συστήματος που δεν έχουν δύο ίδια ψηφία.

1.3 Με πόσους τρόπους μπορούν να βαφούν 12 γραφεία έτσι ώστε 3 από αυτά να είναι κόκκινα, 2 ροζ, 2 λευκά και τα υπόλοιπα πράσινα;

1.4 Πόσους διαιρέτες έχει ο αριθμός 1400;

1.5 Από ένα μεγάλο αριθμό από κέρματα (από μονόλεπτα έως δίευρα (δίφραγκα)), με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 6 κέρματα;

1.6 Να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί $\frac{(3n)!}{(2^n 3^n)}$ και $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ είναι ακέραιοι.

1.7 Να υπολογισθεί ο συντελεστής του x^{23} στο $\left(1+x^5+x^9\right)^{100}$.

1.8 Κατά πόσους τρόπους μπορούν r όμοιες μπάλες να τοποθετηθούν σε n διακεκριμένα κουτιά, έτσι ώστε κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον 9 μπάλες;

1.9 Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε $2t+1$ μη διακεκριμένες μπάλες σε 3 διακεκριμένα κουτιά έτσι ώστε κάθε 2 κουτιά μαζί να περιέχουν περισσότερες μπάλες από ότι το άλλο ένα.

1.10 Μεταξύ $2n$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Βρείτε τον αριθμό των επιλογών n αντικειμένων από αυτά τα $2n$ αντικείμενα.

1.11 Μεταξύ $3n+1$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Βρείτε τον αριθμό των επιλογών n αντικειμένων από αυτά τα $3n+1$ αντικείμενα.

1.12 Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που r διακεκριμένες σημαίες μπορούν να τοποθετηθούν σε n διακεκριμένους ιστούς, δεδομένου ότι έχει σημασία η σειρά με την οποία οι σημαίες εμφανίζονται στους ιστούς και δεδομένου ότι κανένας ιστός δεν πρέπει να μείνει κενός ($r \geq n$).

1.13 Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που r διακεκριμένα αυτοκίνητα μπορούν να περάσουν από n διακεκριμένους σταθμούς διοδίων, δεδομένου ότι μία το πολύ διαδρομή επιτρέπεται να μη δεχθεί αυτοκίνητο ($r \geq n-1$ και $n \geq 2$).

1.14 Να υπολογισθεί το άθροισμα $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

1.15 Να αποδειχθεί ότι

(α) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(r,k) = (-1)^n C(r-1,n)$

(β) $C(r,m)\,C(m,k) = C(r,k)\,C(r-k,m-k)$

(γ) $\sum_{k=0}^{n} C(r,k)\,C(s,n-k) = C(r+s,n)$

Κεφάλαιο 2

Γεννήτριες Συναρτήσεις

2.1 Εισαγωγή

Έστω $a_0, a_1, \ldots$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Στόχος μας είναι να «κωδικοποιήσουμε» την ακολουθία με μία μόνο συνάρτηση κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούμε εύκολα να αναπαραγάγουμε την ακολουθία από τη συνάρτηση που την κωδικοποιεί. Ένας τρόπος που επιτυγχάνεται αυτό είναι μέσω ενός μετασχηματισμού ο οποίος αντιστοιχίζει στην ακολουθία μία δυναμοσειρά (δηλαδή σειρά δυνάμεων της μεταβλητής x) σύμφωνα με τον τύπο:

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r.$$

Η δυναμοσειρά, η οποία ορίζει προφανώς μία συνάρτηση μίας μεταβλητής στο πεδίο σύγκλισής της, καλείται συνήθως γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας. Θα αποφύγουμε να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες σχετικά με τη σύγκλιση των δυναμοσειρών, επειδή είναι γνωστό ότι συγκλίνουν με «ισχυρό» τρόπο σε κάποιο διάστημα με κέντρο το 0. Το διάστημα αυτό είναι δυνατό να είναι κενό (δηλαδή να έχει μήκος 0), αλλά στις εφαρμογές που θα εξετάσουμε αυτό δε συμβαίνει. Παραθέτουμε παρακάτω πολύ συνοπτικά τις βασικές ιδιότητες σύγκλισης των δυναμοσειρών, οι οποίες μας επιτρέπουν να τις χειριζόμαστε σαν να επρόκειτο για πεπερασμένα αθροίσματα (υπάρχει πληθώρα σχετικών βιβλίων για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται να μάθει περισσότερα για τη θεμελίωση των δυναμοσειρών). Συγκεκριμένα:

α. Αν μια δυναμοσειρά

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

συγκλίνει για μια τιμή του $x = x_0$, τότε συγκλίνει για κάθε x με $|x| < |x_0|$. Καλούμε *ακτίνα σύγκλισης* R της δυναμοσειράς τον αριθμό

$$\sup\left\{ |x| : \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \text{ συγκλίνει} \right\}.$$

Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x με $|x| < R$ (η τιμή του R μπορεί να είναι $+\infty$ ή 0).

Η ακτίνα σύγκλισης υπολογίζεται με έναν από τους τύπους:

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[r]{|a_r|}$$

ή

$$\frac{1}{R} = \limsup \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} \right|.$$

Η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα της μορφής $\{x : |x| \leq r\}$, όπου $r < R$.

β. Στο εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης της δυναμοσειράς (δηλαδή, του διαστήματος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα την ακτίνα σύγκλισης), η συνάρτηση

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

είναι άπειρα παραγωγίσιμη και οι παράγωγοί της υπολογίζονται παραγωγίζοντας τυπικά τη σειρά ως πεπερασμένο άθροισμα, δηλαδή:

$$A'(x) = \sum_{r=1}^{\infty} r a_r x^{r-1}. \tag{2.1}$$

Οι ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών που λαμβάνονται με την παραγώγιση παραμένουν όλες ίσες με την ακτίνα σύγκλισης της αρχικής δυναμοσειράς.

γ. Για κάθε διάστημα $[0, x]$ που περιέχεται στο διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς, η συνάρτηση A είναι ολοκληρώσιμη και η τιμή του ολοκληρώματός της υπολογίζεται ολοκληρώνοντας τυπικά τη σειρά ως πεπερασμένο άθροισμα, δηλαδή:

$$\int_0^x \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r \right) dt = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_{r-1}}{r} x^r. \tag{2.2}$$

Η ακτίνα σύγκλισης της νέας δυναμοσειράς παραμένει αμετάβλητη.

Συμπερασματικά, είναι ασφαλές να χειριζόμαστε τις δυναμοσειρές ως πεπερασμένα αθροίσματα.

Η σημαντικότερη όμως ιδιότητα των δυναμοσειρών είναι ότι οι συντελεστές a_r της A μπορούν να υπολογιστούν από τον τύπο

$$a_r = \frac{1}{r!} A^{(r)}(0). \tag{2.3}$$

Ο παραπάνω τύπος δικαιολογεί τη θεώρηση μιας γεννήτριας συνάρτησης ως κωδικοποίηση της αντίστοιχης ακολουθίας.

2.2 Ιδιότητες των Γεννητριών Συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε ιδιότητες οι οποίες μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση μίας δεδομένης ακολουθίας και αντίστροφα, δεδομένης μιας γεννήτριας συνάρτησης να βρίσκουμε την αντίστοιχη ακολουθία.

1. Γραμμική ιδιότητα

Αν k, l είναι σταθερές και

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \\ B(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r, \end{aligned}$$

τότε η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$d_r = ka_r + lb_r$$

είναι η

$$D(x) = kA(x) + lB(x).$$

Η απόδειξη της ιδιότητας είναι εύκολη.

2. Ιδιότητα της κλίμακας

Αν $A(x)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_0, a_1, a_2, \ldots$ τότε η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$b_r = \lambda^r a_r$$

είναι η

$$A(\lambda x).$$

Η απόδειξη και αυτής της ιδιότητας είναι εύκολη.

3. Ιδιότητα της ολίσθησης

Αν $A(x)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_0, a_1, a_2, \ldots$ τότε η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$\begin{aligned} b_r &= 0, \text{για } r = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ και} \\ b_r &= a_{r-n}, \text{για } r = n, n+1, \ldots \end{aligned}$$

είναι η

$$x^n A(x).$$

Όμοια, η ακολουθία που ορίζεται ως

$$d_r = a_{r+n}, r = 0, 1, 2, \ldots$$

έχει γεννήτρια συνάρτηση την

$$\frac{A(x) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r}{x^n}.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το πρώτο μέρος της ιδιότητας (το δεύτερο μέρος επαφίεται ως άσκηση). Είναι

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r \Rightarrow \\ B(x) &= \sum_{r=0}^{n-1} b_r x^r + \sum_{r=n}^{\infty} b_r x^r \Rightarrow \\ B(x) &= 0 + \sum_{r=n}^{\infty} a_{r-n} x^r. \end{aligned}$$

Θέτω $r - n = k$, οπότε:

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{n+k} \Rightarrow \\ B(x) &= x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Rightarrow \\ B(x) &= x^n A(x). \end{aligned}$$

4. Ιδιότητα μερικών αθροισμάτων

Εάν

$$b_k = \sum_{r=0}^{k} a_r, \; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

τότε η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας b_k, αν η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας a_r είναι $A(x)$, είναι

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

Θα αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} a_k &= b_k - b_{k-1} \Rightarrow \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} b_{k-1} x^k. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολίσθησης έχουμε:

$$A(x) = B(x) - xB(x).$$

Άρα

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$$

5. Ιδιότητα συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων

Αν η ακτίνα σύγκλισης της γεννήτριας συνάρτησης $A(x)$ είναι μεγαλύτερη της μονάδας και ορίσουμε

$$b_k = \sum_{r=k}^{\infty} a_r, \; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

τότε η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας b_k είναι

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}.$$

Για να αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r - \sum_{r=0}^{k-1} a_r \Rightarrow \\ b_k &= A(1) - \sum_{r=0}^{k-1} a_r \Rightarrow \\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} A(1) x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{k-1} a_r \right) x^k \Rightarrow \end{aligned}$$

(σύμφωνα με τις ιδιότητες της ολίσθησης και των μερικών αθροισμάτων)

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}.$$

6. Ιδιότητες της παραγώγου και του ολοκληρώματος

Η ακολουθία $b_r = ra_r,\ r = 0, 1, 2, \ldots$ έχει γεννήτρια συνάρτηση:

$$B(x) = xA'(x),$$

ενώ η ακολουθία $d_r = \frac{a_r}{r+1}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση:

$$D(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(t)\, dt.$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποδεικνύονται εύκολα από τους τύπους (2.1,2.2).

7. Ιδιότητα της συνέλιξης

Η ακολουθία

$$d_k = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

που καλείται συνέλιξη των ακολουθιών a_r, b_r (συμβολισμός $d_r = a_r * b_r$) έχει γεννήτρια συνάρτηση

$$D(x) = A(x)B(x)$$

όπου $A(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας a_r και $B(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας b_r.

Θα αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα ως εξής:

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\right)\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\right) = \\ &= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \ldots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k. \end{aligned}$$

Άρα $A(x)\,B(x) = D(x)$.

Οι παραπάνω ιδιότητες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό αθροισμάτων τα οποία είναι δύσκολο να υπολογισθούν με άλλες μεθόδους.

Παράδειγμα 2.1: Να υπολογιστεί το

$$\sum_{i=1}^{t} \binom{n-i}{j}.$$

Λύση. Θέτω

$$a_{ij} = \binom{n-i}{j}.$$

Για κάθε σταθερά τιμή του i, θεωρούμε το a_{ij} ως ακολουθία με δείκτη το j. Η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$A_i(x) = (1+x)^{n-i}.$$

Εμάς όμως μας ενδιαφέρει η ακολουθία b_j η οποία ορίζεται ως εξής:

$$b_j = \sum_{i=1}^{t} a_{ij}.$$

Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας b_j είναι

$$B(x) = \sum_{i=1}^{t} A_i(x) = \sum_{i=1}^{t} (1+x)^{n-i} = (1+x)^n \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{(1+x)^i}.$$

Ο όρος $\sum\limits_{i=1}^{t} \left(\frac{1}{1+x}\right)^i$ είναι το άθροισμα γεωμετρικής προόδου. Άρα είναι ίσος με

$$\frac{1-(1+x)^{-t}}{x}.$$

Τελικά:

$$B(x) = \frac{(1+x)^n}{x} - \frac{(1+x)^{n-t}}{x}$$

Παρατηρούμε από τον Πίνακα 2.1 ότι η ακολουθία $a_r = \binom{n}{r}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση $(1+x)^n$. Άρα η ακολουθία $\binom{n}{r+1}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση $\frac{(1+x)^n-1}{x}$ (ιδιότητα ολίσθησης). Όμοια η συνάρτηση $\frac{(1+x)^{n-t}-1}{x}$ είναι γεννήτρια της ακολουθίας $\binom{n-t}{r+1}$. Εδώ είναι $r=j$. Άρα:

$$b_j = \sum_{i=1}^{t} \binom{n-i}{j} = \binom{n}{j+1} - \binom{n-t}{j+1}.$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις μπορέσαμε και υπολογίσαμε ένα άθροισμα, το οποίο είναι αρκετά δύσκολο να υπολογιστεί διαφορετικά. Στην παράγραφο 2.3 θα δούμε πώς χρησιμοποιούνται οι γεννήτριες συναρτήσεις σε συνδυαστικά προβλήματα. Στο Κεφάλαιο 3 θα χρησιμοποιήσουμε γεννήτριες συναρτήσεις για να λύσουμε σχέσεις αναδρομής.

Η γενική ιδέα πάντως που ακολουθείται σε πολλές περιπτώσεις όπου θέλουμε να αποδείξουμε ιδιότητες «διακριτού» χαρακτήρα που αναφέρονται σε μία ακολουθία είναι να θεωρήσουμε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας και να βρούμε κάποια «αναλυτική» ή «συνεχή» ιδιότητα της τελευταίας που αποτελεί «μετάφραση» της αρχικής «διακριτής» ιδιότητας. Η αναλυτική ιδιότητα συνήθως αποδεικνύεται ευκολότερα από τη διακριτή. Αφού την αποδείξουμε, επιστρέφουμε στην αρχική ακολουθία. Η μετάβαση από το χώρο των ακολουθιών στο χώρο των γεννητριών συναρτήσεων και η επιστροφή γίνεται με χρήση του Πίνακα 2.1. Πολλές φορές όμως, όπως δείχνουν και τα παρακάτω παραδείγματα, η «ανταλλαγή» ακολουθιών με γεννήτριες συναρτήσεις δεν είναι εντελώς άμεση.

Παράδειγμα 2.2: Να δειχτεί ότι γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_r = \binom{2r}{r}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ είναι η $A(x) = (1-4x)^{1/2}$.
Λύση. Από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} x^r \Rightarrow \\
(1-4x)^{-1/2} &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!} (-4x)^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4^r \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{2r-1}{2}\right)}{r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^r (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2r-1))}{r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^r r! (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2r-1))}{r! r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2r)(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2r-1))}{r! r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2r)!}{r! r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{2r}{r} x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} x^r.
\end{aligned}$$

Ακολουθία $a_r,\ r=0,1,2,\ldots$	Γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$
$a_r = 1$	$\dfrac{1}{1-x}$
$a_r = r+1$	$\dfrac{1}{(1-x)^2}$
$a_0 = 0$ $a_r = \dfrac{1}{r}, r \geq 1$	$\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$
$a_0 = 0$ $a_r = \dfrac{1}{r},\ r$ ζυγός $a_r = \dfrac{1}{r},\ r > 0$ και μονός	$\ln(1+x)$
$a_r = \dbinom{n}{r},\ n \in \mathbb{R}$	$(1+x)^n$
$a_r = \dfrac{1}{r!}$	e^x
$a_r = \dfrac{n^r}{r!},\ n \in \mathbb{R}$	e^{nx}
$a_r - a_{r-1}$	$(1-x)A(x)$

Πίνακας 2.1: Γεννήτριες συναρτήσεις και ακολουθίες

Δηλαδή,

$$(1-4x)^{-1/2} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} x^r.$$

Άρα η ακολουθία $a_r = \binom{2r}{r},\ r = 0,1,2,\ldots,r$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = (1-4x)^{1/2}$.

Πριν το δεύτερο παράδειγμα κρίνουμε σκόπιμο να υπενθυμίσουμε συνοπτικά την τεχνική της *μερικής κλασματικής ανάλυσης*. Στόχος της τεχνικής αυτής είναι να γραφεί μία ρητή συνάρτηση $F(x)$, δηλαδή μία συνάρτηση που γράφεται ως πηλίκον $P(x)/Q(x)$ δύο πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$, ως άθροισμα κλασμάτων απλούστερης μορφής.

Δεχόμαστε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ είναι γνησίως μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου $Q(x)$ (αλλιώς διαιρούμε τα πολυώνυμα). Ακόμη, για να αποφύγουμε το δύσχρηστο συμβολισμό της γενικής περίπτωσης, θα θεωρήσουμε μία ειδική περίπτωση για το πολυώνυμο $Q(x)$. Μελετώντας την ειδική αυτή περίπτωση ο αναγνώστης θα μπορεί εύκολα να αντιμετωπίσει οποιαδήποτε περίπτωση (περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί να βρει ο αναγνώστης σε οποιοδήποτε βιβλίο Απειροστικού Λογισμού ή εισαγωγικής Ανάλυσης).

Έστω λοιπόν ότι το $Q(x)$ έχει μία πραγματική ρίζα x_1 πολλαπλότητας 1, μία πραγματική ρίζα x_2 πολλαπλότητας 3 και τις δύο συζυγείς φανταστικές ρίζες $\pm i$ την κάθε μία με πολλαπλότητα 2. Επομένως ο βαθμός του $Q(x)$ είναι 8 και ο βαθμός του $P(x)$ —σύμφωνα με την υπόθεση μας— είναι το πολύ 7. Επίσης ισχύει ότι:

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)^3(x^2 + 1)^2.$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι γενικά δεν είναι εύκολο, και πολλές φορές είναι αδύνατο, να βρούμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου όταν δεν τις γνωρίζουμε. Η συνηθέστερη τακτική για τον υπολογισμό τους είναι να προσπαθήσουμε να αναλύσουμε το πολυώνυμο σε γινόμενο παραγόντων (όταν ο βαθμός του είναι μεγαλύτερος του 2).

