ΤΕΜΦΕ $4^{ο}$ Εξάμηνο
Αριθμητική Ανάλυση Ι
$3^{η}$ Εργαστηριακή Άσκηση

1. Μία άλλη μορφή μη γραμμικής προσέγγιση με ελάχιστα τετράγωνα, εκτός της εκθετικής είναι να επιλέξουμε μια συνάρτηση της μορφής:

$$y = b\frac{x}{a+x}$$

Την μορφή αυτή τη μετασχηματίζουμε στη μορφή:

$$\frac{1}{y} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{b}$$

Άρα και αυτήν τη μορφή με κατάλληλο μετασχηματισμό των δεδομένων μπορούμε να τη χειριστούμε με τη θεωρία της γραμμικής προσέγγισης με ελάχιστα τετράγωνα. Στον πίνακα που ακολουθεί εμφανίζονται πειραματικά δεδομένα:

X	7	9	15	25	40	75	100	150
Y	0.29	0.37	0.48	0.65	0.80	0.97	0.99	1.07

Να δημιουργήσετε αρχείο εντολών MATLAB (script) με το οποίο να συγκρίνετε, για τα πειραματικά δεδομένα, τις ακόλουθες τεχνικές προσέγγισης: α) το μοντέλο που περιγράφηκε παραπάνω και ελάχιστα τετράγωνα, β) εκθετική συνάρτηση $y(x) = bx^{a}$ και ελάχιστα τετράγωνα και γ) την εκθετική συνάρτηση $y(x) = be^{ax}$ και ελάχιστα τετράγωνα. Για κάθε περίπτωση να υπολογίζονται οι συντελεστές της μεθόδου προσέγγισης καθώς και το σφάλμα της κάθε μεθόδου $error = \sum_i \left(y_i - p(x_i)\right)^2$ και να εμφανίζεται σε ένα γράφημα το αποτέλεσμα της παρεμβολής καθώς και τα πειραματικά δεδομένα.

2. Είναι δυνατό να εφαρμόσουμε τη θεωρία της προσέγγισης συνόλου δεδομένων με ελαχιστοποίηση ελαχίστων τετραγώνων και για πιο γενικές συναρτήσεις. Μία επιλογή θα μπορούσε να ήταν μία συνάρτηση της μορφής:

$$a\ln(x) + b\cos(x) + c\, e^{x}$$

Εφαρμόζοντας τη θεωρία (δείτε 9.2,9.3 σελ. 413-420 βιβλίου) οδηγούμαστε σε ένα γραμμικό σύστημα με τρεις αγνώστους τα a,b,c. Αφού πρώτα βρείτε τη μορφή που θα έχει το σύστημα των κανονικών εξισώσεων (όπως ονομάζεται), καλείστε να δημιουργήσετε συνάρτηση function MATLAB με όνομα nopolyls το οποίο να λαμβάνει ως είσοδο τα δεδομένα (x,y) σε δύο διανύσματα, να ορίζει τους πίνακες του συστήματος, να λύνει το σύστημα και στη συνέχεια να επιστρέφει ένα διάνυσμα το οποίο να έχει ως στοιχεία τα a,b,c.
Να χρησιμοποιήσετε το nopolyls για την προσέγγιση των παρακάτω δεδομένων:

X	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
Y	0.23	-0.26	-1.10	-0.45	0.27	0.10	-0.29	0.24	0.56	1.00

Δηλαδή, να δημιουργηθεί αρχείο εντολών MATLAB (script) το οποίο αφού καλεί την nopolyls, να εμφανίζει τα a,b,c και σε ένα γράφημα τα σημεία (x,y) και την καμπύλη της συνάρτησης στο διάστημα $[0.1,3.5]$ με βήμα μεταβολής 0.1.

