

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διδάσκοντες: I. Κολέτσος & Γ. Παπαγεωργίου

02-10-2007/ A

1. α) Να δευχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - 5x + 2 = 0$ έχει μοναδική ρίζα x^* στο $[0,1]$.

β) Για την προσέγγιση της ρίζας x^* δίδεται η γενική επαναληπτική μέθοδος :

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n=0,1,2,\dots \quad \text{με } \Phi(x) = \frac{x^3 + 2}{5}.$$

Να εξετάσετε αν είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση της ακολουθίας $\{x_n\}$ που ορίζεται, στη ρίζα x^* , για κάθε x_0 στο $[0,1]$.

γ) Να υπολογιστούν οι τρεις πρώτες προσεγγίσεις της ρίζας x^* με την μέθοδο της Διχοτόμησης και αρχικό διάστημα $[0,1]$. Πόσο το πολύ απέχει η τρίτη προσέγγιση από την ρίζα x^* ?

δ) Να κατασκευαστεί (αναλυτικά ή γεωμετρικά) η μέθοδος Newton-Raphson, της μορφής

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n), \quad n=0,1,\dots$$

για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης $f(x) = 0$. Να γίνει μία επανάληψη της μεθόδου αυτής για την προσέγγιση της ρίζας x^* με $x_0 = 0.5$. (Μονάδες 3)

2. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2}$. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange στα σημεία $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$. Εν συνεχείᾳ να βρεθεί και μία εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής της μορφής: $|f(x) - p(x)| \leq M, \quad \forall x \in [-1, 1]$.

β) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = (x+y)^2, \quad y(0) = 1.$$

Να εφαρμοστεί η μέθοδος Taylor 2ης τάξης για την προσέγγιση της λύσης στο σημείο $x = 0.2$ με βήμα $h = 0.2$.

Σφάλμα Παρεμβολής $\left\{ f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right\}$. (Μονάδες 2)

3.α) Να περιγράψετε την γενική επαναληπτική μέθοδο για την επίλυση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$. Αναφέρατε τα βασικά κριτήρια σύγκλισης της μεθόδου.

Με βάση το παραπάνω να κατασκευάσετε την επαναληπτική μέθοδο Jacobi για την προσέγγιση της λύσης του γραμμικού συστήματος $Ax = b$. Αναφέρατε τα αντίστοιχα βασικά κριτήρια σύγκλισης της μεθόδου.

β) Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax=b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Να εξεταστεί, αν μπορεί να εφαρμοστεί η επαναληπτική μέθοδος Jacobi για την επίλυση του παραπάνω συστήματος και αν ναι να γίνουν δύο επαναλήψεις με αρχικό διάνυσμα το $(0,0,0)$. Σε πόσες το πολύ επαναλήψεις θα ισχύει η ανισότητα $\|x^{(k)} - x\|_{\infty} < 10^{-5}$, όπου x η ακριβής λύση.

$$\text{(Εκτίμηση Σφαλμ. } (\|x^{(k)} - x\|_{\infty} \leq \frac{\|B\|_{\infty}^k}{1 - \|B\|_{\infty}} \cdot \|x^{(0)} - x^{(0)}\|_{\infty}) \text{ (Μονάδες 2.5)}$$

4. α) Να υπολογιστεί ο απλός τύπος Simpson χωρίς όρο σφάλματος, για την προσέγγιση του ορισμένου ολοκληρώματος:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

και με βάση αυτόν ο αντίστοιχος σύνθετος με όρο σφάλματος. (Δίνεται ο όρος σφάλματος του απλού τύπου $E(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$).

β) Δίνεται το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 x^2 \ln x dx$. Να προσεγγίσετε το ολοκλήρωμα αυτό όταν $h=0.25$, με τον αντίστοιχο σύνθετο Simpson.

Αν ο σύνθετος τύπος Simpson εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του I με σφάλμα το πολύ $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, πόσα σημεία πρέπει να χρησιμοποιηθούν. (Μονάδες 2.5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