Θα γράψουμε τη συνάρτηση $F(x) = P(x)/Q(x)$ ως:

$$\begin{aligned} F(x) = {} & \frac{A}{(x - x_1)} \\ & + \frac{B}{(x - x_2)^3} + \frac{C}{(x - x_2)^2} + \frac{D}{(x - x_2)} \\ & + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 1)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

και θα υπολογίσουμε τους συντελεστές A, B, C, D, E, F, G, H.

Για τον υπολογισμό του συντελεστή A, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.4) με $(x - x_1)$, διαγράφουμε τον παράγοντα $(x - x_1)$ απ' όπου είναι δυνατό να διαγραφεί και θέτουμε $x = x_1$. Τελικά προκύπτει ότι:

$$A = F(x)(x - x_1)\big|_{x=x_1} = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)^3(x_1^2 + 1)^2}.$$

Για τον υπολογισμό του συντελεστή B, επιστρέφουμε στην εξίσωση (2.4), πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με $(x - x_2)^3$, διαγράφουμε τον παράγοντα $(x - x_2)$ απ' όπου είναι δυνατό να διαγραφεί και θέτουμε $x = x_2$. Τελικά προκύπτει ότι:

$$B = F(x)(x - x_2)^3\big|_{x=x_2} = \frac{P(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2^2 + 1)^2}.$$

Για τον υπολογισμό του συντελεστή C, *πριν θέσουμε $x = x_2$, παραγωγίζουμε πρώτα και τα δύο μέλη της εξίσωσης* και θέτουμε στη συνέχεια $x = x_2$. Τελικά προκύπτει ότι:

$$C = \left.\frac{d\left(F(x)(x - x_2)^3\right)}{dx}\right|_{x=x_2} = \left.\left(\frac{P(x)}{(x - x_1)(x^2 + 1)^2}\right)'\right|_{x=x_2}.$$

Ο υπολογισμός του συντελεστή D γίνεται παραγωγίζοντας δύο φορές πρίν θέσουμε $x = x_2$.

Για τον υπολογισμό των συντελεστών F, G, επιστρέφουμε στη εξίσωση (2.4), πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με (x^2+1), διαγράφουμε τον παράγοντα $(x^2+1)^2$ απ' όπου είναι δυνατό να διαγραφεί και θέτουμε $x = i$. Εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της εξίσωσης που προκύπτει, παίρνουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές F, G, το οποίο επιλύουμε.

Τέλος για τον υπολογισμό των συντελεστών H, D, πριν θέσουμε $x = i$, παραγωγίζουμε δύο φορές.

Παράδειγμα 2.3: Ποιά ακολουθία έχει γεννήτρια συνάρτηση την

$$F(x) = \frac{4x^2(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2};$$

Λύση. Είναι

$$F(x) = 4x^2\left(\frac{(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}\right).$$

Παρατηρήστε ότι αρκεί βρούμε πρώτα τη γεννήτρια συνάρτηση του παράγοντα $G(x) = (1-8x)/((1-4x)(1-2x)^2)$. Ο παρονομαστής έχει δύο ρίζες, τη $x_1 = 1/4$ πολλαπλότητας 1 και την $x_2 = 1/2$, πολλαπλότητας 2. Επομένως θέτω:

$$G(x) = \frac{A}{(1-4x)} + \frac{B}{(1-2x)^2} + \frac{C}{(1-2x)}.$$

Παρατηρήστε ότι για να αποφύγουμε πολύπλοκες κλασματικές εκφράσεις, γράψαμε τους παρονομαστές των απλών κλασμάτων λίγο διαφορετικά σε σύγκριση με την περίπτωση που αναλύσαμε προηγούμενα. Έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned}
A &= (1-4x)\left.\frac{(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}\right|_{x=1/4} = \ldots = -4,\\
B &= (1-2x)^2\left.\frac{(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}\right|_{x=1/2} = \ldots = 3,\\
C &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left.\left[(1-2x)^2\left(\frac{(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}\right)\right]\right|_{x=12} = \ldots = 2.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$G(x) = \frac{-4}{(1-4x)} + \frac{3}{(1-2x)^2} + \frac{2}{(1-2x)}.$$

Προκύπτει τώρα ότι η ακολουθία που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $G(x)$ είναι η:

$$a_r = -4\cdot 4^r + 3(r+1)2^r + 2\cdot 2^r,\ r = 0, 1, 2, \ldots$$

Άρα η $F(x) = 4x^2G(x)$ είναι γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $4a_{r-2}$.

Επομένως η ζητούμενη ακολουθία είναι η

$$a_r = \begin{cases} 0,\ r < 2 \\ (3r-1)2^r - 4^r,\ r = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.4: Να βρεθεί κλειστός τύπος για τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_r = r^2,\ r = 0, 1, 2, \ldots$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το άθροισμα $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + r^2$.

Λύση. Είναι γνωστό ότι

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^r + \ldots$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέρη της παραπάνω εξίσωσης προκύπτει:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + rx^{r-1} + \ldots$$

Πολλαπλασιάζοντας επί x προκύπτει:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + rx^r + \ldots,$$

παραγωγίζοντας ξανά:

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = 1^2 + 2^2x + 3^3x^2 + 4^2x^3 + \ldots + r^2x^{r-1} + \ldots,$$

και τέλος πολλαπλασιάζοντας πάλι επί x:

$$x\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = 0^2 + 1^2x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots + r^2x^r + \ldots$$

Δηλαδή η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_r = r^2,\ r = 0, 1, 2, \ldots$ είναι η:

$$f(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Από την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων έχουμε ότι η

$$g(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3(1-x)} = \frac{f(x)}{(1-x)}$$

είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$0^2, 0^2+1^2, 0^2+1^2+2^2, 0^2+1^2+2^2+3^2, \ldots, 0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+r^2, \ldots$$

Σύμφωνα με το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε ότι ο συντελεστής του x^r στο $\frac{1}{(1-x)^4}$ είναι

$$\begin{aligned}\frac{(-4)(-4-1)(-4-2)\ldots(-4-r+1)}{r!}(-1)^r &= \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(r+3)}{r!} \\ &= \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1\cdot 2\cdot 3}.\end{aligned}$$

Επομένως ο συντελεστής του x^r στην έκφραση $\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$ είναι

$$\frac{r(r+1)(r+2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(r-1)r(r+1)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}.$$

Επομένως

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}.$$

2.3 Απαριθμητές

Αν οι όροι μιας ακολουθίας a_r, $r = 0, 1, 2, \ldots$ δίνουν το πλήθος ενός συνόλου συνδυαστικών αντικειμένων που εξαρτάται από την παράμετρο r, τότε η γεννήτρια συνάρτηση

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

καλείται απαριθμητής του συνόλου. Για παράδειγμα, η γεννήτρια συνάρτηση

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

είναι ο απαριθμητής των συνδυασμών (χωρίς επανάληψη) r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα (στο παράδειγμα αυτό το σύνολο των συνδυαστικών αντικειμένων παραμετροποιείται από το r, ενώ το n θεωρείται ως σταθερά).

Οι απαριθμητές χρησιμοποιούνται για να υπολογίσουμε το πλήθος συνόλων αντικειμένων που δίνονται με συνδυαστική περιγραφή και εξαρτώνται από μία παράμετρο. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου αυτής, βρίσκουμε πρώτα έναν κλειστό (δηλ. συμπτηγμένο) τύπο για τον απαριθμητή «μεταφράζοντας» τη συνδυαστική περιγραφή του συνόλου σε αλγεβρικές πράξεις. Στη συνέχεια γράφουμε τον απαριθμητή σε μορφή δυναμοσειράς. Οι συντελεστές της δυναμοσειράς μας δίνουν το πλήθος των αντικειμένων του συνόλου, για κάθε τιμή της παραμέτρου.

Παράδειγμα 2.5: Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των επιλογών r αντικειμένων (χωρίς επανάληψη) από n αντικείμενα.

Λύση. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε αν σκεφτούμε τον τρόπο που πολλαπλασιάζουμε πολυώνυμα ότι ο αριθμός αυτός πρέπει να είναι ο συντελεστής του x^r στη συνάρτηση $(1+x)^n$. Αναπτύσσοντας τώρα το $(1+x)^n$ σε δυναμοσειρά (χρησιμοποιώντας το διωνυμικό τύπο) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}.$$

Ας εξετάσουμε τώρα τι θα γίνει αν επιτρέψουμε επανάληψη των αντικειμένων. Έστω ότι έχουμε μόνο τρία αντικείμενα και θέλουμε να βρούμε τους δυνατούς τρόπους να κατασκευάσουμε συνδυασμούς από αυτά με τον περιορισμό ότι i-οστό αντικείμενο μπορεί να επαναληφθεί στο συνδυασμό έως m_i φορές, όπου $m_i, i = 1, 2, 3$ δεδομένοι φυσικοί αριθμοί. Παρατηρώντας πάλι πώς πολλαπλασιάζουμε πολυώνυμα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο συντελεστής του x^r στο ανάπτυγμα του πολυωνύμου

$$\left(1+x+x^2+\ldots+x^{m_1}\right)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{m_2}\right)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{m_3}\right).$$

Αν τώρα επιτρέπουμε απεριόριστη επανάληψη των αντικειμένων, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο συντελεστής του x^r στο:

$$\left(1+x+x^2+\ldots\right)^3.$$

Επειδή όμως

$$1+x+x^2+\ldots = \frac{1}{1-x} \ \ (\text{για } \ |x|<1),$$

ο ζητούμενος αριθμός είναι ο συντελεστής του x^r στο:

$$(1-x)^{-3} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-3}{r} x^r.$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$(-1)^r \binom{-3}{r} = \binom{r+2}{r}$$

Είναι πλέον τετριμμένο να αποδείξουμε ότι αν έχουμε n αντικείμενα και θέλουμε να επιλέξουμε r από αυτά με επανάληψη, υπάρχουν

$$\binom{n+r-1}{r}$$

τρόποι να το κάνουμε. Με άλλα λόγια, υπάρχουν

$$\binom{n+r-1}{r}$$

τοποθετήσεις r μη διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές.

Στα ίδια συμπεράσματα είχαμε καταλήξει με διαφορετικούς τρόπους και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τώρα όμως έχουμε στα χέρια μας ένα ισχυρό εργαλείο που μας επιτρέπει να λύσουμε δυσκολότερα προβλήματα.

Παράδειγμα 2.6: Έστω ότι έχουμε τον περιορισμό ότι όλες οι υποδοχές πρέπει να έχουν ένα τουλάχιστον αντικείμενο.

Λύση. Είναι τώρα εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι ο απαριθμητής είναι

$$\left(x + x^2 + \ldots\right)^n = \frac{x^n}{(1-x)^n} = x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-n}{r} x^r.$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$(-1)^r \binom{-n}{r-n} = \binom{r-1}{r-n}.$$

Παράδειγμα 2.7: Ποιό είναι το πλήθος των συνδυασμών r αντικειμένων από n αντικείμενα, με επανάληψη αλλά με τον περιορισμό ότι κάθε αντικείμενο πρέπει να εμφανιστεί άρτιο αριθμό φορών; Σημειώστε ότι το πιο πάνω πρόβλημα είναι το ίδιο με το εξής: «Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που r μη διακεκριμένα αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε n υποδοχές διακεκριμένες, με τον περιορισμό ότι κάθε υποδοχή θα δεχτεί άρτιο αριθμό αντικειμένων».

Λύση. Η γεννήτρια συνάρτηση/απαριθμητής είναι

$$\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots\right)^n.$$

Είναι γνωστό ότι

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$$

Επομένως:

$$\left(1+x^2+x^4+\ldots\right)^n = \left(1-x^2\right)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^{2r}.$$

Άρα, όπως αναμένεται, η απάντηση είναι $\binom{n+r/2-1}{r/2}$.
Σημειώστε ότι

$$\left(1-x^2\right)^{-n} = (1-x)^{-n}(1+x)^{-n}.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις και την ιδιότητα της συνέλιξης καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η έκφραση:

$$\binom{n+r-1}{r} - \binom{n+r-2}{r-1} n + \binom{n+r-3}{r-2}\binom{n+1}{2} - \ldots$$
$$+(-1)^k \binom{n+(r-k)-1}{r-k}\binom{n+k-1}{k} + \ldots + (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

είναι ίση με 0 για r περιττό, και είναι ίση με

$$\binom{n+s-1}{s} \text{ για άρτιο } r=2s.$$

Άρα καταλήγουμε στον τύπο

$$\binom{n+s-1}{s} = \sum_{k=0}^{2s} \binom{n+2s-k-1}{2s-k}\binom{n+k-1}{k}(-1)^k.$$

Παράδειγμα 2.8 (διαμερίσεις ακεραίων): Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που ένας ακέραιος θετικός αριθμός n μπορεί να γραφεί ως άθροισμα θετικών ακεραίων αριθμών, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά των όρων στα αθροίσματα. Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με $d(n)$. Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned}
d(1)=1 &\quad : \quad 1\\
d(2)=2 &\quad : \quad 2=1+1\\
d(3)=3 &\quad : \quad 3=2+1=1+1+1\\
d(4)=5 &\quad : \quad 4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1.
\end{aligned}$$

Λύση. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι εκθέτες του x στη δυναμοσειρά

$$1+x+x^{1+1}+x^{1+1+1}+x^{1+1+1+1}+\cdots = 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$$

αντιστοιχούν στις φορές θα χρησιμοποιήσουμε το 1 σε μία διαμέριση του n. Όμοια οι εκθέτες του x στη δυναμοσειρά

$$1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\cdots = 1+x^2+x^4+x^6+\cdots$$

αντιστοιχούν στις φορές που θα χρησιμοποιήσουμε το 2 σε μία διαμέριση του n.

Εάν θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε, για παράδειγμα, το $d(10)$ αρκεί να βρούμε το συντελεστή του x^{10} στο γινόμενο:

$$\begin{aligned}
f(x) = \quad & \left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\\
& \left(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\right)\cdots\left(1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+\cdots\right).
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε τώρα ότι:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)}\frac{1}{(1-x^2)}\cdots\frac{1}{(1-x^{10})} = \prod_{i=1}^{10}\frac{1}{(1-x^i)}.$$

Γενικεύοντας τα παραπάνω, καταλήγουμε στο ότι συνάρτηση:

$$D(x) = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^i)}$$

είναι η γεννήτρια συνάρτηση (απαριθμητής) για την ακολουθία $d(n), n = 0, 1, \ldots$, όπου ορίζουμε $d(0) = 1$. Αν και το $D(x)$ είναι θεωρητικά πλήρως ορισμένο, είναι αρκετά δύσκολο να δουλεύουμε με γινόμενα άπειρων όρων.

Εάν όμως θεωρήσουμε μόνο το

$$\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(1-x^i)}, \text{ για κάποιο σταθερό } r,$$

τότε ο συντελεστής του x^n είναι ο αριθμός των διαμερίσεων του n σε αθροίσματα των οποίων οι όροι δεν υπερβαίνουν το r.

Παράδειγμα 2.9: Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση για το $d_\delta(n)$, όπου $d_\delta(n)$ είναι ο αριθμός των διαμερίσεων ενός θετικού ακέραιου n σε αθροίσματα που περιέχουν διαφορετικούς θετικούς ακέραιους.

Λύση. Για παράδειγμα, ενώ όλες οι δυνατές διαμερίσεις του ακέραιου 6 (όχι κατ' ανάγκη σε διαφορετικούς ακέραιους είναι οι:

(1)	1+1+1+1+1+1	(2)	1+1+1+1+2
(3)	1+1+1+3	(4)	1+1+4
(5)	1+1+2+2	(6)	1+5
(7)	1+2+3	(8)	2+2+2
(9)	2+4	(10)	3+3
(11)	6		

παρατηρούμε ότι μόνο οι διαμερίσεις (6), (7), (9) και (11) περιέχουν διαφορετικούς ακέραιους. Επομένως $d_\delta(6) = 4$. Παρατηρούμε τώρα ότι για τον υπολογισμό του $d_\delta(n)$ έχουμε δύο επιλογές για κάθε ακέραιο k: (α) ο k να μη χρησιμοποιηθεί στη διαμέριση ή (β) ο k να χρησιμοποιηθεί μόνο μια φορά.

Επομένως προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση για το $d_\delta(n)$ είναι η

$$D_\delta(x) = (1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\ldots = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-x^i\right)$$

Άρα το $d_\delta(n)$ είναι ο συντελεστής του x^n στο

$$(1+x)\left(1+x^2\right)\ldots(1+x^n).$$

Ορίζουμε ότι $d_\delta(0) = 1$.

Για $n = 6$, ο συντελεστής του x^6 στο

$$(1+x)\left(1+x^2\right)\ldots\left(1+x^6\right)$$

είναι 4.

2.4 Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

Δυστυχώς οι γεννήτριες συναρτήσεις που μάθαμε μέχρι τώρα δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση διατάξεων, ή για την εύρεση του πλήθους συνόλων από συνδυαστικά αντικείμενα τα οποία εξαρτώνται από παράμετρο που αναφέρεται σε διακεκριμένα αντικείμενα. Τούτο διότι ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετική πράξη, άρα πολλαπλασιάζοντας πολυώνυμα ή σειρές δεν μπορούμε να «απεικονίσουμε» αλγεβρικά την έννοια των διατάξεων ή των παραμετροποιήσεων που αναφέρονται σε διακεκριμένα αντικείμενα. Μπορούμε όμως να ξεφύγουμε από αυτό το αδιέξοδο. Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} P(n,r)\,\frac{x^r}{r!},$$

δηλαδή ο συντελεστής του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα του $(1+x)^n$ είναι ο αριθμός των διατάξεων r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα. Αυτό μας οδηγεί να ορίσουμε ως εκθετική γεννήτρια συνάρτηση μιας ακολουθίας $a_0, a_1, \ldots$ τη σειρά $\sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r \frac{x^k r}{r!}$ (η ορολογία οφείλεται στο ότι $e^x = \sum\limits_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$).