Οδηγίες

- Οι ημερομηνίες παράδοσης της εργασίας θα είναι μέσα στο πρώτο δεκαήμερο του Ιουλίου. Λόγω αντικειμενικών δυσκολιών θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του διδάσκοντα και θα αναρτηθούν στην πόρτα του γραφείου του γύρω τις 26 Ιουνίου.
- Θα πρέπει να παραδοθεί εκτυπωμένη εργασία συρραμμένη (απλά) έτσι ώστε να μπορεί κάποιος να την ξεφυλλίσει. Η εργασία θα πρέπει να έχει **εξώφυλλο** στο οποίο να αναφέρεται ο αύξων αριθμός της, το όνομα και ο αριθμός μητρώου του φοιτητή, τα στοιχεία της σχολής και του μαθήματος, η ημερομηνία παράδοσης και το τμήμα το οποίο παρακολουθεί εργαστήριο. Σε **παράρτημα** θα πρέπει να υπάρχουν εκτυπωμένοι οι κώδικες (τα προγράμματα, scripts και .m αρχεία). Στο κύριο μέρος της εργασίας θα πρέπει να αναπτύσσονται η διαδικασία, τα σχόλια, τα γραφήματα **και μόνο όσα από τα αποτελέσματα είναι απαραίτητα για τα συμπεράσματα**. Όλα αυτά θα πρέπει να έχουν τη συνοχή ενιαίου κειμένου. Εκτός από τις όποιες εκτυπώσεις θα πρέπει να παραδοθούν τα προγράμματα και τα αποτελέσματα τους **σε ηλεκτρονική μορφή (δισκέτα)**. Τα αποτελέσματα μπορείτε να τα αποθηκεύσετε με τη χρήση της diary.
- Αν δεν υπάρχει δυνατότητα παράδοσης της εργασίας σε έντυπη (εκτυπωμένη) μορφή, **γίνεται δεκτή και δισκέτα** που να περιέχει όλα όσα αναφέρονται παραπάνω. Δηλαδή, επιπλέον των προγραμμάτων και αποτελεσμάτων η δισκέτα θα πρέπει να περιέχει και **ένα αρχείο Word** που θα έχει ως περιεχόμενο **όλα όσα θα παραδίδατε σε εκτυπωμένη μορφή**.
- **Τόσο η πληρότητα, τα σχόλια το αν ακολουθήθηκαν οι οδηγίες αλλά και ο τρόπος της παρουσίασης των αποτελεσμάτων της εργασίας** που θα παραδοθεί θα ληφθούν υπ' όψιν κατά την αξιολόγηση.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

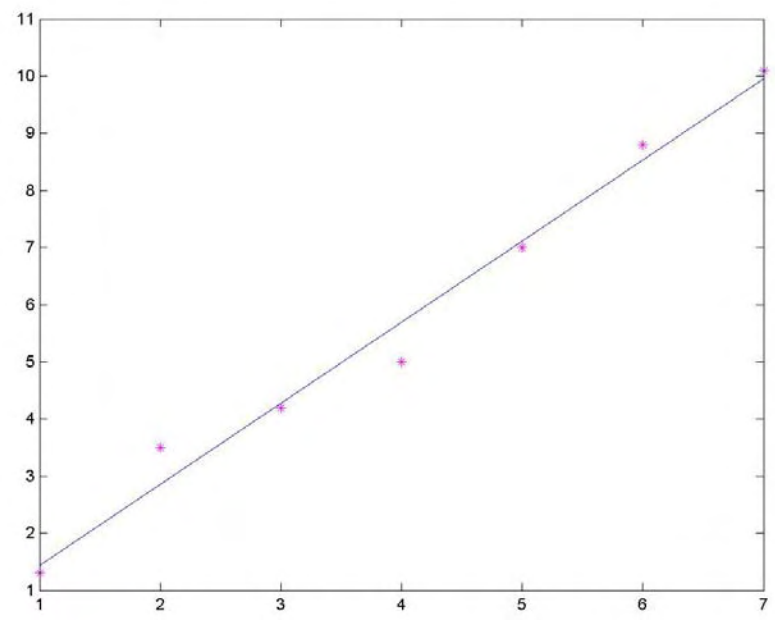
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΙΚΑΡΙΟΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ
Α.Μ. 09101128
4^{ο} ΕΞΑΜΗΝΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
3^{η} ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

