ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2007

Αναλυτική Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

$1^{\text{ο}}$ Φυλλάδιο Ασκήσεων (ΠΙΝΑΚΕΣ)

1. Έστω δύο συμμετρικοί πίνακες $A, B \in \Pi_\nu$. Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας AB είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $AB = BA$.

2. Να υπολογιστούν οι πίνακες A^ν, $\nu \in IN$ όπου $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Αν $A, B \in \Pi_\nu$, να αποδειχθεί ότι $tr(AB) = tr(BA)$.

4. Αν $A \in \Pi_\nu$ τέτοιος ώστε $tr(AA^*) = 0$, να αποδειχθεί ότι $A = O$.

5. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν πίνακες $A, B \in \Pi_\nu$, τέτοιοι ώστε $AB - BA = I_\nu$.

6. Αν $A^\nu = 0$ για κάποιο $\nu \in IN$ (A: μηδενοδύναμος), να αποδειχθεί ότι

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{\nu-1}.$$

7. Έστω $A \in \Pi_\nu$ τέτοιος ώστε $(A + 3I)^2 = O$. Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να γραφεί ο A^{-1} με την βοήθεια δυνάμεων του A. Να αποδειχθεί επίσης ότι και ο πίνακας $A + 2I$ είναι αντιστρέψιμος.

8. Αν οι πίνακες $A, B \in \Pi_\nu$ ικανοποιούν τις σχέσεις $A^2 = A$, $B^2 = B$ και $(A + B)^2 = A + B$, να αποδειχθεί ότι $AB = BA = O$.