Ας κοιτάξουμε τώρα προσεκτικά ένα γινόμενο της μορφής:

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^n.$$

Αν αναπτύξουμε το γινόμενο αυτό σε σειρά των $\frac{x^r}{r!}$, ο συντελεστής του $\frac{x^r}{r!}$ είναι

$$\sum_{q_1+q_2+\ldots+q_n=r} \frac{r!}{q_1!q_2!\ldots q_n!},$$

όπου το άθροισμα κυμαίνεται πάνω από όλες τις δυνατές αναλύσεις του r σε άθροισμα n μη αρνητικών όρων (διαφορετικές θεωρούνται δύο αναλύσεις εάν έχουν διαφορετικά σύνολα όρων, ή εάν έχουν το ίδιο σύνολο όρων αλλά με διαφορετική σειρά). Αλλά όμως η έκφραση

$$\frac{r!}{q_1!q_2!\ldots q_n!}$$

δίνει τον αριθμό των μεταθέσεων r αντικειμένων που είναι χωρισμένα σε n ομάδες με q_i $(1 \leq\ i \leq n)$ μη διακεκριμένα στοιχεία η κάθε μία. Επομένως η έκφραση

$$\sum_{q_1+\ldots+q_n=r} \frac{r!}{q_1!\ldots q_n!} \tag{2.5}$$

δίνει τον αριθμό των μεταθέσεων με επανάληψη r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα (η έκφραση αυτή επομένως ισούται με n^r). Δεν είναι τώρα δύσκολο να γενικεύσουμε τις παραπάνω ιδέες:

Παράδειγμα 2.10: Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων να κατανεμηθούν r διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες (ή μη διακεκριμένες) υποδοχές, όταν κάθε υποδοχή πρέπει να δεχθεί ένα τουλάχιστον αντικείμενο.

Λύση. Θεωρούμε ως παράμετρο του προβλήματος τον αριθμό r των αντικειμένων και ως σταθερά τον αριθμό n των υποδοχών. Άρα ακόμη και εάν οι υποδοχές είναι μη διακεκριμένες, θα χρησιμοποιήσουμε εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις. Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση όπου οι υποδοχές είναι διακεκριμένες. Ο εκθετικός απαριθμητής είναι

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^n = \left(e^x - 1\right)^n .$$

Σημείωση: Το πρόβλημα των τοποθετήσεων σε αυτή την περίπτωση είναι ισοδύναμο με την εύρεση του αριθμού των διατάξεων r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα, με επανάληψη, αλλά και με τον επιπλέον περιορισμό ότι όλα τα n αντικείμενα πρέπει να εμφανισθούν στη διάταξη τουλάχιστον μία φορά.

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\begin{aligned} \left(e^x - 1\right)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \, e^{(n-i)x} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (n-i)^r \, x^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r . \end{aligned}$$

Επομένως, ο αριθμός των τρόπων να τοποθετήσουμε r διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές, χωρίς να αφήσουμε άδειες υποδοχές, είναι

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r = n! S(r,n) ,$$

όπου

$$S(r,n) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r . \tag{2.6}$$

Οι $S(r,n)$ καλούνται αριθμοί Stirling 2ου είδους. Συμβολίζονται επίσης και με $\left\{ {r \atop n} \right\}$.

Για την περίπτωση τώρα που οι υποδοχές είναι μη διακεκριμένες, αρκεί να διαιρέσουμε τον τύπο για διακεκριμένες υποδοχές με $n!$ για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός των τρόπων να τοποθετήσουμε r διακεκριμένα αντικείμενα σε n μη διακεκριμένες υποδοχές, χωρίς να αφήσουμε άδειες υποδοχές, είναι $S(r,n)$. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με τον υπολογισμό του αριθμού των τρόπων που ένα σύνολο με r στοιχεία μπορεί να διαμερισθεί σε n μη κενά υποσύνολα, ξένα ανά δύο μεταξύ τους. Ο εκθετικός απαριθμητής των αριθμών αυτών (θεωρώντας ως παράμετρο το r και το n ως σταθερά) είναι $(e^x - 1)^n / n!$.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ερμηνεία του αριθμού των διαμερίσεων για τους αριθμούς Stirling 2ου είδους είναι εύκολο να καταλήξει κανείς στον ακόλουθο αναγωγικό τύπο:

$$S(r+1, n+1) = (n+1)S(r, n+1) + S(r,n). \tag{2.7}$$

Πράγματι, δεδομένων $r+1$ διακεκριμένων αντικειμένων, έστω των $\{1, \dots, r, r+1\}$, ξεχωρίζω ένα από αυτά, έστω το τελευταίο, το $r+1$. Για να κατασκευάσω τώρα μία οποιαδήποτε διαμέριση των αντικειμένων $\{1, \ldots, r, r+1\}$ υπάρχουν δύο επιλογές: (α) να κατασκευάσω μία διαμέριση των r αντικειμένων $\{1, \ldots, r\}$ που έχει $n+1$ υποσύνολα και να προσθέσω το αντικείμενο $r+1$ σε κάποιο από τα $n+1$ υποσύνολα ή (β) να κατασκευάσω μία διαμέριση των r αντικειμένων $\{1, \ldots, r\}$ που έχει n υποσύνολα και να θεωρήσω ότι το μονοσύνολο $\{r+1\}$ αποτελεί το $(n+1)$-οστό υποσύνολο της διαμέρισης. Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε ότι η επιλογή (α) μπορεί να υλοποιηθεί κατά $n+1$ τρόπους, ενώ η επιλογή (β) κατά ένα τρόπο.

Στον Πίνακα 2.2 υπάρχουν μερικοί αριθμοί Stirling 2ου είδους, υπολογισμένοι με χρήση του τύπου 2.7.

r/n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	1770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Πίνακας 2.2: Αριθμοί Stirling 2ου είδους, $S(r, n)$

Σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε ότι υπάρχουν και αριθμοί Stirling 1ου είδους, που συμβολίζονται $s(r, n)$ (ή επίσης και με $\left[{r \atop n}\right]$) και δίνουν τον αριθμό των τρόπων να κατασκευάσουμε ένα σύνολο από n περιδέραια χρησιμοποιώντας r διακεκριμένες χάντρες (κάθε περιδέραιο πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μία χάντρα).

Ο αναγωγικός τύπος για τους αριθμούς Stirling 1ου είδους είναι (άσκηση):

$$s(r+1, n+1) = rs(r, n+1) + s(r, n). \tag{2.8}$$

Στον Πίνακα 2.3 υπάρχουν μερικοί αριθμοί Stirling 1ου είδους, υπολογισμένοι με χρήση του τύπου 2.8.

Παράδειγμα 2.11: Να βρεθεί ο εκθετικός απαριθμητής του αριθμού των τρόπων να διαμερίσουμε ένα σύνολο από r στοιχεία σε μη κενά, ξένα ανά δύο υποσύνολα χωρίς περιορισμό στον αριθμό των υποσυνόλων. Οι αριθμοί αυτοί καλούνται αριθμοί Bell και συμβολίζονται με B_r.

Λύση. Επειδή μία διαμέριση θα αποτελείται από ένα ή δύο ή τρία κτλ υποσύνολα, είναι εύκολο να διαπιστώσει κάποιος ότι:

$$B_r = \sum_{i=1}^{\infty} S(r, i).$$

r/n	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	2	3	1					
4	6	11	6	1				
5	24	50	35	10	1			
6	120	274	255	85	15	1		
7	720	1764	1624	735	175	21	1	
8	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

Πίνακας 2.3: Αριθμοί Stirling 1ου είδους $s(r,n)$

Ξέρουμε ότι ο εκθετικός απαριθμητής των $S(r,n)$ είναι $(e^x-1)^n/n!$. Επομένως, ο εκθετικός απαριθμητής των αριθμών Bell B_r είναι

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{(e^x-1)^i}{i!}\right)=e^{e^x-1}-1.$$

Παράδειγμα 2.12: Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να εκτυπωθούν 25 διαφορετικά προγράμματα από τους 3 διαφορετικούς εκτυπωτές που διαθέτει ένα υπολογιστικό κέντρο, με τον περιορισμό ότι κάθε εκτυπωτής πρέπει να εκτυπώσει ένα τουλάχιστον πρόγραμμα.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση. Αυτή είναι η εξής:

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^3=(e^x-1)^3$$

Ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να γίνουν οι εκτυπώσεις είναι ο συντελεστής του $x^{25}/25!$ στο $(e^x-1)^3$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(e^x-1)^3 &= e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}3^r\frac{x^r}{r!}-3\sum_{r=0}^{\infty}2^r\frac{x^r}{r!}+3\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}-1\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\left(3^r-3\cdot 2^r+3\right)\frac{x^r}{r!}-1.\end{aligned}$$

Επομένως ο συντελεστής του $x^{25}/25!$ είναι $3^{25}-3\cdot 2^{25}+3$.

2.5 Ασκήσεις

2.1 Ποιά ακολουθία έχει γεννήτρια συνάρτηση την:

(α) $A(x) = \frac{1+2x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3}$,

(β) $A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1+2x}$,

(γ) $A(x) = \frac{2}{1-4x^2}$.

2.2 Ποιά είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας:

(α) $2, 5, 13, 35, \ldots = 2^n + 3^n$,

(β) $1, 2, 3, \ldots, r, \ldots$

2.3 Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των μερικών αθροισμάτων χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης.

2.4 Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_r = (r+1)\,r\,(r-1)$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το άθροισμα $3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + \ldots + (n+1)\,n\,(n-1)$.

2.5 Για δοσμένο t, να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i}.$$

2.6 Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

(α) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 \binom{n-1}{n-k}$,

(β) $\sum\limits_{i=0}^{r} \frac{r!}{(r-i+1)!(i+1)!}$.

2.7 Έστω x μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, \ldots$ με πιθανότητα αντίστοιχα $x_0, x_1, \ldots$ ($x_i \geq 0$ και $\sum x_i = 1$). Έστω

$$x(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k s^k$$

η λεγόμενη «γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων». Έστω y η τυχαία μεταβλητή που παίρνουμε αν προσθέσουμε n ανεξάρτητα δείγματα της x. Έστω $y_0, y_1, \ldots$ οι πιθανότητες η y να παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, \ldots$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων

$$y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k s^k$$

ισούται με $(X(s))^n$.

2.8 Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_0, a_1, a_2, \ldots$ όπου a_r είναι ο αριθμός των τρόπων να σχηματίσουμε συνδυασμό (με επαναλήψεις) επιλέγοντας r γράμματα από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$ με τον περιορισμό το γράμμα 0 να εμφανιστεί άρτιες φορές. Με βάση τη γεννήτρια συνάρτηση, υπολογίστε το a_r.

2.9 Δίνεται η γεννήτρια συνάρτηση για την ακολουθία $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Να βρεθούν:

(α) η γεννήτρια συνάρτηση για την υπακολουθία των όρων με άρτιο δείκτη, δηλ. $a_0, a_2, a_4, \ldots$,

(β) η γεννήτρια συνάρτηση της υπακολουθίας $a_1, a_4, a_7, \ldots$ (Υπόδειξη: Αν $w = e^{2\pi_i/3}$, τότε $w^0 + w^1 + w^2 = 0$).

2.10 Να βρεθεί ο αριθμός των διαμερίσεων του 2^n με όρους των αθροισμάτων τους αριθμούς 1,2 και 4.

2.11 Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που $2t + 1$ μη διακεκριμένα αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε 3 διακεκριμένα κουτιά, έτσι ώστε κάθε κουτί να μην περιέχει περισσότερα από t αντικείμενα.

2.12 Έχουμε 2 είδη αντικειμένων. Το είδος 1 έχει p μη διακεκριμένα αντικείμενα και το είδος 2 έχει q μη διακεκριμένα αντικείμενα. Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε συνδυασμό επιλέγοντας r αντικείμενα;

2.13 Να βρεθεί ο εκθετικός απαριθμητής για τον αριθμό των τρόπων που μπορούμε να διαλέξουμε r ή λιγότερα αντικείμενα από r διακεκριμένα αντικείμενα και να τα κατανείμουμε σε n διακεκριμένες υποδοχές, με τα αντικείμενα μέσα σε κάθε υποδοχή ταξινομημένα.

2.14 Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να μετατρέψουμε σε ψιλά νόμισμα του ενός ευρώ.

Κεφάλαιο 3

Σχέσεις Αναδρομής

3.1 Εισαγωγή

Γύρω στα 1200 μ. Χ. ο Leonardo da Pisa, πιο γνωστός σαν Fibonacci, ανακάλυψε και μελέτησε την ακολουθία αριθμών Fibonacci. Ο Fibonacci παρουσίαζε αυτήν την ακολουθία αριθμών λέγοντας την πιο κάτω ιστορία: *«Σε ένα νησί υπάρχει αρχικά ένα ζευγάρι από κουνέλια. Κάθε ζεύγος κουνελιών έχει τη δυνατότητα μετά από ένα μήνα ζωής να αναπαράγει ένα άλλο ζεύγος από κουνέλια μέσα σε ένα μήνα. Αυτό μας λέει ότι το κουνέλι για να γεννήσει πρέπει να ενηλικιωθεί, δηλαδή να γίνει ενός μηνός. Γεννήσεις συμβαίνουν κάθε μήνα. Τα κουνέλια ποτέ δεν πεθαίνουν και ποτέ δεν σταματάνε να αναπαράγουν».* Ας προσπαθήσουμε να δώσουμε μια λύση στο πρόβλημα του υπολογισμού του αριθμού των κουνελιών μετά από ένα δεδομένο διάστημα.

Ας είναι a_n ο αριθμός των ζευγαριών των κουνελιών μετά από n μήνες. Ας είναι N_n τα νεογεννηθέντα ζευγάρια (δηλαδή αυτά που γεννήθηκαν στο μήνα n) και O_n τα παλιά ζευγάρια (δηλαδή αυτά που γεννήθηκαν στους μήνες $1, \ldots, n-1$). Επομένως είναι

$$a_n = N_n + O_n$$

Οι κανόνες της ιστορίας μας λένε ότι τον επόμενο μήνα θα συμβούν τα εξής γεγονότα:

$O_{n+1} = O_n + N_n = a_n$ - τα παλιά ζευγάρια τη χρονική στιγμή $(n+1)$ έχουν αυξηθεί με αυτά που γεννήθηκαν τη χρονική στιγμή n.

$N_{n+1} = O_n$ - κάθε παλιό ζευγάρι στη χρονική στιγμή n παράγει ένα νεογέννητο ζευγάρι τη χρονική στιγμή $n+1$.

Κατά τη διάρκεια του επόμενου μήνα έχουμε:

$$\begin{aligned} O_{n+2} &= O_{n+1} + N_{n+1} = a_{n+1} \\ N_{n+2} &= O_{n+1} \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις πιο πάνω εξισώσεις έχουμε

$$a_{n+2} = O_{n+2} + N_{n+2} = (O_{n+1} + N_{n+1}) + (O_n + N_n) = a_{n+1} + a_n$$

Η πιο πάνω σχέση είναι μια σχέση αναδρομής. Οι αρχικές συνθήκες χρειάζονται, αλλά δεν έχουν και μεγάλη σημασία. Για τους αριθμούς Fibonacci συνήθως είναι $a_0 = 0, a_1 = 1$, ή $a_0 = a_1 = 1$.

Στις επόμενες παραγράφους θα δώσουμε κάποιους ορισμούς και θα περιγράψουμε τρόπους για τη λύση σχέσεων αναδρομής, δηλαδή για την εύρεση κλειστού τύπου για το γενικό όρο της ακολουθίας που ορίζεται με τη σχέση αναδρομής.

3.2 Γραμμικές Σχέσεις Αναδρομής με σταθερούς συντελεστές

Μια σχέση αναδρομής που έχει την εξής μορφή

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r} = f(n) \tag{3.1}$$

με $c_0, c_1, \ldots, c_r$ σταθερούς αριθμούς ονομάζεται γραμμική σχέση αναδρομής με σταθερούς συντελεστές, r-τάξης ή r-βαθμού. Οι τιμές της ακολουθίας $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ ονομάζονται αρχικές συνθήκες της σχέσης αναδρομής.

Η $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ είναι μια τέτοια σχέση αναδρομής. Η συνάρτηση $f(n)$ ονομάζεται οδηγός συνάρτηση.

Αν η $f(n) = 0$, τότε η σχέση αναδρομής λέγεται ομογενής. Στην περίπτωση που $f(n) \neq 0$ λέγεται μη ομογενής. Στη συνέχεια θα δώσουμε δυο τρόπους επίλυσης γραμμικών σχέσεων αναδρομής με σταθερούς συντελεστές.

3.2.1 Λύση με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η γενική λύση μιας γραμμικής σχέσης αναδρομής με σταθερούς συντελεστές μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δύο μερών: της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς σχέσης και μιας μερικής λύσης της δεδομένης μη ομογενούς σχέσης. Άρα το πρόβλημα της εύρεσης της γενικής λύσης της σχέσης αναδρομής ανάγεται στο πρόβλημα της εύρεσης της γενικής λύσης της ομογενούς και μιας μερικής λύσης της δεδομένης μη ομογενούς. Ας είναι $a_n^{(h)}$ η λύση της γενικής ομογενούς και $a_n^{(p)}$ μια μερική λύση της μη ομογενούς. Είναι

$$\begin{aligned} c_0 a_n^{(h)} + c_1 a_{n-1}^{(h)} + \ldots + c_r a_{n-r}^{(h)} &= 0 \\ c_0 a_n^{(p)} + c_1 a_{n-1}^{(p)} + \ldots + c_r a_{n-r}^{(p)} &= f(n) \end{aligned}$$

Επομένως

$$c_0 \left(a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\right) + c_1 \left(a_{n-1}^{(h)} + a_{n-1}^{(p)}\right) + \ldots + c_r \left(a_{n-r}^{(h)} + a_{n-r}^{(p)}\right) = f(n) \tag{3.2}$$

Προφανώς η πλήρης λύση, $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$, ικανοποιεί τη σχέση αναδρομής. *«Ο σκοπός θα είναι να ξεφύγουμε από τη σχέση αναδρομής και να καταλήξουμε σε ένα κλειστό τύπο που μας δίνει το a_n συναρτήσει του n».*

(Α) Εύρεση ομογενούς λύσης: Δοκιμάζουμε μια λύση της μορφής $a_n^{(h)} = Ax^n$, όπου x ονομάζεται χαρακτηριστική ρίζα και A είναι μια σταθερά που θα υπολογιστεί από τις αρχικές συνθήκες. Αντικαθιστώντας αυτή τη λύση στη σχέση αναδρομής παίρνουμε

$$\begin{aligned} & c_0 A x^n + c_1 A x^{n-1} + c_2 A x^{n-2} + \ldots + c_r A x^{n-r} = 0 \Leftrightarrow \\ & c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_r x^{n-r} = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Η (3.3) ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση της σχέσης αναδρομής. Έστω ότι έχει διαφορετικές πραγματικές ρίζες τις $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Τότε αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$a_n^{(h)} = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + \ldots + A_r x_r^n$$

Τα $A_1, A_2, \ldots, A_r$ θα υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα 3.1: Η σχέση αναδρομής για τους αριθμούς Fibonacci είναι

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

ή

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Λύση. Έστω ότι οι αρχικές συνθήκες είναι $a_0 = a_1 = 1$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$x^2 - x - 1 = 0$$

οι ρίζες είναι

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ο αριθμός

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,16803$$

είναι ο λεγόμενος «χρυσός λόγος». (Αναλογία μεγεθών που έχει χρησιμοποιηθεί από την εποχή του Φειδία στην κλασική τέχνη. Λέγεται ότι ευχαριστεί τις αισθήσεις). Σε αυτή την περίπτωση η ομογενής λύση είναι και η πλήρης λύση και δίνεται από τον τύπο:

$$a_n = a_n^{(h)} = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Οι δυο σταθερές A_1, A_2 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες $a_0 = a_1 = 1$ τις δυο εξισώσεις

$$a_0 = A_1 + A_2 = 1,\ a_1 = A_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + A_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

και

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Επομένως,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

θα αναφερθούμε τώρα στην περίπτωση κατά την οποία μερικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικοί αριθμοί. Επειδή οι συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πραγματικοί, αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζα ένα μιγαδικό, τότε έχει και το συζυγή του.