ΤΜΗΜΑ: ΠΑ1Α



ΗΜ/ΝΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ
10/6/2003

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Κατασκευάζουμε τη συνάρτηση newnl η οποία υπολογίζει τους συντελεστές $A=\frac{a}{b}$ και $B=\frac{1}{b}$ της εξίσωσης $\frac{1}{y}=A\cdot\frac{1}{x}+B$.

Στη συνέχεια δημιουργούμε το αρχείο εντολών question1.m το οποίο έχει ως έξοδο τα αποτελέσματα που ζητούνται στο πρώτο ερώτημα. Τα δύο αυτά m-Files είναι τα εξής:

newnl.m

```
function p=newnl(x,y)
%p=newnl(x,y)
%    This function uses the least square function in order
%    to form the function y=b*x/(a+x) <=> 1/y=a/b*1/x+1/b
%    The input is two vectors (x,y) which are the result of our experiment and
%    the output is a vector p whose first element is A=a/b and second element is B=1/b.
lx=1./x;
ly=1./y;
p=linls(lx,ly);
```

question1.m

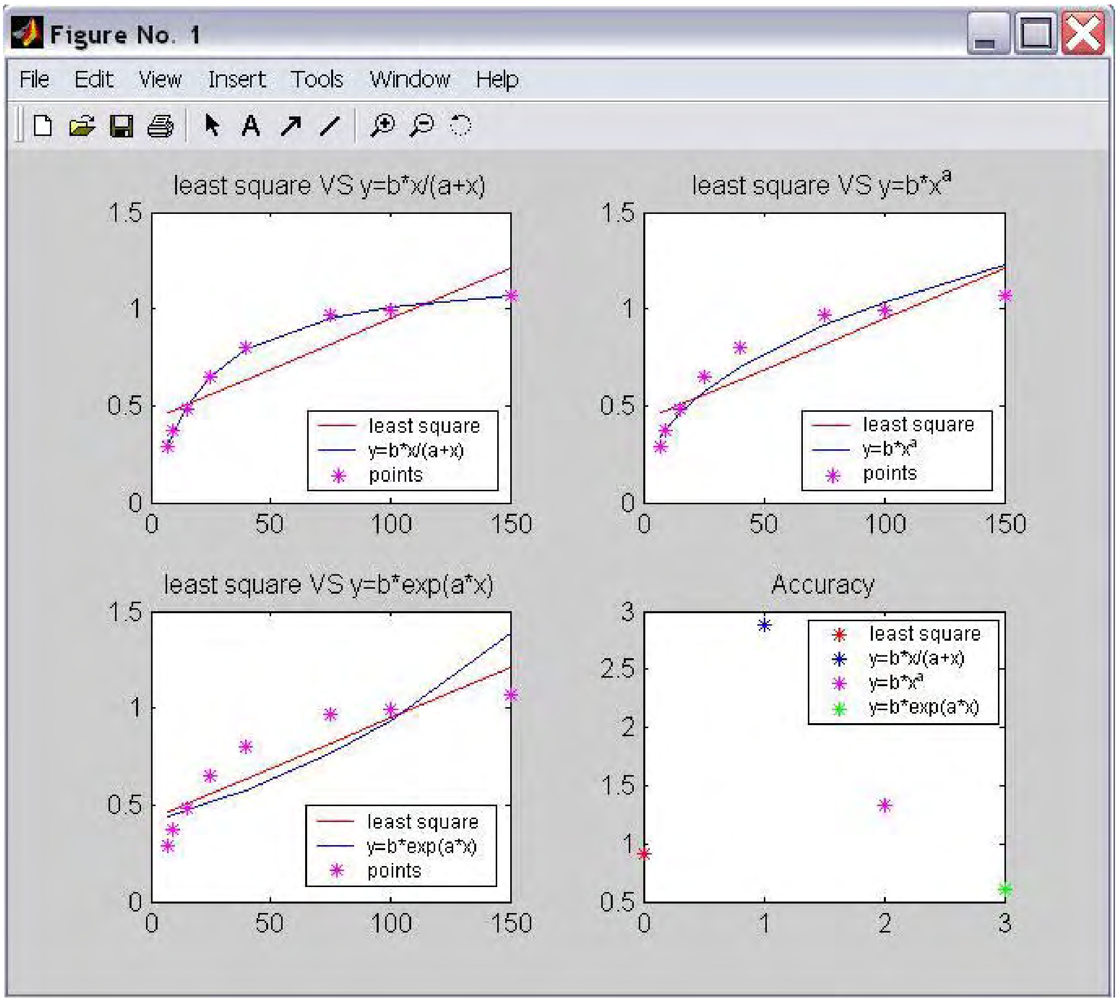
```
clear all;
clf;
x=[7 9 15 25 40 75 100 150]';
given_y=[0.29 0.37 0.48 0.65 0.8 0.97 0.99 1.07]';
%YPOLOGISMOS ME TH ME8ODO ELAXISTWN TETRAGWNWN
p_linls=linls(x,given_y);
a0=p_linls(1)
b0=p_linls(2)
y1=a0*x+b0;
y_linls=polyval(p_linls,x);
%ERWTHMA a
p_newnl=newnl(x,given_y);
al=p_newnl(1)
bl=p_newnl(2)
lx=1./x;
ly=polyval(p_newnl,lx);
y_newnl=1./ly;
