

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διδάσκοντες: Ι. Κολέτσος & Γ. Παπαγεωργίου

02-09-2006

Θέμα 1

Δίνεται η εξίσωση $f(x) = e^x - 1 - 2x = 0$. (1)

Α) Να δειχθεί ότι η (1) έχει μία μοναδική ρίζα ρ στο $[1, 2]$.

Β) Να εξετάσετε αν είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση των γενικών επαναληπτικών μεθόδων:

$$\square \quad x_{k+1} = g_1(x_k) = \frac{e^{x_k} - 1}{2}$$

$$\square \quad x_{k+1} = g_2(x_k) = \ln(1 + 2x_k)$$

για κάθε x_0 στο $[1, 2]$.

Γ) Να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου της Διχοτόμησης με αρχικό διάστημα $[1, 2]$ για να υπολογιστεί μία προσέγγιση της ρίζας ρ της (1). Εν συνεχείᾳ να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson, με αρχική προσέγγιση την δεύτερη προσέγγιση της Διχοτόμησης. (Μονάδες 2.5)

Θέμα 2

Α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2}$ και τα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής *Newton* με διηρημένες διαφορές, που παρεμβάλλει την $f(x)$. Εν συνεχείᾳ να υπολογιστεί μία εκτίμηση του σφάλματος της παρεμβολής της $f(x)$ με πολυώνυμο *Lagrange* της μορφής:

$$|f(x) - p_2^L(x)| \leq M, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Δίνεται ο γενικός τύπος του σφάλματος $\left\{ f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right\}$.

Β) Έστω $f \in C^4[a, b]$ και x_0, x_1, x_2, x_3 διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του $[a, b]$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει $\xi(x) \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

όπου p το πολυώνυμο βαθμού ≤ 3 παρεμβολής *Lagrange* της f στα παραπάνω σημεία. (Ζητείται απόδειξη για τα δεδομένα σημεία και όχι εφαρμογή του γενικού θεωρήματος).

Δίνεται η παρακάτω βοηθητική συνάρτηση:

$$F(t) = f(t) - p(t) - \frac{[f(x) - p(x)]}{\Phi(x)} \Phi(t), \quad \text{όπου } \Phi(t) = \prod_{i=0}^3 (t - x_i) \quad \text{ (Μονάδες 2.5)}$$

Θέμα 3

α) Να υπολογιστεί ο απλός τύπος Τραπεζίου χωρίς όρο σφάλματος, για την προσέγγιση του ορισμένου ολοκλήρωματος και με βάση αυτόν ο αντίστοιχος σύνθετος.

~~β)~~ Δίνεται το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 x \ln x dx$. Να προσεγγίστε το ολοκλήρωμα αυτό όταν $h=0.25$, με τον κατάλληλο σύνθετο τύπο Τραπεζίου. Αν ο σύνθετος τύπος Τραπεζίου εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του I με σφάλμα το πολύ $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, πόσα σημεία πρέπει να χρησιμοποιηθούν. ($E = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$). (Μονάδες 2)

Θέμα 4

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -11 \\ -3 & 10 & 2 \\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 19 \\ 11 \end{pmatrix} \quad (2)$$

α) Να υπολογιστεί ο επαναληπτικός τύπος ή οι επαναληπτικές εξισώσεις της μεθόδου Jacobi και να ελεγχθεί η σύγκλιση της μεθόδου.

β) Να αποδειχθεί η γενική εκτίμηση σφάλματος

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \cdot \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$$

όπου B ο αντίστοιχος επαναληπτικός πίνακας.

γ) Να υπολογιστεί το πλήθος των απαιτούμενων επαναλήψεων της μεθόδου στο σύστημα (2) έτσι ώστε

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_2 \leq 10^{-3} \cdot \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_2 \quad (Μονάδες 3)$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

$$g_1(x) = \frac{1}{2} (e^x - 1)$$

$$g_1'(x) = \frac{1}{2} e^x$$

① ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.45 ΩΡΕΣ ④

$$e^x \not\in \sigma_0[1, 2] \Rightarrow g_1' \text{ στα γραφίσιν ανά } g_1'(2).$$

$$|g_1'(x)| \leq |g_1'(2)| = \frac{e^2}{2} > 1$$

Ζε μπορείτε να αποδείξετε ότι
αφεντικό