Ας είναι $x_1 = a + ib$ και $x_2 = a - ib$ το ζευγάρι των μιγαδικών ριζών.

Η αντίστοιχη ομογενής λύση είναι

$$\begin{aligned}&A_1 (X_1)^n + A_2 (X_2)^n = A_1 (a+ib)^n + A_2 (a-ib)^n = \\ &B_1 p^n \cos(n\vartheta) + B_2 p^n \sin(n\vartheta)\end{aligned}$$

όπου

$$p = \sqrt{a^2+b^2}$$

και

$$\vartheta = \tan^{-1}(b/a), B_1 = (A_1 + A_2), B_2 = i(A_1 - A_2)$$

Μας μένει η περίπτωση να έχουμε πολλαπλές ρίζες για τη χαρακτηριστική εξίσωση.

Ας είναι X_1 k-πολλαπλότητας ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Τότε αποδεικνύεται ότι η ομογενής λύση είναι

$$\left(A_1 n^{k-1} + A_2 n^{k-2} + \ldots + A_{k-2} n^2 + A_{k-1} n + A_k\right) X_1^n$$

Παράδειγμα 3.2: Να λυθεί η σχέση αναδρομής

$$4a_n - 20a_{n-1} + 17a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση, είναι

$$4x^3 - 20x^2 + 17x - 4 = 0$$

και οι ρίζες

$$x_1 = x_2 = 1/2, x_3 = 4$$

Άρα η ομογενής λύση, που σε αυτή την περίπτωση είναι και πλήρης λύση, είναι

$$a_n^{(h)} = (A_1 n + A_2)(1/2)^n + A_3 4^n$$

Τα A_1, A_2, και A_3 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

(B) Εύρεση μιας μερικής λύσης: Δεν υπάρχει γενικός κανόνας. Μπορούμε όμως να πούμε πως η μερική λύση «μοιάζει» με την οδηγό συνάρτηση. Δηλαδή, ανάλογα με το τι είναι η οδηγός συνάρτηση δοκιμάζουμε και μια μερική λύση. Ο πιο κάτω πίνακας δίνει μερικά παραδείγματα

Μορφή $f(n)$	Μορφή μερικής λύσης
k, σταθερά	C, σταθερά
πολυώνυμο	πολυώνυμο ίδιου βαθμού αλλά πλήρες
$k\lambda^n$, k, λ σταθερές	$c\beta^n$, c, β σταθερές

Οι σταθερές της μερικής λύσης υπολογίζονται αντικαθιστώντας την υποψήφια λύση στην μη ομογενή σχέση αναδρομής.

Παράδειγμα 3.3: Να λυθεί η σχέση αναδρομής

$$\begin{aligned}&6a_n - 5a_{n-1} + a_{n-2} = 6(1/5)^n \quad n = 2, 3, 4, \ldots \\ &a_0 = 0,\ a_1 = 6/5\end{aligned}$$

Λύση.

(α) Ομογενής λύση
Χαρακτηριστική εξίσωση, $6x^2 - 5x + 1 = 0$
οι ρίζες είναι, $x_1 = 1/2, x_2 = 1/3$

Άρα η ομογενής λύση είναι

$$a_n^{(h)} = A_1 \left(1/2\right)^n + A_2 \left(1/3\right)^n$$

(β) Μερική λύση
Η μορφή της οδηγού συνάρτησης $f(n)$, μας επιβάλλει να δοκιμάσουμε μια μερική λύση της μορφής $a_n^{(p)} = B\left(1/5\right)^n$. Δηλαδή

$$\begin{aligned}
&6B\left(1/5\right)^n - 5B\left(1/5\right)^{n-1} + B\left(1/5\right)^{n-2} = 6\left(1/5\right)^n \Rightarrow \\
&\left(6/25\right) B - B + B = 6/25 \Rightarrow B = 1
\end{aligned}$$

Άρα η πλήρης λύση είναι

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = A_1 \left(1/2\right)^n + A_2 \left(1/3\right)^n + \left(1/5\right)^n$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$\begin{aligned}
a_0 &= A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + A_2 \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 0 \quad A_1 + A_2 = -1 \\
a_1 &= A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + A_2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{6}{5} \quad \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} = 1 \\
&A_1 = 8 \text{ και } A_2 = -9
\end{aligned}$$

Άρα η πλήρης λύση είναι

$$a_n = \left(1/2\right)^{n-2} - \left(1/3\right)^{n-2} + \left(1/5\right)^n, \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

3.2.2 Λύση με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων

Ας είναι $A(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

δηλαδή

$$A\left(x\right) = \sum_{L=0}^{\infty} a_L x^L$$

Έστω ότι έχουμε την εξής σχέση αναδρομής

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r} = f\left(n\right) \tag{3.4}$$

η οποία έχει φυσική σημασία και ισχύει μόνο για εκείνα τα n τα οποία είναι μεγαλύτερα ή ίσα από κάποιο ακέραιο k. Ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε τις τιμές εκείνων των a_n για τα οποία $n > k - r$ και αυτό γιατί μόνο αυτά τα a_n σχετίζονται με τη σχέση αναδρομής. Από αυτά τα a_n τα $a_{k-r}, a_{k-r+1}, \ldots, a_{k-1}$ είναι οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Από την (3.4), πολλαπλασιάζοντας με x_n και αθροίζοντας έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left(c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r}\right) x^n = \sum_{n=k}^{\infty} f\left(n\right) x^n \tag{3.5}$$

Από την ιδιότητα της ολίσθησης των γεννητριών συναρτήσεων έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty} c_0 a_n x^n &= c_0\left[A\left(x\right) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_{k-1} x^{k-1}\right] \\
\sum_{n=k}^{\infty} c_1 a_{n-1} x^n &= c_1 x\left[A\left(x\right) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_{k-2} x^{k-2}\right] \\
&\ldots \\
\sum_{n=k}^{\infty} c_r a_{n-r} x^n &= c_r x^r\left[A\left(x\right) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_{k-r-1} x^{k-r-1}\right]
\end{aligned}$$

Λύνοντας την (3.5) ως προς $A(x)$ και κάνοντας τις αντικαταστάσεις έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&A\left(x\right) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-r-1} x^{k-r-1} \\
&+\frac{1}{c_0 + c_1 x + \ldots + c_r x^r}\left[\begin{array}{l}\sum\limits_{n=k}^{\infty} f\left(n\right) x^n + c_0\left(a_{k-r} x^{k-r} + \ldots + a_{k-1} x^{k-1}\right) \\ +c_1\left(a_{k-r} x^{k-r+1} + \ldots + a_{k-2} x^{k-1}\right) + \ldots + c_{r-1} a_{k-r} x^{k-1}\end{array}\right]
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.4: Να λυθεί το Παράδειγμα 3.3 με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων.

Λύση.
Έχουμε

$$6a_n - 5a_{n-1} + a_{n-2} = 6\left(1/5\right)^n, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 6/5$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} 6a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 5a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 6\left(1/5\right)^n x^n \\
&6\left[A\left(x\right) - a_0 - a_1 x\right] - 5x\left[A\left(x\right) - a_0\right] + x^2 A\left(x\right) = \frac{6\left(1/5\right)^2 x^2}{1 - \left(1/5\right) x} \Rightarrow \\
&A\left(x\right) = \left(1/5\right)\frac{x\left(6 - x\right)}{\left[1 - \left(1/3\right) x\right]\left[1 - \left(1/2\right) x\right]\left[1 - \left(1/5\right) x\right]} \Rightarrow \\
&A\left(x\right) = \frac{-9}{1 - \left(1/3\right) x} + \frac{8}{1 - \left(1/2\right) x} + \frac{1}{1 - \left(1/5\right) x} \Rightarrow \\
&a_n = \left(1/2\right)^{n-2} - \left(1/3\right)^{n-2} + \left(1/5\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.5: Δίνονται οι 2 παρακάτω σχέσεις αναδρομής που σχετίζονται μεταξύ τους

$$\begin{aligned}
&a_r = 3a_{r-1} + 2b_{r-1} \\
&b_r = a_{r-1} + b_{r-1} \\
\text{με}\quad &a_0 = 1,\ b_0 = 0
\end{aligned}$$

Λύση. Θα βρούμε κλειστό τύπο για τα a_r, b_r με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων.

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r = \sum_{r=1}^{\infty} 3a_{r-1}x^r + \sum_{r=1}^{\infty} 2b_{r-1}x^r$$
$$\sum_{r=1}^{\infty} b_r x^r = \sum_{r=1}^{\infty} a_{r-1}x^r + \sum_{r=1}^{\infty} b_{r-1}x^r$$
$$\text{με} \qquad A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$$

έχουμε από τις ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων

$$A(x) - 1 = 3xA(x) + 2xB(x)$$
$$B(x) = xA(x) + xB(x)$$

Λύνοντας ως προς $A(x), B(x)$ βρίσκουμε ότι

$$A(x) = \frac{1-x}{1-4x+x^2} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)/6}{1-\left(2+\sqrt{3}\right)x} + \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)/6}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)x}$$

και στη συνέχεια με μερική κλασματική ανάλυση

$$a_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n$$
$$b_n = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \frac{\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n$$

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να εφαρμόσουμε κάποιας μορφής μετασχηματισμό στην ακολουθία, για να την εμφανίσουμε σε μια πιο κατάλληλη μορφή.

Ας δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.6: Να λυθεί η σχέση αναδρομής

$$a_n = 3a_{n-1}^2, \quad n \geq 1,\ a_0 = 1$$

Λύση. Αυτή η σχέση αναδρομής δεν μπορεί να λυθεί με καμιά από τις μεθόδους που έχουμε συζητήσει μέχρι τώρα. Αν όμως θεωρήσουμε μια νέα ακολουθία b_n της μορφής $b_n = \log a_n$ (όπου log δηλώνει λογάριθμο με βάση το 2). Τότε η σχέση αναδρομής μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής

$$b_n = 2b_{n-1} + \log 3, \quad b_0 = 0$$

Αυτή η σχέση αναδρομής μπορεί να λυθεί εύκολα με τις μεθόδους που έχουμε συζητήσει. Αν τη λύσουμε βρίσκουμε ότι

$$b_n = (2^n - 1)\log 3 \quad \text{ή} \quad a_n = 2^{(2^n-1)\log 3} = 3^{2^n-1}$$

3.3 Μη γραμμικές Σχέσεις Αναδρομής

Οι σχέσεις αναδρομής οι οποίες δεν είναι γραμμικές και έχουν σταθερούς συντελεστές, δεν έχουν γενικές τεχνικές λύσης παρόμοιες με αυτές της Παραγράφου 3.2. Συνήθως καταφεύγουμε σε ειδικές μεθόδους. Άλλοτε πάλι για ειδικές κατηγορίες μπορούμε να δώσουμε γενική λύση ή να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης της σχέσης αναδρομής. Πολλές φορές «μαντεύουμε» μια λύση και τη δοκιμάζουμε αν δουλεύει. Άλλες φορές πάλι κάνουμε διάφορους μετασχηματισμούς.

3.3.1 Λύση της τηλεσκοπικής σχέσης αναδρομής

Η γενική μορφή της τηλεσκοπικής σχέσης αναδρομής είναι η εξής

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= aT(n/b) + d(n) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Η συνάρτηση $d(n)$ λέγεται οδηγός συνάρτηση. Σημειώνεται ότι η (3.6) έχει νόημα όταν το n είναι ακέραια δύναμη του b. Αλλά εάν υποθέσουμε ότι η $T(n)$ είναι λεία (δηλαδή έχει παραγώγους κάθε τάξης) και πάρουμε ένα καλό άνω όριο για την $T(n)$, αυτές οι τιμές του n μας δίνουν πληροφορία για το ρυθμό αύξησης της συνάρτησης $T(n)$.

Για να μιλήσουμε για τους ρυθμούς που αυξάνουν οι συναρτήσεις θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό «κεφαλαίο όμικρον» (big-oh). Για παράδειγμα όταν θα λέμε ότι η $T(n)$ είναι $O(n^2)$, θα εννοούμε ότι υπάρχουν θετικές σταθερές c και n_0 τέτοιες ώστε για n ίσο ή μεγαλύτερο από το n_0, έχουμε ότι $T(n) \leq cn^2$.

Ας είναι $T(n) = (n+1)^2$. Παρατηρούμε ότι η $T(n)$ είναι $O(n^2)$. Πράγματι αρκεί να πάρουμε $n_0 = 1$ και $c = 4$. Αυτό συμβαίνει γιατί για $n \geq 1$ ισχύει ότι $(n+1)^2 \leq 4n^2$.

Με άλλα λόγια, όταν λέμε ότι η $T(n)$ είναι $O(f(n))$, αυτό σημαίνει ότι η $f(n)$ είναι ένα πάνω όριο στο ρυθμό αύξησης της $T(n)$.

Για να λύσουμε την (3.6) κάνουμε διαδοχικές αντικαταστάσεις στο δεξιό μέρος για $i = 1, 2$ και έχουμε

$$\begin{aligned} & T(n) = aT(n/b) + d(n) \\ = \; & a\left[aT\left(\frac{n}{b^2}\right) + d\left(\frac{n}{b}\right)\right] + d(n) = a^2T\left(\frac{n}{b^2}\right) + ad\left(\frac{n}{b}\right) + d(n) \\ = \; & a^2\left[aT\left(\frac{n}{b^3}\right) + d\left(\frac{n}{b^2}\right)\right] + ad\left(\frac{n}{b}\right) + d(n) = a^3T\left(\frac{n}{b^3}\right) + a^2d\left(\frac{n}{b^2}\right) + ad\left(\frac{n}{b}\right) + d(n) \\ & \cdots \\ = \; & a^iT\left(\frac{n}{b^i}\right) + \sum_{j=0}^{i-1} a^j d\left(\frac{n}{b^j}\right) \end{aligned}$$

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι $n = b^k$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $T\left(\frac{n}{b^k}\right) = T(1) = 1$ και να πάρουμε, με $i = k$ τη σχέση

$$T(n) = a^k + \sum_{j=0}^{k-1} a^j d\left(b^{k-j}\right)$$

Είναι $k = \log_b n$, άρα

$$T(n) = a^{\log_b n} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j d\left(b^{k-j}\right) \tag{3.7}$$

Είναι αρκετά ενδιαφέρον να δούμε τους διαφορετικούς ρόλους που παίζουν οι δύο όροι στην (3.7).

Ο πρώτος όρος, ο $a^{\log_b n}$, ονομάζεται ομογενής λύση σε αναλογία με την ορολογία που χρησιμοποιήσαμε στις γραμμικές σχέσης αναδρομής με σταθερούς συντελεστές. Προφανώς αν η οδηγός συνάρτηση $d(n)$ είναι 0, τότε η ομογενής λύση είναι η ακριβής λύση για την τηλεσκοπική σχέση αναδρομής.

Ο δεύτερος όρος ονομάζεται μερική λύση και είναι δύσκολο να υπολογιστεί ακόμα και αν ξέρουμε ακριβώς την οδηγό συνάρτηση $d(n)$.

Υπάρχουν λοιπόν οδηγοί συναρτήσεις $d(n)$ για τις οποίες μπορούμε να λύσουμε την (3.7) ακριβώς και υπάρχουν και άλλες για τις οποίες μπορούμε να πάρουμε ένα καλό άνω όριο.

Λέμε ότι μια συνάρτηση f των ακέραιων είναι πολλαπλασιαστική εάν $f(xy) = f(x)f(y)$ για όλους τους θετικούς ακέραιους x και y.