subplot(2,2,1);
plot(x,y_linls,'r',x,y_newnl,'b',x,given_y,'m*');
title('least square VS y=b*x/(a+x)');
legend('least square','y=b*x/(a+x)','points',4)
%ERWTHMA b
lx=log(x);
ly=log(given_y);
p2=linls(lx,ly);
a2=p2(1)
b2=exp(p2(2))
y2=b2*x.^a2;
subplot(2,2,2);
plot(x,y_linls,'r',x,y2,'b',x,given_y,'m*');
title('least square VS y=b*x^a');
legend('least square','y=b*x^a','points',4)
%ERWTHMA c
ly=log(given_y);
p3=linls(x,ly);
a3=p3(1)
b3=exp(p3(2))
y3=b3*exp(a3*x);
subplot(2,2,3);
plot(x,y_linls,'r',x,y3,'b',x,given_y,'m*');
title('least square VS y=b*exp(a*x)');
legend('least square','y=b*exp(a*x)','points',4)
%YPOLOGISMOS SFALMATWN
e0=sum((y1-given_y).^2)
e1=sum((y_newnl-given_y).^2)
e2=sum((y2-given_y).^2)
```

	e3=sum((y3-given_y).^2)
	%EMFANISH THS AKRIBEIAS
	subplot(2,2,4);
	plot(0,-log10(e0),'r*',1,-log10(e1),'b*',2,-log10(e2),'m*',3,-log10(e3),'g*');
	legend('least square','y=b*x/(a+x)','y=b*x^a','y=b*exp(a*x)',1)
	title('Accuracy');

Όταν εκτελούμε την εντολή
>>question1
προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

```
a0 =    0.0052
b0 =    0.4264
al =   18.0365
bl =    0.8127
a2 =    0.4224
b2 =    0.1479
a3 =    0.0080
b3 =    0.4198
e0 =    0.1213
e1 =    0.0013
e2 =    0.0472
e3 =    0.2448
```