Αν η $d(n)$ είναι πολλαπλασιαστική τότε

$$d\left(b^{k-j}\right) = \left(d\left(b\right)\right)^{k-j}$$

Άρα η μερική λύση είναι

$$\begin{aligned}
X &= \sum_{j=0}^{k-1} a^j \left(d\left(b\right)\right)^{k-j} \\
&= \left(d\left(b\right)\right)^k \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a}{d\left(b\right)}\right)^j \\
&= \left(d\left(b\right)\right)^k \frac{\left(\frac{a}{d(b)}\right)^k - 1}{\frac{a}{d(b)} - 1} \\
X &= \frac{a^k - \left(d\left(b\right)\right)^k}{\frac{a}{d(b)} - 1} \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Υπάρχουν 3 περιπτώσεις που πρέπει να μελετηθούν

(α) Εάν $a > d(b)$, τότε η σχέση (3.8) είναι $O(a^k)$ ή $O(n^{\log_b a})$ αφού $k = \log_b n$. Σε αυτή την περίπτωση η μερική και η ομογενής λύση είναι ίσες σε τάξη μεγέθους και εξαρτώνται μόνο από τα a, b και όχι από την οδηγό συνάρτηση $d(n)$.

$$T\left(n\right) = O\left(a^k\right) = O\left(n^{\log_b a}\right) \qquad (3.9)$$

(β) Εάν $a < d(b)$, τότε η σχέση (3.8) είναι $O\left(d\left(b\right)^k\right)$ ή $O\left(n^{\log_b d(b)}\right)$. Σε αυτή την περίπτωση η μερική λύση υπερβαίνει σε τάξη μεγέθους την ομογενή λύση. Άρα αν θέλουμε να κάνουμε βελτιώσεις πρέπει να κοιτάξουμε εκτός από τα a, b και την οδηγό συνάρτηση $d(n)$. (Στην ειδική περίπτωση που $d(n) = n^a$, έχουμε $d(b) = b^a$ και $\log_b(b^a) = a$. Άρα η $T(n) = O(n^a) = O\left(d\left(n\right)\right)$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι

$$T\left(n\right) = O\left(\left(d\left(b\right)\right)^k\right) = O\left(n^a\right) \qquad (3.10)$$

(γ) Εάν $a = d(b)$ τότε

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=0}^{k-1} a^j \left(d\left(b\right)\right)^{k-j} \\ &= \left(d\left(b\right)\right)^k \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a}{d\left(b\right)}\right)^j \\ &= \left(d\left(b\right)\right)^k k \\ &= n^{\log_b d(b)} \log_b n \end{aligned}$$

Αφού $a = d(b)$, παρατηρούμε ότι η μερική λύση είναι κατά $log_b n$ τάξη μεγέθους φορές η ομογενής λύση. Άρα η μερική λύση υπερβαίνει και πάλι την ομογενή λύση. Λέμε λοιπόν ότι

$$T\left(n\right) = O\left(n^{\log_b d(b)} \log_b n\right) \tag{3.11}$$

Παράδειγμα 3.7: Να μελετηθούν οι πιο κάτω σχέσεις αναδρομής

1. $T(n) = 4T(n/2) + n$
2. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$
3. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$

σε όλες τις πιο πάνω είναι $T(1) = 1$.

Λύση. Σε κάθε μια από τις πιο πάνω έχουμε για την ομογενή λύση $a = 4, b = 2$ άρα η ομογενής λύση είναι n^2.

(1) Είναι $d(n) = n \Rightarrow d(b) = d(2) = 2$ και $a = 4 \Rightarrow d(b) = 2$. Άρα και η μερική λύση είναι n^2. Επομένως $T(n) = O(n^2)$.

(2) Είναι $d(b) = 4 = a$ άρα η μερική λύση και επομένως και η $T(n)$ είναι $O(n^2 \log n)$.

(3) Είναι $d(n) = n^3 \Rightarrow d(b) = d(2) = 8$ και $a < d(b)$. Επομένως η μερική λύση και επομένως και η $T(n)$ είναι $O\left(n^{\log_b d(b)}\right) = O\left(n^3\right)$.

3.3.2 Λύση της σχέσης αναδρομής που ορίζεται με συνέλιξη

Έστω η σχέση αναδρομής

$$a_n = a_{n-r}a_0 + a_{n-r-1}a_1 + \ldots + a_0 a_r$$

ή

$$a_n = \sum_{l=0}^{n-r} a_{n-r-l} a_l \tag{3.12}$$

η οποία ισχύει για $n \geq k$, όπου k κάποιος ακέραιος. Όπως και στην παράγραφο (3.2.2) θα δεχθούμε ότι $k \geq r$.

Είναι προφανές ότι η τιμή του a_n για $n \geq k$ μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά όταν οι τιμές των $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ είναι γνωστές. Αυτές οι τιμές των $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ είναι οι αρχικές συνθήκες.

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της (3.12) με x^n και παίρνοντας το άθροισμα από $n = k$ μέχρι $n = \infty$ έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} \left(a_{n-r}a_0 + a_{n-r-1}a_1 + \ldots + a_0 a_{n-r}\right) x^n$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της συνέλιξης και της ολίσθησης έχουμε

$$\begin{aligned} A\left(x\right) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{k-1}x^{k-1} = x^r \left[A\left(x\right) A\left(x\right) - a_0^2 - \left(a_1 a_0 + a_0 a_1\right) x - \right. \\ \left. \ldots - \left(a_{k-r-1}a_0 + a_{k-r-2}a_1 + \ldots + a_0 a_{k-r-1}\right) x^{k-r-1}\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

Η (3.13) είναι μια αλγεβρική εξίσωση 2ου βαθμού ως προς $A(x)$, η οποία μπορεί να λυθεί. Η $A(x)$ είναι η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση και άρα μπορούμε να βρούμε ποια ακολουθία έχει την $A(x)$ γεννήτρια συνάρτηση.

Παράδειγμα 3.8: Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να βάλουμε παρενθέσεις στην έκφραση

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} + \lambda_n$$

έτσι ώστε μόνο 2 όροι να προστίθενται κάθε φορά.

Λύση. Ας είναι a_i ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να βάλουμε παρενθέσεις σε μια έκφραση με i όρους.

Θεωρούμε τις 2 υποεκφράσεις

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-r} \quad \lambda_{n-r+1} + \lambda_{n-r+2} + \ldots + \lambda_n$$

Άρα υπάρχουν a_{n-r} τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στην πρώτη έκφραση και a_r τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στην δεύτερη έκφραση. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $a_{n-r}a_r$ τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις σε όλη την έκφραση.

Δηλαδή

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}a_1 + a_{n-2}a_2 + \ldots + a_2 a_{n-2} + a_1 a_{n-1} \Rightarrow \\ a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}a_k \quad \text{για } n \geq 2 \end{aligned}$$

Προφανώς $a_1 = 1$.

Θέτω $a_0 = 0$ και η πιο πάνω σχέση μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned} a_n &= a_n a_0 + a_{n-1}a_1 + \ldots + a_1 a_{n-1} + a_0 a_n, n \geq 2 \\ a_n &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας με x^n και αθροίζοντας από $n=2$ έως $n=\infty$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n a_0 + a_{n-1}a_1 + \ldots + a_1 a_{n-1} + a_0 a_n\right) x^n \\
&A\left(x\right) - a_1 x - a_0 = \left[A\left(x\right)\right]^2 - a_0^2 - \left(a_1 a_0 + a_0 a_1\right) x \Rightarrow \\
&\left[A\left(x\right)\right]^2 - A\left(x\right) + x = 0 \Rightarrow \\
&A\left(x\right) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}
\end{aligned}$$

Αν και υπάρχουν δυο λύσεις για την $A(x)$, θα πάρουμε αυτή τη λύση που μας εξασφαλίζει μια ακολουθία θετικών αριθμών.

Είναι γνωστό (αν όχι αποδείξτε το) ότι η συνάρτηση $(1-4x)^{1/2}$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$a_n = -\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Άρα θα επιλέξουμε τη λύση

$$A\left(x\right) = 1/2 - 1/2\sqrt{1-4x}$$

για να εξασφαλίσουμε ακολουθία θετικών αριθμών. Η ακολουθία

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A\left(x\right) = 1/2 - 1/2\sqrt{1-4x}$ (ας το αποδείξει ο αναγνώστης).

Επεκτείνοντας την πιο πάνω περίπτωση μπορούμε να λύσουμε μια μεγαλύτερη κλάση προβλημάτων.

Ας θεωρήσουμε τώρα την εξής σχέση αναδρομής

$$b_n = a_{n-r}b_0 + a_{n-r-1}b_1 + \ldots + a_0 b_{n-r}$$

ή

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-r} a_{n-r-k} b_k$$

η οποία ισχύει για $n \geq k$, όπου k κάποιος ακέραιος, και $k \geq r$.

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη με x^n και αθροίζοντας από $n=k$ μέχρι $n=\infty$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=k}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} \left(a_{n-r}b_0 + a_{n-r-1}b_1 + \ldots + a_0 b_{n-r}\right) x^n \Rightarrow \\
&B\left(x\right) - b_0 - b_1 x - \ldots - b_{k-1}x^{k-1} = \\
&= x^r \left[A\left(x\right)B\left(x\right) - a_0 b_0 - \left(a_1 b_0 + a_0 b_1\right) x - \ldots \right. \\
&\left. - \left(a_{k-r-1}b_0 + a_{k-r-2}b_1 + \ldots + a_0 b_{k-r-1}\right) x^{k-r-1}\right]
\end{aligned}$$

Εάν τώρα η $A(x)$ ή η $B(x)$ είναι γνωστή μαζί με τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες (και αυτές γνωστές), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε είτε την $A(x)$ είτε την $B(x)$.

3.4 Ασκήσεις

3.1 Να λυθούν οι σχέσεις αναδρομής και με τους δύο τρόπους

(α) $a_n + a_{n-1} + 1/4a_{n-2} = 0, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1$

(β) $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2, \quad a_0 = 6,\ a_1 = 7$

(γ) $a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_0 = 1$

(δ) $a_n = 2a_{n-1} + n, \quad a_1 = 1$

(ε) $a_n + 6a_{n-1} + 12a_{n-2} + 8a_{n-3} = 0, \quad a_0 = 0,\ a_1 = -2,\ a_2 = 8$

(στ) $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2^n, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 1$

3.2 Να υπολογιστούν οι πιο κάτω $(n \times n)$ ορίζουσες, με τη βοήθεια των σχέσεων αναδρομής

(α)

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{vmatrix}$$

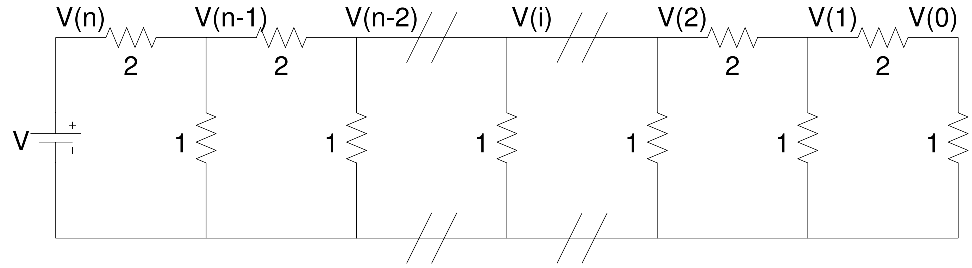
(β)

$$\begin{vmatrix}
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{vmatrix}$$

(γ)

$$\begin{vmatrix}
1+\alpha^2 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\alpha & 1+\alpha^2 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \alpha & 1+\alpha^2 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\alpha^2 & \alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1+\alpha^2
\end{vmatrix}$$

3.3 Στο πιο κάτω κύκλωμα να υπολογιστεί η τάση $V(n)$. Δίνεται $V(0) = 1$.



3.4 Έστω ότι στρίβουμε ένα νόμισμα n φορές. Υπάρχουν προφανώς $2n$ ακολουθίες πιθανών αποτελεσμάτων. Ποιος είναι ο αριθμός των ακολουθιών των αποτελεσμάτων στις οποίες ποτέ δεν εμφανίζεται «κεφαλή» σε διαδοχικά στριψίματα;

3.5 Να λυθούν οι σχέσεις αναδρομής

(α) $T(n) = 8T(n/2) + n^3, \quad T(1) = 1$

(β) $T(n) = T(n/2) + 1, \quad T(1) = 1$

(γ) $T(n) = 2T(n/2) + n, \quad T(1) = 1$

(δ) $T(n) = 3T(n/2) + 2n^{1.5}, \quad T(1) = 1$

(ε) $T(n) = 2T(n/2) + n \log n, \quad T(1) = 1$

(στ) $T(n) = 2T(n/2) + \log n, \quad T(1) = 1$

3.6 Έστω a_r να είναι ο αριθμός των τρόπων να επιλέξουμε (με επαναλήψεις) r γράμματα από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$, με περιορισμό ότι το γράμμα 0 θα επιλεγεί ζυγές φορές. Βρείτε μια σχέση αναδρομής για το πρόβλημα και λύστε τη (ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσετε γεννήτριες συναρτήσεις).

3.7 Ένας πατέρας δίνει στο γιο του n χιλιάρικα. Ο γιος μπορεί να ξοδέψει τα λεφτά με τον εξής τρόπο:

Κάθε μέρα μπορεί να κάνει μια από τις ακόλουθες αγορές

(α) ένα βιβλίο (τιμή: 1000 δρχ.)

(β) 10 δισκέτες 51/4 (τιμή: 2000 δρχ.)

(γ) 1 θήκη (τιμή: 1000 δρχ.)

Ποιος είναι ο αριθμός των δυνατών τρόπων να ξοδέψει τα χρήματα; Είναι εύκολο να λυθεί το πρόβλημα με μια σχέση αναδρομής 2ου βαθμού. Προσπαθήστε όμως να βρείτε και μια σχέση αναδρομής 1ου βαθμού, η οποία να λύνει το πρόβλημα.

3.8 Ποιος είναι ο αριθμός των τρόπων να ανέβουμε n σκαλιά, εάν εμείς κάθε στιγμή ανεβαίνουμε ένα ή δύο σκαλιά;

3.9 Ένα δυαδικό δέντρο n κορυφών είναι είτε άδειο αν $n = 0$ είτε μια τριάδα $(T_i,\ r,\ T_{n-i-1})$ όπου r είναι ένας διακεκριμένος κόμβος (n ρίζα), T_i είναι ένα δυαδικό δέντρο i κορυφών και T_{n-i-1} είναι ένα δυαδικό δέντρο $n-i-1$ κορυφών (αριστερό και δεξιό υποδέντρο). Πόσα δυαδικά δέντρα n κορυφών υπάρχουν;

3.10 Πόσες ακολουθίες μήκους n μπορούν να σχηματιστούν από τα a, b, c, d με τέτοιο τρόπο ώστε τα a και b να μην είναι ποτέ γειτονικά;

3.11 Με πόσους τρόπους a_n, μπορούμε να τοποθετήσουμε παρενθέσεις στο γινόμενο $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ βάζοντας παρένθεση σε κάθε 2 όρους του γινομένου, έτσι ώστε να πολλαπλασιάζονται 2 όροι κάθε φορά;

3.12 Να βρεθεί ο αριθμός d_n των τριγωνισμών ενός κυρτού n-γώνου. Τριγωνισμός είναι ένα σύνολο από $n-3$ διαγώνιες με κάθε δυο από αυτές να μην τέμνονται στο εσωτερικό του n-γώνου.

3.13 (α) Πόσες ακολουθίες n ψηφίων από τα ψηφία 0,1,2,3 έχουν μονό αριθμό από 0;

(β) Να βρεθεί ο αριθμός των ακολουθιών n ψηφίων από τα 0,1, στις οποίες το δείγμα 010 εμφανίζεται στο n ψηφίο.

3.14 Να βρεθεί ο αριθμός των ακολουθιών n ψηφίων από τα 0,1, στις οποίες μια εμφάνιση του δείγματος 010 ακολουθείται από την εμφάνιση του δείγματος 110.

3.15 Να λυθεί η σχέση αναδρομής $a_n = 10a_{n-1}^2, \quad n \geq 1,\ a_0 = 1$

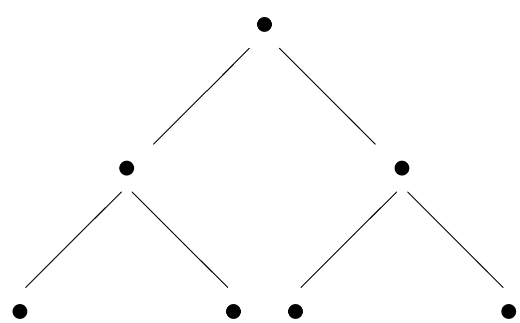
Κεφάλαιο 4

Θεωρία Μέτρησης Polya

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με μια ειδική κατηγορία προβλημάτων μέτρησης. Στα προβλήματα αυτά, ή τουλάχιστον στις απλούστερές τους μορφές, στόχος είναι να μετρήσουμε τα διαφορετικά είδη μιας ορισμένης κατηγορίας δομών, όταν όμως θεωρούμε ως ισοδύναμες δομές που είναι γεωμετρικά συμμετρικές. Τέτοια προβλήματα προσπάθησε να λύσει, με επιτυχία, ο G. Polya[1] όταν θέλησε να μετρήσει τα ισομερή σε διάφορες χημικές αντιδράσεις.

Θα ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ένα πλήρες δυαδικό δένδρο βάθους 2, όπως στο Σχήμα 4.1, και μας ζητείται να βρούμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές του με δύο χρώματα: άσπρο και μαύρο. Η απάντηση είναι τετριμμένη:

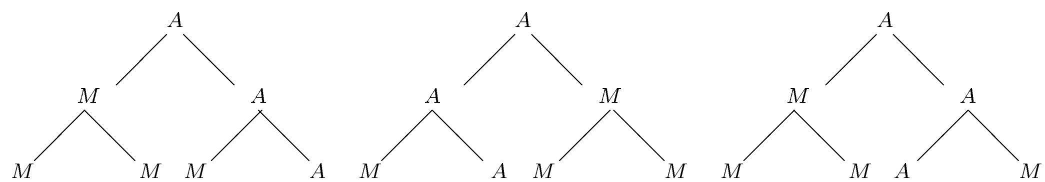


Σχήμα 4.1: Πλήρες δυαδικό δένδρο

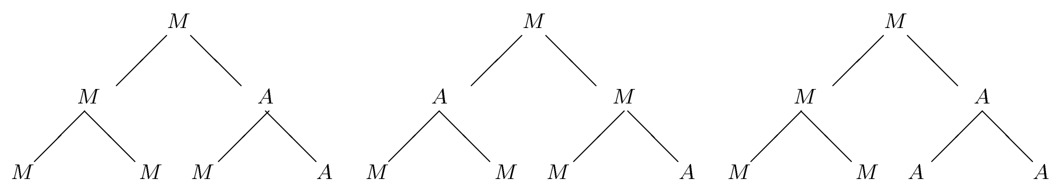
2^7, διότι το δένδρο έχει 7 κορυφές. Αν όμως θελήσουμε να μετρήσουμε τους χρωματισμούς, όταν θεωρήσουμε ότι η αριστερή και η δεξιά κατεύθυνση (του επιπέδου στο οποίο κείται το δένδρο) είναι μη διακεκριμένες, τότε τα πράγματα δυσκολεύουν αρκετά. Κατ' αρχήν όμως ας κάνουμε κατανοητό με παραδείγματα, χωρίς τυπικό ορισμό, τι εννοούμε όταν λέμε ότι η αριστερή και η δεξιά κατεύθυνση είναι μη διακεκριμένες. Στο Σχήμα 4.2 δίνονται μερικοί χρωματισμοί που όλοι

[1] G. Polya - Ούγγρος Μαθηματικός του 20ου αιώνα.

είναι ισοδύναμοι όταν οι δύο κατευθύνσεις του επιπέδου είναι μη διακεκριμένες, επομένως οι χρωματισμοί αυτοί θεωρούνται ταυτόσημοι. Αντίθετα, στο Σχήμα 4.3 δίνονται μερικοί χρωματισμοί που ανά δύο είναι μη ισοδύναμοι, έστω και εάν οι δύο κατευθύνσεις του επιπέδου είναι μη διακεκριμένες, επομένως οι χρωματισμοί αυτοί θεωρούνται ανά δύο διαφορετικοί. Με άλλα λόγια, αυτό που θέλουμε



Σχήμα 4.2: Ισοδύναμοι χρωματισμοί



Σχήμα 4.3: Ανά δύο μη ισοδύναμοι χρωματισμοί

να υπολογίσουμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ο αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας των χρωματισμών των κορυφών του δένδρου ως προς μία σχέση ισοδυναμίας που προκύπτει όταν ταυτίζουμε τη δεξιά με την αριστερή κατεύθυνση στο επίπεδο.

Ας τοποθετήσουμε όμως το πρόβλημα σε ένα πιο γενικό πλαίσιο. Έστω V ένα μη κενό, πεπερασμένο σύνολο (π.χ. το σύνολο των κορυφών του πλήρους δυαδικού δένδρου βάθους 2) και C ένα μη κενό, πεπερασμένο σύνολο χρωμάτων (στο παράδειγμα μας $C = \{M, A\}$). Το σύνολο C μπορεί να θεωρηθεί και ως αλφάβητο, οπότε τα στοιχεία του ονομάζονται γράμματα. Καλούμε χρωματισμό μία οποιαδήποτε συνάρτηση $f : V \to C$.

Έστω ακόμη ένα σύνολο G αντιμεταθέσεων του V. Αν π_1 και π_2 είναι δύο στοιχεία του G, τότε με $\pi_1\pi_2$ συμβολίζουμε τη σύνθεση των δύο αντιμεταθέσεων, δηλαδή την αντιμετάθεση που ορίζεται ως εξής:

$$\pi_1\pi_2(v) = \pi_1(\pi_2(v)), \forall v \in V.$$

Επίσης, με π_1^{-1} συμβολίζουμε την αντίστροφη της π_1, δηλαδή την αντιμετάθεση για την οποία ισχύει:

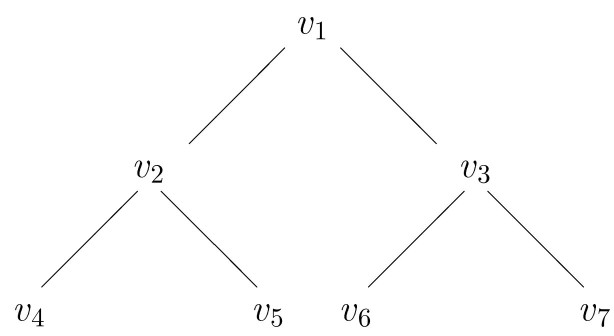
$$\pi_1^{-1}(v) = v' \Leftrightarrow \pi_1(v') = v, \forall v \in V.$$

Τέλος με e συμβολίζουμε την ταυτοτική αντιμετάθεση, δηλαδή την αντιμετάθεση για την οποία ισχύει:

$$e(v) = v, \forall v \in V.$$

Υποθέτουμε σε όλα τα επόμενα ότι το σύνολο G των αντιμεταθέσεων του V αποτελεί *ομάδα* ως προς τη σύνθεση, δηλαδή, περιέχει την ταυτοτική αντιμετάθεση

e και αν $\pi_1, \pi_2 \in G$, τότε $\pi_1\pi_2 \in G$ και επίσης $\pi_1^{-1} \in G$. Διαισθητικά, το G χαρακτηρίζει τις ταυτοποιήσεις που θέλουμε να εισαγάγουμε. Τα στοιχεία του G καλούνται *συμμετρίες*. Είναι προφανές ότι το σύνολο όλων των αντιμεταθέσεων του V αποτελεί ομάδα. Συνήθως στα συγκεκριμένα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε το σύνολο G είναι μία πολύ μικρότερη σε πλήθος υποομάδα της ομάδας όλων των αντιμεταθέσεων. Στο παράδειγμα με το πλήρες δυαδικό δένδρο βάθους 2, αν



Σχήμα 4.4: Αρίθμηση των κορυφών κατά βάθος

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ είναι οι κορυφές αριθμημένες όπως στο Σχήμα 4.4, τότε η G είναι η ελάχιστη (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι σε σύνολα) ομάδα αντιμεταθέσεων που περιέχει τις ακόλουθες αντιμεταθέσεις (βλ. Παράδειγμα 4.1):

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ v_1 & v_3 & v_2 & v_6 & v_7 & v_4 & v_5 \end{pmatrix},$$
$$\pi_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_5 & v_4 & v_6 & v_7 \end{pmatrix}.$$

Στις παραπάνω ισότητες, κάτω από κάθε κορυφή γράφεται η εικόνα της ως προς την αντιμετάθεση. Η ελάχιστη (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι) ομάδα αντιμεταθέσεων που περιέχει κάποιες δεδομένες αντιμεταθέσεις ονομάζεται ομάδα που *παράγεται* από τις δεδομένες αντιμεταθέσεις. Προκύπτει αν συνδυάσουμε επαναληπτικά μέσω της διμερούς πράξης της σύνθεσης τις δεδομένες αντιμεταθέσεις και τις αντίστροφές τους κατά όλους τους δυνατούς τρόπους.

Αν τώρα f είναι ένας χρωματισμός και $\pi \in G$, τότε $\pi(f)$ είναι ένας νέος χρωματισμός που ορίζεται από τον τύπο:

$$\pi(f)(v) = f(\pi(v)), \forall v \in V. \tag{4.1}$$

Διαισθητικά, $\pi(v)$ είναι η κορυφή που αντικαθιστά την v όταν η συμμετρία π *δράσει* στο V. Λέμε ότι η κορυφή $\pi(v)$ είναι η συμμετρική της v. Επίσης $\pi(f)$ είναι ο χρωματισμός που προκύπτει όταν όλες οι κορυφές αντικατασταθούν από τις συμμετρικές τους. Έστω τώρα X ένα σύνολο χρωματισμών που είναι κλειστό ως προς τις δράσεις των στοιχείων του G, δηλαδή αν $f \in X$ και $\pi \in G$, τότε $\pi(f) \in X$. Εισάγουμε στο X την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας:

$$f \equiv_G g \Leftrightarrow (\exists \pi \in G)(\pi(f) = g) \tag{4.2}$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι πρόκειται πράγματι για σχέση ισοδυναμίας. Έστω τώρα X/G το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του X ως προς την $\equiv_G$. Το γενικό πρόβλημα που θα επιλύσουμε είναι να βρεθεί ο πληθάριθμος του X/G, δηλαδή ο αριθμός των μη ισοδύναμων χρωματισμών ως προς την ισοδυναμία που καθορίζεται από τη δράση της ομάδας G πάνω στο X.

4.2 Ιδιότητες Αντιμεταθέσεων

Η παράγραφος αυτή αποτελεί μία παρένθεση για να αναπτύξουμε ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες των αντιμεταθέσεων. Θα εργασθούμε με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε το σύνολο V με οκτώ στοιχεία $\{v_1, v_2, \ldots, v_7, v_8\}$ και την αντιμετάθεση του π:

$$\pi_1 = \left(\begin{array}{cccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ v_4 & v_3 & v_2 & v_6 & v_5 & v_7 & v_1 & v_8 \end{array} \right).$$

Ας σχηματίσουμε μία ακολουθία ξεκινώντας από το πρώτο στοιχείο v_1 του V και γράφοντας στη συνέχεια διαδοχικά τις εικόνες $\pi(v), \pi(\pi(v)), \ldots$ έως ότου ξαναπάρουμε το στοιχείο από όπου ξεκινήσαμε, στο συγκεκριμένο παράδειγμα το v_1. Η ακολουθία που προκύπτει, χωρίς να ξαναγράψουμε το v_1, είναι η (v_1, v_4, v_6, v_7). Η ακολουθία αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως η αντιμετάθεση:

$$\pi' = \left(\begin{array}{cccc} v_1 & v_4 & v_6 & v_7 \\ v_4 & v_6 & v_7 & v_1 \end{array} \right)$$

με πεδίο ορισμού το σύνολο $\{v_1, v_4, v_6, v_7\}$. Αντιμεταθέσεις όπως η π', για τις οποίες η ακολουθία $(v, \pi'(v), \pi'(\pi'(v)), \ldots)$ καλύπτει όλο το πεδίο ορισμού τους για οποιοδήποτε στοιχείο v καλούνται *κυκλικές* αντιμεταθέσεις ή απλώς *κύκλοι*.

Επιστρέφουμε τώρα στην αρχική αντιμετάθεση π και ας θεωρήσουμε το πρώτο στοιχείο του V που δεν καλύφθηκε από τους όρους της ακολουθίας (v_1, v_4, v_6, v_7), δηλαδή το v_2. Ας σχηματίσουμε με τον ίδιο όπως προηγουμένως τρόπο την ακολουθία (v_2, v_3). Επαναλαμβάνοντας τα ίδια για άλλες δύο φορές παίρνουμε τις δύο ακολουθίες (v_5) και (v_8), που έχουν από ένα όρο η κάθε μία. Οι ακολουθίες αυτές αντιστοιχούν επίσης σε κυκλικές αντιμεταθέσεις. Με την παραπάνω διαδικασία λέμε ότι αναλύσαμε την αρχική αντιμετάθεση π σε *γινόμενο κυκλικών αντιμεταθέσεων ξένων μεταξύ τους* και γράφουμε:

$$\pi = (v_1, v_4, v_6, v_7)(v_2, v_3)(v_5)(v_8).$$

Οι κυκλικές αντιμεταθέσεις στο δεξί μέλος του παραπάνω τύπου χαρακτηρίζονται ως ξένες μεταξύ τους διότι τα πεδία ορισμού τους είναι ξένα σύνολα ανά δύο.

Είναι προφανές ότι με την παραπάνω διαδικασία οποιαδήποτε αντιμετάθεση μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ξένων μεταξύ τους κύκλων. Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια τέτοια ανάλυση μπορεί να γίνει κατά μοναδικό τρόπο.

4.3 Τύπος του Burnside

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε και θα αποδείξουμε έναν τύπο για τον πληθάριθμο του συνόλου X/G. Ο τύπος όμως αυτός, γνωστός σαν τύπος του Burnside, δεν είναι πάντοτε εύκολο να εφαρμοσθεί στην πράξη. Γι' αυτό στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε μία συνέπεια του τύπου του Burnside, γνωστή ως Θεώρημα του Polya, που θα επιτρέψει να υπολογίζουμε το $|X/G|$ πιο εύκολα.

Κατ' αρχήν μερικοί ορισμοί και συμβολισμοί. Έστω $f \in X$ ένας χρωματισμός και $\pi \in G$ μία συμμετρία. Ο χρωματισμός f καλείται αναλλοίωτος ως προς την π αν $\pi(f) = f$. Με $I(\pi)$ συμβολίζουμε το ακόλουθο σύνολο:

$$I(\pi) = \{f \in X | \pi(f) = f\} \tag{4.3}$$

και με $J(f)$ το σύνολο

$$J(f) = \{\pi \in G | \pi(f) = f\}. \tag{4.4}$$

Επίσης $[f]$ συμβολίζει την κλάση ισοδυναμίας της f ως προς $\equiv_G$. Ο τύπος του Burnside είναι ο ακόλουθος:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |I(\pi)|. \tag{4.5}$$

Θα δώσουμε τώρα στην απόδειξη του παραπάνω τύπου. Στην αρχή θα αποδείξουμε ότι:

$$\sum_{\pi \in G} |I(\pi)| = \sum_{f \in X} |J(f)|. \tag{4.6}$$

Για την απόδειξη της (4.6) κατασκευάζουμε έναν πίνακα $A = (a_{f\pi}), f \in X, \pi \in G$ που οι γραμμές του αντιστοιχούν σε χρωματισμούς του X και οι στήλες του σε συμμετρίες του G και όπου

$$a_{f\pi} = \begin{cases} 1 \text{ αν } \pi(f) = f, \\ 0 \text{ αν } \pi(f) \neq f. \end{cases}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι και τα δύο μέλη της (4.6) μας δίνουν το άθροισμα όλων των στοιχείων του A. Πράγματι, το αριστερό μέλος της (4.6) προκύπτει αν αθροίσουμε τα στοιχεία κάθε στήλης του A και στη συνέχεια αθροίσουμε τα μερικά αθροίσματα των στηλών (άθροιση κατά στήλες), ενώ το δεξιό μέλος της (4.6) προκύπτει αν αθροίσουμε τα στοιχεία κάθε γραμμής του A και στη συνέχεια αθροίσουμε τα μερικά αθροίσματα των γραμμών (άθροιση κατά γραμμές). Αυτό αποδεικνύει την (4.6).

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\sum_{f \in X} |J(f)| = \sum_{[f] \in X/G} \sum_{g \in [f]} |J(g)|. \tag{4.7}$$

Η σχέση (4.7) προκύπτει απλώς ομαδοποιώντας το άθροισμα του αριστερού της μέλους. Αν τώρα $f, g \in X$, ορίζουμε

$$E(f,g) = \{\pi \in G | \pi(f) = g\}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι αν $f \equiv_G g$ τότε $|J(g)| = |E(f,g)|$. Πράγματι έστω $\pi_0 \in E(f,g)$. (Υπάρχει τέτοια π_0, διότι $f \equiv_G g$). Η απεικόνιση $\pi \to \pi\pi_0$, όπως μπορεί εύκολα να ελεγχθεί, αποτελεί μία 1-1 και επί απεικόνιση από $J(g)$ στο $E(f,g)$. Άρα $|J(g)| = |E(f,g)|$. Από την (4.7) λοιπόν προκύπτει

$$\sum_{f \in X} |J(f)| = \sum_{[f] \in X/G} \sum_{g \in [f]} |E(f,g)|. \tag{4.8}$$

Αλλά όμως

$$G = \bigcup_{g\in[f]} E\,(f,g) \tag{4.9}$$

και επιπλέον αν $g_1 \neq g_2$ τότε

$$E(f,g_1)\bigcap E(f,g_2) = \emptyset. \tag{4.10}$$

Από τις (4.9) και (4.10) έχουμε:

$$|G| = \sum_{g\in[f]} |E\,(f,g)\,|. \tag{4.11}$$

Τέλος από τις (4.8) και (4.11) προκύπτει ότι:

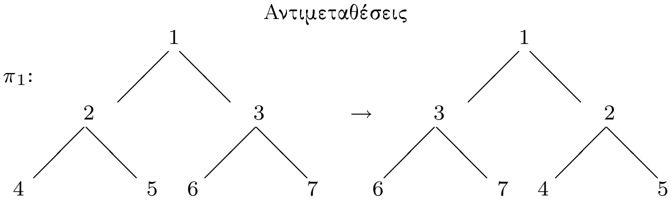
$$\sum_{f\in X} |J\,(f)| = \sum_{[f]\in X/G} |G| = |X/G|\,|G|\,. \tag{4.12}$$

Από την τελευταία σχέση και τη σχέση (4.7) αποδεικνύεται ο τύπος Burnside.

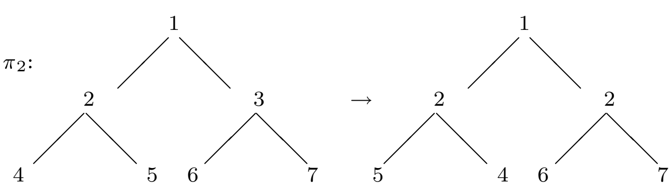
Παράδειγμα 4.1: Με χρήση του τύπου του Burnside να λυθεί το πρόβλημα του χρωματισμού των κόμβων ενός πλήρους δυαδικού δένδρου βάθους 2 (όταν η δεξιά και αριστερή κατεύθυνση είναι μη διακεκριμένες).

Λύση. Η ομάδα των αντιμεταθέσεων G που αντιστοιχεί στη διαισθητική έννοια της μη διακρισης της δεξιάς κατεύθυνσης από την αριστερή παράγεται από τις παρακάτω αντιμεταθέσεις:

Αντιμεταθέσεις | Ανάλυση σε κύκλους

π_1:


(1)(23)(46)(57)

π_2:


(1)(2)(3)(45)(6)(7)

Δηλαδή, όταν οι αντιμεταθέσεις π_1, π_2 και οι αντίστροφές τους συνδυασθούν επαναληπτικά με όλους τους δυνατούς τρόπους, παράγεται η ομάδα G.

Ο Πίνακας 4.3 δίνει στην τελευταία στήλη του για κάθε αντιμετάθεση το πλήθος των χρωματισμών που παραμένουν αναλλοίωτοι ως προς αυτήν. Το πλήθος αυτό το υπολογίζουμε ως εξής: έστω ότι μία αντιμετάθεση, όπως η $\pi_1\pi_2$, η οποία αναλύεται σε γινόμενο τριών ξένων μεταξύ τους κύκλων. Είναι φανερό ότι ένας χρωματισμός f παραμένει αναλλοίωτος από την αντιμετάθεση $\pi_1\pi_2$ αν και μόνον αν οι κορυφές του κάθε κύκλου στην ανάλυση της $\pi_1\pi_2$ παίρνουν το ίδιο χρώμα. Αφού η $\pi_1\pi_2$ έχει τρεις κύκλους και για τις κορυφές του κάθε ενός κύκλου έχουμε δύο επιλογές ενός κοινού χρώματος για να τις χρωματίσουμε έτσι

Αντιμετάθεση	Ανάλυση σε κύκλους	I(π) = αριθμός των χρωματισμένων δένδρων που παραμένουν αναλλοίωτα
e ταυτοτική	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)	$2^7 = 128$
π_1	(1)(23)(46)(57)	$2^4 = 16$
π_2	(1)(2)(3)(45)(6)(7)	$2^6 = 64$
$\pi_1\pi_2\pi_1$	(1)(2)(3)(4)(5)(67)	$2^6 = 64$
$\pi_1\pi_2\pi_1\pi_2$	(1)(2)(3)(45)(67)	$2^5 = 32$
$\pi_1\pi_2$	(1)(23)(4657)	$2^3 = 8$
$\pi_2\pi_1$	(1)(23)(4756)	$2^3 = 8$
$\pi_2\pi_1\pi_2$	(1)(23)(47)(56)	$2^4 = 16$
		$\sum_{\pi\in G} \lvert I(\pi)\rvert = 336$

Πίνακας 4.1: Ομάδα G των αντιμεταθέσεων που παράγεται από τις π_1, π_2.