Όπου με δείκτη 0 είναι οι συντελεστές (a,b) και το σφάλμα (e) της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων, και με δείκτες 1, 2, 3 των μεθόδων $\frac{1}{y} = A \cdot \frac{1}{x} + B$, $y(x) = bx^a$ και $y(x) = be^{ax}$ αντίστοιχα.
Τα αποτελέσματα όπως αυτά φαίνονται στο ζητούμενο γράφημα είναι τα εξής:



Παρατηρούμε λοιπόν ότι καλύτερη προσέγγιση έχουμε με τη συνάρτηση $\frac{1}{y} = A \cdot \frac{1}{x} + B$, όπου e=0.0013.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2

Αν η μορφή προσέγγισης που αναζητούμε είναι η $y(x) = a \cdot \ln(x) + b \cdot \cos(x) + c \cdot e^{x}$ τότε το σφάλμα της είναι $E(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a \cdot \ln(x) + b \cdot \cos(x) + c \cdot e^{x}))^2$

Σύμφωνα με τη θεωρεία προσέγγισης θα πρέπει το σφάλμα να γίνει το ελάχιστο δυνατό. Συνεπώς πρέπει:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} E(a,b,c) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} E(a,b,c) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial c} E(a,b,c) = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a\ln(x_i) - b\cos(x_i) - ce^{x_i})(-\ln(x_i)) = 0 \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a\ln(x_i) - b\cos(x_i) - ce^{x_i})(-\cos(x_i)) = 0 \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - a\ln(x_i) - b\cos(x_i) - ce^{x_i})(-e^{x_i}) = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} a \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln^2(x_i) + b \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \cdot \cos(x_i) + c \cdot \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \cdot \ln(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \ln(x_i) \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \cdot \cos(x_i) + b \cdot \sum_{i=1}^{n} \cos^2(x_i) + c \cdot \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \cdot \cos(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \cos(x_i) \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \cdot e^{x_i} + b \cdot \sum_{i=1}^{n} \cos(x_i) \cdot e^{x_i} + c \cdot \sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot e^{x_i} \end{aligned}\right.$$

Συνεπώς το σύστημα που θα πρέπει να δημιουργεί η nopolyls και να λύνει καλώντας την συνάρτηση gauss είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \ln^2(x_i) & \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \cdot \cos(x_i) & \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \cdot \ln(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \cdot \cos(x_i) & \sum_{i=1}^{n} \cos^2(x_i) & \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \cdot \cos(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \cdot e^{x_i} & \sum_{i=1}^{n} \cos(x_i) \cdot e^{x_i} & \sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \ln(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \cos(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot e^{x_i} \end{bmatrix}$$

Η ζητούμενη λοιπόν συνάρτηση nopolyls και το αρχείο εντολών question2.m που καλεί την nopolyls είναι τα παρακάτω:

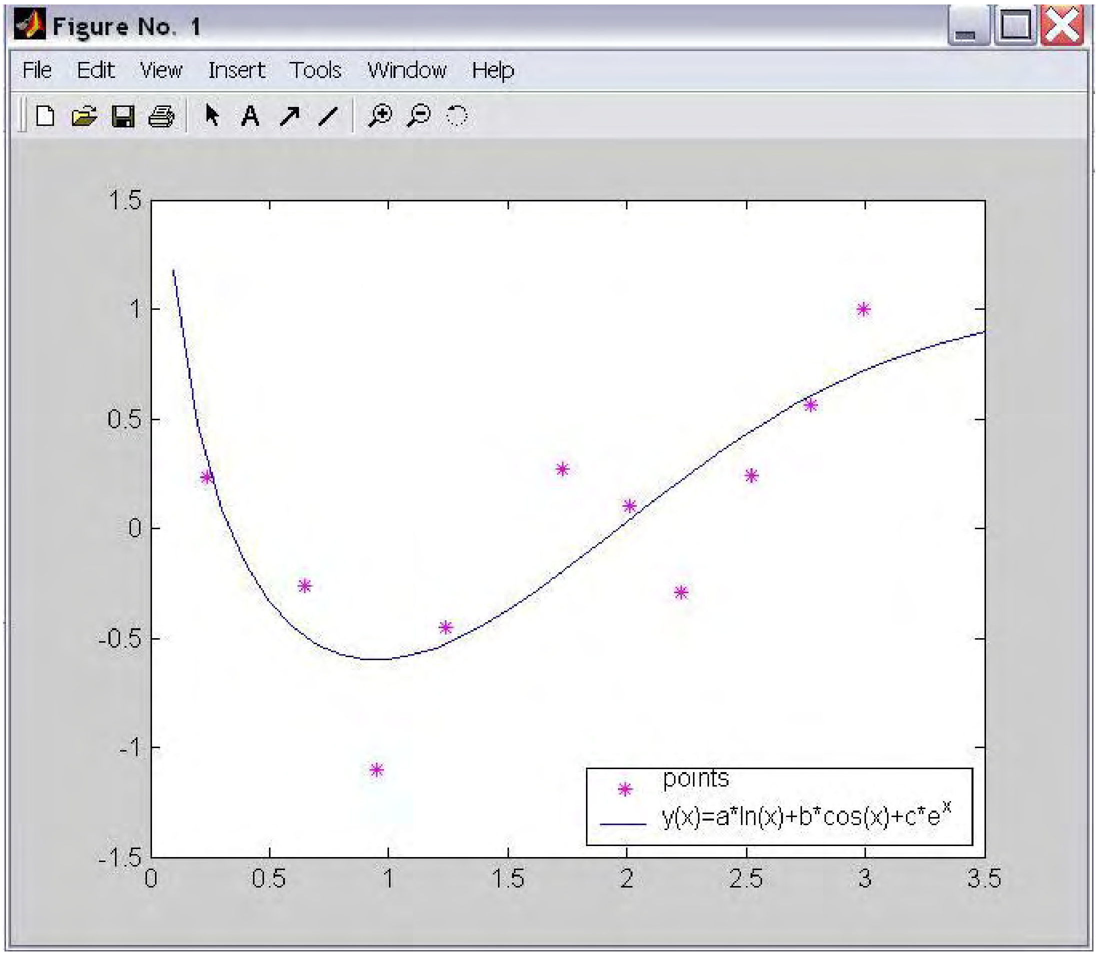
nopolyls.m	***question2.m***

function p=nopolyls(x,y);
%p=nopolyls(x,y)
% THE INPUT OF THS FUNCTION IS 2 VECTORS X,Y
% WHICH ARE THE RESULTS OF OUR EXPERIMENT
% THE OUTPUT (p) IS A VECTOR
% WHERE p(1)=a, p(2)=b, p(3)=c
% AND a,b,c ARE USED IN THE FUNCTION
% y(x)=a*ln(x)+b*cos(x)+c*e^x
if nargin<2,
   error('Wrong input, please type help nopolyls');
end;
sizex=size(x);
sizey=size(y);
if sizex~=sizey,
   error('x and y must be of equal size');
end;
if sizex(1)==1,
   x=x';
end;
if sizey(1)==1,
   y=y';
end;
sln2x=sum(log(x).^2);
slnxcosx=sum(log(x).*cos(x));
sexlnx=sum(exp(x).*log(x));
sylnx=sum(y.*log(x));
scos2x=sum(cos(x).^2);
sexcosx=sum(exp(x).*cos(x));
sycosx=sum(y.*cos(x));
se2x=sum(exp(2*x));
syex=sum(y.*exp(x));
A=[sln2x slnxcosx sexlnx
   slnxcosx scos2x sexcosx
   sexlnx sexcosx se2x];
B=[sylnx sycosx syex]';
p=gauss(A,B);
	clear all;
	clf;
	format long;
	x=[0.24 0.65 0.95 1.24 1.73 2.01 2.23 2.52 2.77 2.99];
	y=[0.23 -0.26 -1.1 -0.45 0.27 0.1 -0.29 0.24 0.56 1];
	p=nopolyls(x,y);
	display('When y(x)=a*ln(x)+b*cos(x)+c*e^x , then')
	a=p(1)
	b=p(2)
	c=p(3)
	x1=[0.1:0.1:3.5];
	y1=a*log(x1)+b*cos(x1)+c*exp(x1);
	plot(x,y,'m*',x1,y1,'b');
	legend('points','y(x)=a*ln(x)+b*cos(x)+c*e^x',4);