ώστε να προκύψει χρωματισμός που παραμένει αναλλοίωτος ως προς την $\pi_1\pi_2$, συμπεραίνουμε ότι $|I(\pi_1\pi_2)| = 2^3$. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε το $|I(\pi)|$ για όλα τα $\pi \in G$. Εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο του Burnside παίρνουμε:

$$|X/G| = \frac{1}{8}\sum_{\pi\in G} |I(\pi)| = 42.$$

4.4 Θεώρημα Polya

Στο κεφάλαιο 2 είδαμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γεννήτριες συναρτήσεις μιας μεταβλητής για να υπολογίσουμε τους όρους μίας ακολουθίας $a_k, k = 1, 2, \ldots$ της οποίας οι όροι δίνουν τον πληθάριθμο μιας κλάσης συνδυαστικών αντικειμένων που εξαρτάται από μία παράμετρο, την k. Για να βρούμε το πλήθος κλάσεων που αναφέρονται στο σύνολο χρωματισμών με r χρώματα θα χρησιμοποιήσουμε γεννήτριες συναρτήσεις με r μεταβλητές, δηλαδή θα εισαγάγουμε τόσες διαφορετικές μεταβλητές όσα είναι και τα χρώματα. Είναι βολικό να θεωρήσουμε ότι το σύνολο C των χρωμάτων ταυτίζεται με σύνολο $\{x_1, \ldots, x_r\}$ των μεταβλητών. Ένας φυσικός τρόπος να παραστήσουμε έναν χρωματισμό $f : V = \{v_1, \ldots v_n\} \to C$ είναι το μονώνυμο $x_{f(v_1)}x_{f(v_2)}\ldots x_{f(v_r)}$. Το μονώνυμο αυτό συμβολίζεται με m_f. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι έχει βαθμό $n = |V|$. Έστω ακόμη M το σύνολο όλων των μονωνύμων βαθμού $|V|$ στις μεταβλητές $\{x_1, \ldots, x_r\}$.

Είναι επίσης εύκολο να διαπιστωθεί ότι δύο χρωματισμοί που είναι ισοδύναμοι ως προς μία συμμετρία π, έχουν ίσα μονώνυμα. Δηλαδή αν $\pi(f) = g$ τότε $m_f = m_g$. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει κατ' ανάγκη. Παριστάνουμε με a_m τον αριθμό των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας (ως προς $\equiv_G$) χρωματισμών που έχουν το ίδιο μονώνυμο $m \in M$. Είναι τότε φανερό ότι

$$\sum_{f\in X/G} m_f = \sum_{m\in M} a_m m. \tag{4.13}$$

Αν τώρα θέσουμε $I_m(\pi) = \{f \in X | \pi(f) = f \text{ και } m_f = m\}$ τότε με βάση τον τύπο του Burnside έχουμε

$$a_m = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} |I_m(\pi)|. \tag{4.14}$$

Επομένως από τους τύπους (4.13) και (4.14) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\sum_{f\in X/G} m_f &= \sum_{m\in M} a_m m = \sum_{m\in M}\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|I_m(\pi)|m \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\sum_{m\in M}|I_m(\pi)|\,m. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Αναδιατάσσοντας όμως αθροίσματα προκύπτει ότι:

$$\sum_{m\in M}|I_m(\pi)|\,m = \sum_{f\in I(\pi)} m_f. \tag{4.16}$$

Από (4.15) και (4.16) προκύπτει ότι

$$\sum_{f\in X/G} m_f = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\sum_{f\in I(\pi)} m_f. \tag{4.17}$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε στο άθροισμα $\sum_{f\in I(\pi)} m_f$ μια πιο εύχρηστη μορφή. Έστω ότι αναλύοντας την αντιμετάθεση π σε γινόμενο ξένων μεταξύ τους κύκλων, θα προκύψουν b_i κύκλοι μήκους i, όπου $1\le i\le |V| = n$. Είναι φανερό ότι αν $f\in I(\pi)$, δηλαδή αν $\pi(f) = f$, τότε ο χρωματισμός f παίρνει την ίδια τιμή σε όλα τα στοιχεία ενός κύκλου. Επομένως, επειδή το άθροισμα $\sum_{f\in I(\pi)} m_f$ είναι το άθροισμα των μονωνύμων για όλους τους χρωματισμούς $f\in I(\pi)$, προκύπτει ότι:

$$\sum_{f\in I(\pi)} m_f = (x_1+\ldots+x_r)^{b_1}\left(x_1^2+\ldots+x_r^2\right)^{b_2}\ldots(x_1^n+\ldots+x_r^n)^{b_n}. \tag{4.18}$$

Για να δώσουμε τώρα τον τελικό τύπο, απομένει μόνον να δώσουμε έναν επιπλέον ορισμό που απλώς απλοποιεί το συμβολισμό. Καλούμε δείκτρια συνάρτηση για τη συμμετρία $\pi\in G$ τη συνάρτηση

$$\delta_\pi(y_1,\ldots,y_n) = y_1^{b_1}\ldots y_n^{b_n}.$$

Από τις σχέσεις (4.17) και (4.18) έχουμε τώρα ότι

$$\sum_{f\in I(\pi)} m_f = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\delta_\pi(x_1+\ldots+x_r,\ldots,x_1^n+\ldots+x_r^n). \tag{4.19}$$

Η σχέση (4.19) είναι γνωστή ως θεώρημα του Polya. Αν και θα διαφανεί καλύτερα στα παραδείγματα, παρατηρήστε ότι ο υπολογισμός του δεξιού μέρους του τύπου είναι σχετικά απλός, επειδή η δείκτρια συνάρτηση μιας συμμετρίας υπολογίζεται εύκολα.

Θέτοντας $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 1$ στη σχέση (4.19) παίρνουμε την πιο κάτω σχέση που λύνει το πρόβλημα που θέσαμε στην αρχή του κεφαλαίου.

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\delta_\pi(|V|,\ldots,|V|). \tag{4.20}$$

Παράδειγμα 4.2: Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Polya να λυθεί το Παράδειγμα 4.1 .

Λύση.

Αντιμετάθεση	Κυκλική Αναπαράσταση	Δείκτρια Συνάρτηση
e	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)	y_1^7
π_1	(1)(23)(46)(57)	$y_1\ y_2^3$
π_2	(1)(2)(3)(45)(6)(7)	$y_1^5\ y_2$
$\pi_1\pi_2\pi_1$	(1)(2)(3)(4)(5)(67)	$y_1^5\ y_2$
$\pi_1\pi_2\pi_1\pi_2$	(1)(2)(3)(45)(67)	$y_1^3\ y_2^2$
$\pi_1\pi_2$	(1)(23)(4657)	$y_1\ y_2\ y_4$
$\pi_2\pi_1$	(1)(23)(4756)	$y_1\ y_2\ y_4$
$\pi_2\pi_1\pi_2$	(1)(23)(47)(56)	$y_1\ y_2^3$

Εχουμε λοιπόν ότι

$$\sum_{f\in X/G} m_f = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\delta_\pi(y_1,\ldots,y_7 = \frac{1}{8}\left(y_1^7+2y_1y_2^3+2y_1^5y_2+2y_1y_2y_4+y_1^3y_2^2\right).$$

Τα χρώματα είναι 2: x_1, x_2, άρα

$$\begin{aligned}\sum_{f\in X/G} m_f = \quad & \tfrac{1}{8}\Big[(x_1+x_2)^7+2\,(x_1+x_2)\left(x_1^2+x_2^2\right)^3+2\,(x_1+x_2)^5\left(x_1^2+x_2^2\right)\\ & +2\,(x_1+x_2)+\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^4+x_2^4\right)+(x_1+x_2)^3\left(x_1^2+x_2^2\right)^2\Big].\end{aligned}$$

Αντικαθιστώ $x_1 = x_2 = 1$ και παίρνω

$$\sum_{f\in X/G} m_f = \frac{1}{8}\left(2^7+2\cdot 2\cdot 2^3+2\cdot 2^5\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+2^3\cdot 2^2\right) = 42.$$

Παρατήρηση: Αν μας έβαζαν σαν περιορισμό ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το πρώτο χρώμα τουλάχιστον 4 φορές, τότε θα έπρεπε να αναπτύξουμε το παραπάνω πολυώνυμο των x_1, x_2 και να προσθέσουμε τους συντελεστές των μονωνύμων $x_1^i x_2^j$ με $i \geq 4$, ή αλλιώς να θέσουμε $x_2 = 1$ και να βρούμε το συντελεστή του x_1^4.

4.5 Ασκήσεις

4.1 Να βρεθεί ο αριθμός των διαφορετικών κολιέ που μπορούν να φτιαχτούν από πέντε χάντρες. Να χρησιμοποιηθούν τα χρώματα κίτρινο, μπλε και κόκκινο.

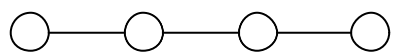
4.2 Θέλουμε να τυπώσουμε όλους τους πενταψήφιους αριθμούς σε φύλλα χαρτιού, με έναν αριθμό σε κάθε φύλλο. Πόσα φύλλα χαρτιού χρειάζονται;

4.3 Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να βάψουμε τις τέσσερις πλευρές α,β,γ,δ μιας κανονικής τριγωνικής πυραμίδας χρησιμοποιώντας δύο χρώματα.

4.4 Να υπολογισθεί κατά πόσους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές ενός κανονικού πενταγώνου με τρία χρώματα έτσι ώστε να χρησιμοποιήσουμε το πρώτο χρώμα τουλάχιστον δύο φορές.

4.5 Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων για να βάψουμε τις οκτώ κορυφές ενός κύβου χρησιμοποιώντας δύο χρώματα.

4.6 Στο σχήμα έχουμε τέσσερις χάντρες σε γραμμική διάταξη. Μπορούμε να



βάψουμε την κάθε χάντρα πράσινη ή κόκκινη. Τα δύο άκρα της διάταξης δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους (δηλαδή η γραμμική διάταξη μπορεί να περιστρέφεται κατά 180° γύρω από το μέσο της). Βρείτε πόσες ξεχωριστές διατάξεις μπορούμε να έχουμε.

4.7 Ένα τραπέζι κυκλικό έχει πέντε θέσεις. Αντιπρόσωποι τριών πολιτικών κομμάτων Α,Β,Γ θα καθίσουν στο τραπέζι (τουλάχιστον ένας από κάθε κόμμα). Πόσοι διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν υπάρχουν; (Δύο τρόποι καθίσματος είναι ισοδύναμοι αν η περιστροφή του ενός δίνει τον άλλο.)

4.8 Οκτώ άνθρωποι σχεδιάζουν να κάνουν διακοπές μαζί. Έχουν υπ' όψη τους τρεις πόλεις. Ανάμεσα στους οκτώ ανθρώπους υπάρχουν πέντε που ανήκουν σε μια οικογένεια και άλλοι τρεις που ανήκουν σε άλλη οικογένεια. Εάν οι άνθρωποι της ίδιας οικογένειας πρέπει να πάνε μαζί, να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούν αυτοί οι οκτώ άνθρωποι να σχεδιάσουν τα ταξίδια τους.

4.9 Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους για να βάψουμε τρεις μπάλες όταν έχουμε τρία χρώματα.

4.10 Να δειχτεί ότι ο ακέραιος $n^8 + 17n^4 + 6n^2$ διαιρείται από τον 24, για κάθε ακέραιο n. Υπόδειξη: Βρείτε τους τρόπους που μπορούμε να χρωματίσουμε τις ακμές ενός κύβου με n χρώματα.

4.11 Να περιγραφεί προσεκτικά η ομάδα συμμετριών του τετραγώνου και να υπολογισθούν οι δείκτριες συναρτήσεις των συμμετριών.

4.12 Διαιρούμε την παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου σε τέσσερις λωρίδες και χρησιμοποιούμε δύο χρώματα για να βάψουμε τις λωρίδες, έτσι ώστε κάθε μια να βαφεί με το ίδιο χρώμα. Πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί υπάρχουν;

4.13 Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων που οι κορυφές ενός τετραγώνου μπορούν να βαφούν με τρία χρώματα x_1, x_2, x_3 με την παραδοχή ότι δύο χρωματισμοί είναι ισοδύναμοι όταν

(α) ο ένας προκύπτει από τον άλλο περιστρέφοντας το τετράγωνο γύρω από κάποιο άξονα ή

(β) ο ένας προκύπτει από τον άλλο αντιμεταθέτοντας τα χρώματα.

4.14 Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε με τέσσερα χρώματα τις κορυφές ενός κανονικού εξάγωνου, το οποίο είναι ελεύθερο να κινείται στο χώρο;

4.15 Υπολογίστε με πόσους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου με τρία χρώματα, έτσι ώστε ακριβώς δύο κορυφές να έχουν το ίδιο χρώμα.

Κεφάλαιο 5

Εγκλεισμός - Αποκλεισμός

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε μια συνολο-θεωρητική μέθοδο, η οποία θα μας επιτρέψει να λύσουμε μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων μέτρησης. Η μέθοδος αυτή λέγεται αρχή του Εγκλεισμού - Αποκλεισμού.

Πριν συζητήσουμε αυτή τη μέθοδο θα δώσουμε μερικούς ορισμούς και συμβολισμούς, οι οποίοι θα μας είναι χρήσιμοι για τη συνέχεια.

Ας είναι S ένα σύνολο με πληθικό αριθμό N, δηλαδή $N = |S|$. Έστω $c_1, c_2, \ldots, c_t$ μια συλλογή από συνθήκες, οι οποίες ικανοποιούνται από μερικά ή όλα τα στοιχεία του S. Είναι δυνατόν μερικά στοιχεία του S να ικανοποιούν περισσότερες από μια συνθήκες, ενώ μπορεί κάποια άλλα στοιχεία να μην ικανοποιούν καμιά συνθήκη. Για κάθε i, $1 \leq i \leq t$, ο αριθμός $N(c_i)$ θα δηλώνει τον αριθμό των στοιχείων του S, που ικανοποιούν τη συνθήκη c_i. Είναι άμεσο συμπέρασμα ότι για κάθε i, $1 \leq i \leq t$, ο αριθμός $N(\overline{c_i}) = N - N(c_i)$ μετρά τον αριθμό των στοιχείων του S, τα οποία δεν ικανοποιούν τη συνθήκη c_i.

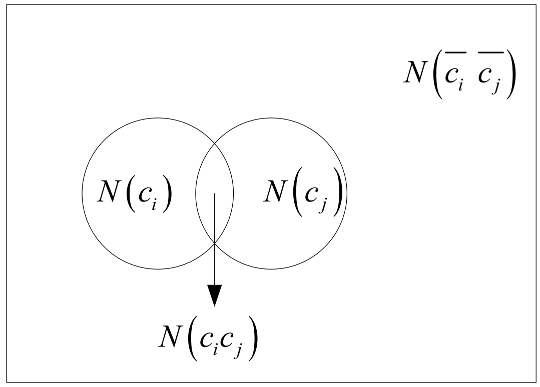
Παράδειγμα 5.1: Σε μια τάξη υπάρχουν 100 μαθητές, οι οποίοι παρακολουθούν το μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά Ι». Από αυτούς οι 30 έχουν το μάθημα σαν επιλογή. Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών που το έχουν υποχρεωτικό;

Λύση. Εδώ η ιδιότητα είναι, ότι κάποιος μαθητής έχει σαν επιλογή το μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά Ι». Άρα ο αριθμός των μαθητών που το έχουν υποχρεωτικό είναι

$$\begin{aligned} N(\text{όχι επιλογή, αλλά υποχρεωτικό}) &= N - N(\text{επιλογή}) \\ N(\text{όχι επιλογή, αλλά υποχρεωτικό}) &= 100 - 30 = 70 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε για 2 συνθήκες μαζί. Για κάθε $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, t\}$, με $i \neq j$ ο αριθμός $N(c_i c_j)$ δηλώνει τον αριθμό των στοιχείων του S, τα οποία ικανοποιούν και τις δυο συνθήκες c_i, c_j (και πιθανώς και κάποιες άλλες). Τώρα για κάθε i, j, με $1 \leq i, j \leq t$ και $i \neq j$, ο αριθμός $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j})$ μετρά τον αριθμό των στοιχείων του S τα οποία δεν ικανοποιούν είτε τη συνθήκη c_i ή την c_j.

Προσοχή ο αριθμός $N(c_i c_j)$ δεν είναι ίδιος με τον αριθμό $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j})$. Χρησιμοποιώντας το διάγραμμα Venn παίρνουμε τη πιο κάτω εικόνα. Από το Σχ. 5.1



Σχήμα 5.1: Διάγραμμα Venn

έχουμε ότι:

$$N\left(\overline{c_i}\ \overline{c_j}\right) = N - \left[N\left(c_i\right) + N\left(c_j\right)\right] + N\left(c_i c_j\right)$$

Είναι εύκολο να πάρουμε τη πιο πάνω σχέση, αν χρησιμοποιήσουμε το Νόμο του de Morgan.

Παράδειγμα 5.2: Σε ένα σχολείο υπάρχουν 100 μαθητές και από αυτούς οι 50 μιλάνε Γαλλικά, οι 40 Λατινικά και 20 μιλάνε και τις 2 γλώσσες. Πόσοι μαθητές δεν μιλάνε καμιά γλώσσα.

Λύση: Οι ιδιότητες είναι 2.

Ιδιότητα F, ο μαθητής μιλά Γαλλικά και η ιδιότητα L, ο μαθητής μιλά Λατινικά.