Εκτελώντας την εντολή
>>question2
Προκύπτουν τα εξής:

```
When y(x)=a*ln(x)+b*cos(x)+c*e^x , then

a =  -1.04103221690367
b =  -1.26131878469978
c =   0.03073482573946
```



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

M-FILES

Gauss.m

```
function x=gauss(a,b);
%Solving ax=b, where a in R^nxn, x,b in R^n
n=length(b);
for i=1:n-1,
   [amax,imax]=max(abs(a(i:n,i)));
   if amax<eps,
      disp('Singular Matrix');
      break;
   end
   imax=imax+i-1;
   if imax~=i,
      sa=a(imax,i:n);sb=b(imax);
      a(imax,i:n)=a(i,i:n);b(imax)=b(i);
      a(i,i:n)=sa;b(i)=sb;
   end
   b(i+1:n)=b(i+1:n)-b(i)*a(i+1:n,i)/a(i,i);
   a(i+1:n,i+1:n)=a(i+1:n,i+1:n)-a(i+1:n,i)*a(i,i+1:n)/a(i,i);
end;
if abs(a(n,n))<eps,
   disp('Singular Matrix');
   break;
end
%Back Substitution
x(n,1)=b(n)/a(n,n);
for i=n-1:-1:1,
   x(i,1)=(b(i)-a(i,i+1:n)*x(i+1:n,1))/a(i,i);
                                                  end;
```

linls.m

```
function p=linls(x,y);
% linear least squears
n=length(x);
sx=x'*ones(n,1);
sy=y'*ones(n,1);
sx2=(x.^2)'*ones(n,1);
sxy=(x.*y)'*ones(n,1);
par=n*sx2-sx^2;
a=(n*sxy-sx*sy)/par;
b=(sx2*sy-sxy*sx)/par;
p=[a;b];
```

newnl.m

```
function p=newnl(x,y)
%p=newnl(x,y)
%   This function uses the least square function in order
%   to form the function y=b*x/(a+x) <=> 1/y=a/b*1/x+1/b
%   The input is two vectors (x,y) which are the result of our experiment and
%   the output is a vector p whose first element is A=a/b and second element is B=1/b.
lx=1./x;
ly=1./y;
p=linls(lx,ly);
```

nopolyls.m

```
function p=nopolyls(x,y);
%p=nopolyls(x,y)
%   THE INPUT OF THS FUNCTION IS 2 VECTORS X,Y
%   WHICH ARE THE RESULTS OF OUR EXPERIMENT
%   THE OUTPUT (p) IS A VECTOR
%   WHERE p(1)=a, p(2)=b, p(3)=c
%   AND a,b,c ARE USED IN THE FUNCTION
%   y(x)=a*ln(x)+b*cos(x)+c*e^x
if nargin<2,
    error('Wrong input, please type help nopolyls');
end;
sizex=size(x);
sizey=size(y);
if sizex~=sizey,
    error('x and y must be of equal size');
end;
if sizex(1)==1,
    x=x';
end;
if sizey(1)==1,
    y=y';
end;
sln2x=sum(log(x).^2);
slnxcosx=sum(log(x).*cos(x));
sexlnx=sum(exp(x).*log(x));
sylnx=sum(y.*log(x));
scos2x=sum(cos(x).^2);
sexcosx=sum(exp(x).*cos(x));
sycosx=sum(y.*cos(x));
se2x=sum(exp(2*x));
syex=sum(y.*exp(x));
A=[sln2x slnxcosx sexlnx
    slnxcosx scos2x sexcosx
    sexlnx sexcosx se2x];
B=[sylnx sycosx syex]';
p=gauss(A,B);
```