Τα δεδομένα μας είναι τα πιο κάτω:

$$N = 100,\ N\left(F\right) = 50,\ N\left(L\right) = 40,\ N\left(FL\right) = 20$$

Εδώ το ζητούμενο είναι ο αριθμός $N(\overline{F}\ \overline{L})$. Από το Σχ. 5.1 έχουμε:

$$N\left(\overline{F}\ \overline{L}\right) = N - \left(N\left(F\right)N\left(L\right)\right) + N\left(FL\right) = 30$$

Στην επόμενη παράγραφο θα γενικεύσουμε τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε στο πιο πάνω παράδειγμα.

5.2 Η αρχή του Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

Θα δώσουμε ένα θεώρημα και την απόδειξη του.

Θεώρημα: Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο S, με πληθικό αριθμό $|S| = N$ και τις συνθήκες c_i, $1 \leq i \leq t$, οι οποίες ικανοποιούνται από μερικά στοιχεία του S. Ο αριθμός των στοιχείων του S, τα οποία δεν ικανοποιούν καμία από τις συνθήκες

c_i, $1 \leq i \leq t$, είναι:

$$
\begin{aligned}
\overline{N} &= N\left(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3} \ldots \overline{c_t}\right) \text{ όπου} \\
\overline{N} &= N - \left[N\left(c_1\right) + N\left(c_2\right) + N\left(c_3\right) + \ldots + N\left(c_t\right)\right] \\
&\quad + \left[N\left(c_1c_2\right) + N\left(c_1c_3\right) + \ldots + N\left(c_1c_t\right) + N\left(c_2c_3\right) + \ldots + N\left(c_{t-1}c_t\right)\right] \\
&\quad - \left[N\left(c_1c_2c_3\right) + N\left(c_1c_2c_4\right) + \ldots + N\left(c_1c_2c_t\right) + N\left(c_1c_3c_4\right) + \ldots\right. \\
&\quad \left. + N\left(c_1c_3c_t\right) + \ldots + N\left(c_{t-2}c_{t-1}c_t\right)\right] + \ldots + (-1)^t N\left(c_1c_2c_3 \ldots c_t\right) \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

ή

$$
\begin{aligned}
\overline{N} &= N - \sum_{1 \leq i \leq t} N\left(c_i\right) + \sum_{1 \leq i < j \leq t} N\left(c_ic_j\right) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq t} N\left(c_ic_jc_k\right) + \ldots \\
&\quad + (-1)^t N\left(c_1c_2c_3 \ldots c_t\right) \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

Απόδειξη: Είναι εύκολο να αποδειχθεί το θεώρημα με επαγωγή στο t. Εμείς όμως θα δώσουμε μια συνδυαστική απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in S$, πως αυτό συμμετέχει το ίδιο, είτε 0 ή 1, σε κάθε μέρος της (5.1).

Εάν το x δεν ικανοποιεί καμιά από τις συνθήκες, τότε το x προσμετριέται μια φορά στο N και μια φορά στο N, αλλά καμιά φορά σε κάθε άλλο όρο της (5.1). Επομένως, το x συμμετέχει μια φορά με 1 σε κάθε μέρος της σχέσης.

Η άλλη περίπτωση είναι το x να ικανοποιεί ακριβώς r από τις συνθήκες, με $1 \leq r \leq t$. Σε αυτή τη περίπτωση το x δεν συμμετέχει στο $\overline{N}$. Αλλά στο δεξιό μέρος της (5.1), το x προσμετριέται.

1. Μια φορά στο N.
2. r φορές στο $\sum_{1 \leq i \leq t} N\left(c_i\right)$ (Μια φορά για κάθε μία από τις r συνθήκες).
3. $\binom{r}{2}$ Φορές στο $\sum_{1 \leq i < j \leq t} N\left(c_ic_j\right)$ (Μια φορά για κάθε ζεύγος συνθηκών που επιλέγεται από τις r συνθήκες, τις οποίες ικανοποιεί).
4. $\binom{r}{3}$ φορές στο $\sum_{1 \leq i < j < k \leq t} N\left(c_ic_jc_k\right)$.

   ...

r+1. $\binom{r}{r} = 1$ φορά στο $\sum N\left(c_{i_1}c_{i_2} \ldots c_{i_r}\right)$.

Άρα στο δεξιό μέρος της (5.2), το x προσμετριέται.

$$1 - r + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \ldots + (-1)^r \binom{r}{r} = [1 + (-1)]^r = 0^r = 0 \text{ φορές}$$

Επομένως, τα 2 μέρη της σχέσης μετρούν τα ίδια στοιχεία του S και άρα η ισότητα ικανοποιείται.

Συμπέρασμα: Σύμφωνα με τις υποθέσεις του θεωρήματος, ο αριθμός των στοιχείων του S τα οποία ικανοποιούν τουλάχιστον μια από τις συνθήκες c_i, $1 \leq i \leq t$, είναι:

$$N\left(c_1 \text{ ή } c_2 \text{ ή } c_3 \text{ ή } \ldots \text{ ή } c_t\right) = N - N$$

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα, θα δώσουμε μια συντομογραφία. Ας είναι:

$$
\begin{aligned}
S_0 &= N \\
S_1 &= \left[N\left(c_1\right) + N\left(c_2\right) + N\left(c_3\right) + \ldots + N\left(c_t\right)\right] \\
S_2 &= \left[N\left(c_1c_2\right) + N\left(c_1c_3\right) + \ldots + N\left(c_1c_t\right) + N\left(c_2c_3\right) + \ldots + N\left(c_{t-1}c_t\right)\right]
\end{aligned}
$$

και επομένως γενικά

$$S_k = \sum N\left(c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_k}\right),\ 1 \leq k \leq t$$

Τα αθροίσματα παίρνονται πάνω σε όλες τις επιλογές μεγέθους k από τη συλλογή των t συνθηκών. Άρα το S_k έχει $\binom{t}{k}$ όρους.

Παράδειγμα 5.3: Με πόσους τρόπους μπορούν τα 26 γράμματα του αγγλικού αλφάβητου να αντιμετατεθούν έτσι ώστε κανένα από τα παρακάτω δείγματα να μην εμφανιστούν. Τα δείγματα είναι car, dog, pun, byte.

Λύση: Έστω S το σύνολο όλων των αντιμεταθέσεων των 26 γραμμάτων. Προφανώς $|S| = 26!$. Για κάθε i, $1 \leq i \leq 4$, μια αντιμετάθεση στο S λέμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη c_i, εάν η αντιμετάθεση περιέχει τα δείγματα car ή dog ή pun ή byte.

Είναι:

$$\begin{aligned}
N\,(\text{ περιέχει το δείγμα car }) &= N\left(c_1\right) = 24! \\
N\,(\text{ περιέχει το δείγμα dog }) &= N\left(c_2\right) = 24! \\
N\,(\text{ περιέχει το δείγμα pun }) &= N\left(c_3\right) = 24! \\
N\,(\text{ περιέχει το δείγμα byte }) &= N\left(c_4\right) = 23!
\end{aligned}$$

Ακόμα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&N\left(c_1 c_2\right) = N\left(c_1 c_3\right) = N\left(c_2 c_3\right) = 22! \\
&N\left(c_i c_4\right) = 21!,\ i \neq 4
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
&N\left(c_1 c_2 c_3\right) = 20!, N\left(c_i c_j c_4\right) = 19!,\ 1 \leq i < j < 3 \\
&N\left(c_1 c_2 c_3 c_4\right) = 17!
\end{aligned}$$

Επομένως

$$N\left(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\right) = 26! - [3\,(24!) + 23!] + [3\,(22!) + 3\,(21!)] - [20! + 3\,(19!)] + 17!$$

Παράδειγμα 5.4: Για $n \in Z^+$, ας είναι $\phi(n)$ ο αριθμός των θετικών ακεραίων m, όπου $1 \leq m < n$ και $(m,n) = 1$, δηλαδή m, n είναι σχετικά πρώτοι. Αυτή η συνάρτηση είναι γνωστή σαν συνάρτηση ϕ του *Euler*[1]. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $\phi(2) = 1, \phi(3) = 2, \phi(4) = 2, \phi(5) = 2$ και $\phi(6) = 2$. Για κάθε πρώτο αριθμό p είναι $\phi(p) = p - 1$. Να βρεθεί ένας τύπος που να μας δίνει το $\phi(n)$.

Λύση. Για κάθε $n \leq 2$ μπορούμε να γράψουμε το n σαν $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_t^{e_t}$ όπου $p_1, p_2, \ldots, p_t$ είναι διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί και $e_i \geq 1, 1 \leq i \leq t$. Για ευκολία στις πράξεις θα θεωρήσουμε $t = 4$ και στη συνέχεια είναι εύκολο να γενικευθεί ο τύπος.

Είναι $S = \{l, 2, 3, \ldots, n\}$, $N = |S| = n$ και για $1 \leq i \leq 4$ λέμε ότι $k \in S$ και ικανοποιεί τη συνθήκη c_i, εάν το k είναι διαιρέσιμο από το p_i. Για $1 \leq k \leq n$,

[1] L. Euler Ελβετός Μαθηματικός του 18ου αιώνα από τους μεγαλύτερους στην ιστορία.

$(k, n) = 1$, εάν k δεν είναι διαιρετό από κανένα πρώτο p_i, $1 \le i \le 4$. Επομένως είναι:

$$\phi(n) = N\left(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\right)$$

Για $1 \le i \le 4,\ N(c_i) = n/p_i,\ N(c_i c_j) = n/(p_i p_j),\ 1 \le i < j \le 4.$

Επίσης είναι:

$$N(c_i c_j c_k) = n/\left(p_i p_j p_k\right),\ 1 \le i < j < k \le 4$$

και

$$N(c_1 c_2 c_3 c_4) = n/\left(p_1 p_2 p_3 p_4\right)$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = \\
&= n - \left[\frac{n}{p_1} + \ldots + \frac{n}{p_4}\right] + \left[\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_3 p_4}\right] \\
&\quad - \left[\frac{n}{p_1 p_2 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_2 p_3 p_4}\right] + \frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4} = \\
&= n\left[1 - \left(\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_4}\right) + \left(\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{1}{p_3 p_4}\right)\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{p_1 p_2 p_3} + \ldots + \frac{1}{p_2 p_3 p_4}\right) + \frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}\right] = \\
&= \frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}\left[p_1 p_2 p_3 p_4 - \left(p_2 p_3 p_4 + p_1 p_3 p_4 + p_1 p_2 p_4 + p_1 p_2 p_3\right)\right. \\
&\quad + \left(p_3 p_4 + p_2 p_4 + p_2 p_3 + p_1 p_4 + p_1 p_3 + p_1 p_2\right) \\
&\quad \left. - \left(p_4 + p_3 + p_2 + p_1\right) + 1\right] = \\
&= \frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}\left[\left(p_1 - 1\right)\left(p_2 - 1\right)\left(p_3 - 1\right)\left(p_4 - 1\right)\right] = \\
&= n\left[\frac{p_1 - 1}{p_1}\frac{p_2 - 1}{p_2}\frac{p_3 - 1}{p_3}\frac{p_4 - 1}{p_4}\right] = n\prod_{i=1}^{4}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)
\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να γενικεύσουμε και να καταλήξουμε ότι: $\phi(n) = n\prod\limits_{p/n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$, όπου το γινόμενο παίρνεται πάνω σε όλους τους πρώτους που διαιρούν το n.

Παράδειγμα 5.5: Πόσοι είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διανείμουμε r διακεκριμένα αντικείμενα σε 5 (διακεκριμένα) κουτιά έτσι ώστε ένα τουλάχιστον κουτί να 'ναι άδειο;

Λύση. Ας είναι A_i η ιδιότητα ότι το κουτί i μένει άδειο σε κάποια διανομή ή διανομές. Αυτό που ζητάμε εμείς είναι το $N(A_1$ ή A_2 ή $\ldots$ ή $A_5)$. Αλλά αυτό με βάση το συμπέρασμα είναι:

$$\begin{aligned}
N\left(A_1 \text{ ή } A_2 \text{ ή } \ldots \text{ ή } A_5\right) &= N - \overline{N} = N - N\left(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}\ \overline{A_4}\ \overline{A_5}\right) \\
&= N - \left(N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4\right)
\end{aligned}$$

όπου S_i ο αριθμός των τρόπων να διανείμουμε τα αντικείμενα ώστε τουλάχιστον i στο πλήθος κουτιά άδεια

$$N\left(A_1 \text{ ή } A_2 \text{ ή } \ldots \text{ ή } A_5\right) = \binom{5}{1}4^r - \binom{5}{2}3^r + \binom{5}{3}2^r - \binom{5}{4}1^r$$

5.3 Ασκήσεις

5.1 Πόσες τοποθετήσεις των ψηφίων $0, 1, 2, \ldots, 9$ υπάρχουν στις οποίες το πρώτο ψηφίο να 'ναι μεγαλύτερο από το 1 και το τελευταίο ψηφίο να 'ναι μικρότερο από το 8;

5.2 Πόσοι ακέραιοι μικρότεροι του 70 είναι σχετικά πρώτοι με το 70 (Σχετικά πρώτοι σημαίνει ότι δεν έχουν κοινούς διαιρέτες);

5.3 Πόσες λέξεις n-ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$ υπάρχουν με ένα τουλάχιστον 0, με ένα τουλάχιστον 1 και με ένα τουλάχιστον 2;

5.4 Σε ένα σχολείο υπάρχουν 1.000 μαθητές. Από αυτούς οι 400 μιλάνε Γαλλικά, οι 300 Ιταλικά και 200 μιλάνε Γερμανικά. Εάν υπάρχουν 200 μαθητές που μιλάνε οποιεσδήποτε 2 γλώσσες και 100 μαθητές που μιλάνε και τις 3 γλώσσες, πόσοι είναι οι μαθητές που δεν μιλάνε καμιά γλώσσα;

5.5 Να λυθεί το Παρ. 5.4 στη γενική περίπτωση.

5.6 Να βρεθεί ο αριθμός των θετικών ακεραίων $n, 1 \leq n \leq 100$ και n μη διαιρέσιμος με 2,3 και 5.

5.7 Ένας φοιτητής θέλει να φτιάξει ένα πρόγραμμα για μια χρονική περίοδο 7 ημερών έτσι ώστε κάθε μέρα να μελετά ένα μόνο μάθημα. Τα μαθήματα είναι: μαθηματικά, φυσική, χημεία και οικονομία. Να βρεθεί ο αριθμός αυτών των προγραμμάτων.

5.8 Πόσες διαφορετικές ακέραιες λύσεις υπάρχουν για την εξίσωση

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20,\ 0 \leq x_i \leq 8$$

5.9 Να βρεθεί ο αριθμός των αντιμεταθέσεων των γραμμάτων του λατινικού αλφαβήτου a,b,c,...,x,y,z, στις οποίες δεν εμφανίζονται τα δείγματα spin, game, path και net.

5.10 Έστω τα πεπερασμένα σύνολα A, B με $|A| = m, |B| = n$ και $m \geq n$. Ας είναι $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ και $S =$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \to B$. Προφανώς $N = |S| = n^m$. Για $1 \leq i \leq n$, ας είναι c_i η συνθήκη στο S που ικανοποιείται, όταν η συνάρτηση $f : A \to B$ δεν έχει στο πεδίο τιμών της το b_i. Τότε $N(\overline{c_i})$ είναι ο αριθμός των συναρτήσεων στο S, οι οποίες έχουν στο πεδίο τιμών τους το b_i. Να βρεθεί ο αριθμός N.

6

Βιβλιογραφία

1. Aho A., Hopcroft J., Ullman J., "The design and analysis of computer algorithms", Addison-Wesley 1974.

2. Aho A., Hopcroft J., Ullman J., "Data structures and algorithms", Addison-Wesley 1983.

3. Behzad M., Chartrand G., Lesniak-Foster L., "Graphs and Digraphs", Wadsworth International Group 1981.

4. DeBruijn N., "Polya's Theory of Counting", In Applied Combinatorial Mathematics, ed. Beckenbach, John Wiley 1964.

5. Feller W., "An Introduction to Probability Theory and its Application", Vol. I. 3rd ed., John Willey 1968.

6. Harary F., "Graph Theory", Addison-Wesley 1972.

7. Graham R., Knuth D., Patashnik O., "Concrete Mathematics", Addison-Wesley 1989.

8. Grimaldi R., "Discrete and Combinatorial Mathematics An Applied introduction", Second Edition, Addison-Wesley 1984.

9. Liu C, "Elements of Discrete Mathematics", Second Edition, McGraw-Hill 1985.

10. Liu C, "Introduction to Combinatorial Mathematics", McGraw-Hill 1968.

11. Lovasz L., "Combinatorial Problems and Exercises", North-Holland 1979.

12. Lueker G., "Some Techniques for Solving Recurrences", Computing Surveys, Vol. 12, No. 4, December 1980.

13. J Marshall H., "Combinatorial Theory", Second Edition, John Wiley and Sons, 1986.

14. Polya G., "Kombinatorische Anzahlbestimmungen fur Gruppen, Graphen und Chemishe Verbindungen", Acta Informatica 68, 1937, pp. 145-254.

15. Read R., "Polya's Theorem and its Progeny", Mathematics Magazine 60, No. 5, December 1987, pp. 275-282.

16. Reingold M., Nievergelt J., Deo N., "Combinatorial Algorithms: Theory and Practice", Englewood Cliffs 1977.

17. Riordan J., "An Introduction to Combinatorial Analysis", John Wiley 1958.

18. Ross K.A., C.R.B Wright, "Discrete Mathematics", Prentice Hall, 1985.

19. Tomescu I. and Melter R., "Problems in Combinatorics and Graph Theory", John Wiley and Sons, 1985.

20. Townsend M., "Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and Graph Theory", Benjamin/Cummings Publishiny Company, 1987.

21. Tucker A., "Applied Combinatorics", Second Edition, John Wiley and Sons 1984.

22. "Topics in Combinatorial Mathematics", Mathematical Association of America, 1972.

7

Λίστα Συμβόλων

Σύμβολο	**Σημασία**
n!	Παραγοντικό
$C(n, r)$	Συνδυασμοί n ανά r
$P(n, r)$	Διατάξεις n ανά r
$S(r, n)$	Αριθμοί Stirling 2ου είδους
$s(r, n)$	Αριθμοί Stirling 1ου είδους
X/G	Σύνολο κλάσεων ισοδυναμίας του συνόλου X ως προς την $=_G$
$N(c_i)$	Αριθμός στοιχείων ενός συνόλου S που ικανοποιούν την συνθήκη c_i