Scripts

question1.m

```
clear all;
clf;
x=[7 9 15 25 40 75 100 150]';
given_y=[0.29 0.37 0.48 0.65 0.8 0.97 0.99 1.07]';
%YPOLOGISMOS ME TH ME8ODO ELAXISTWN TETRAGWNWN
p_linls=linls(x,given_y);
a0=p_linls(1)
b0=p_linls(2)
y1=a0*x+b0;
y_linls=polyval(p_linls,x);
%ERWTHMA a
p_newnl=newnl(x,given_y);
al=p_newnl(1)
bl=p_newnl(2)
lx=1./x;
ly=polyval(p_newnl,lx);
y_newnl=1./ly;
subplot(2,2,1);
plot(x,y_linls,'r',x,y_newnl,'b',x,given_y,'m*');
title('least square VS y=b*x/(a+x)');
legend('least square','y=b*x/(a+x)','points',4)
%ERWTHMA b
lx=log(x);
ly=log(given_y);
p2=linls(lx,ly);
a2=p2(1)
b2=exp(p2(2))
y2=b2*x.^a2;
subplot(2,2,2);
plot(x,y_linls,'r',x,y2,'b',x,given_y,'m*');
title('least square VS y=b*x^a');
legend('least square','y=b*x^a','points',4)
%ERWTHMA c
ly=log(given_y);
p3=linls(x,ly);
a3=p3(1)
b3=exp(p3(2))
y3=b3*exp(a3*x);
subplot(2,2,3);
plot(x,y_linls,'r',x,y3,'b',x,given_y,'m*');
title('least square VS y=b*exp(a*x)');
legend('least square','y=b*exp(a*x)','points',4)
%YPOLOGISMOS SFALMATWN
e0=sum((y1-given_y).^2)
e1=sum((y_newnl-given_y).^2)
e2=sum((y2-given_y).^2)
e3=sum((y3-given_y).^2)
%EMFANISH THS AKRIBEIAS
subplot(2,2,4);
plot(0,-log10(e0),'r*',1,-log10(e1),'b*',2,-log10(e2),'m*',3,-log10(e3),'g*');
```

```
legend('least square','y=b*x/(a+x)','y=b*x^a','y=b*exp(a*x)',1)
title('Accuracy');
```

question2.m

```
clear all;
clf;
format long;
x=[0.24 0.65 0.95 1.24 1.73 2.01 2.23 2.52 2.77 2.99];
y=[0.23 -0.26 -1.1 -0.45 0.27 0.1 -0.29 0.24 0.56 1];
p=nopolyls(x,y);
display('When y(x)=a*ln(x)+b*cos(x)+c*e^x , then')
a=p(1)
b=p(2)
c=p(3)
x1=[0.1:0.1:3.5];
y1=a*log(x1)+b*cos(x1)+c*exp(x1);
plot(x,y,'m*',x1,y1,'b');
legend('points','y(x)=a*ln(x)+b*cos(x)+c*e^x',4);
```

DIARIES

question1.txt

question1

a0 =

    0.0052

b0 =

    0.4264

al =

   18.0365

bl =

    0.8127

a2 =

    0.4224

b2 =

    0.1479

a3 =

    0.0080

b3 =

    0.4198

e0 =

    0.1213

e1 =

0.0013

e2 =

0.0472

e3 =

0.2448

diary off

<u>questionb2.txt</u>

question2

ans =

When y(x)=a*ln(x)+b*cos(x)+c*e^x , then

a =

-1.04103221690367

b =

-1.26131878469978

c =

0.03073482573946

diary off