Ακέραιοι και Ρητοί

Έχοντας ολοκληρώσει την θεμελίωση των φυσικών αριθμών, ακολουθούν τα δύο επόμενα βήματα που είναι οι ακέραιοι και οι ρητοί. Το πέρασμα από τους φυσικούς στους ακεραίους και εν συνεχεία στους ρητούς είναι φυσιολογικό. Θα παραθέσουμε δύο εναλλακτικούς ορισμούς για τα δύο συστήματα. Στο πρώτο μέρος οι ορισμοί είναι πιο αναμενόμενοι. Εν τούτοις υπάρχουν κάποιες ασάφειες, ειδικότερα στον ορισμό των ρητών. Στο δεύτερο μέρος οι ορισμοί στηρίζονται στην έννοια της σχέσης ισοδυναμίας και από άποψη μαθηματικής αυστηρότητας είναι σαφώς πιο ακριβείς. Εν τούτοις η κατ' αρχήν επαφή με αυτούς μπορεί να δημιουργήσει απλοϊκές αντιρρήσεις και αμφιβολίες.

1. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των Ακεραίων

Για να ορίζουμε το σύνολο $\mathbb{Z}$ θα εισάγουμε ένα νέο σύνολο το $-\mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής

$$-\mathbb{N} = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το $-\mathbb{N}$ αποτελείται από κάποια νέα σύμβολα που ορίζονται με χρήση των συμβόλων των φυσικών αριθμών. Το σύνολο

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

όπου "0" είναι επίσης ένα νέο σύμβολο. Παρατηρούμε καταρχάς ότι το $\mathbb{N}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ και στο επόμενο βήμα θα επεκτείνουμε τις πράξεις και τη διάταξη του $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{Z}$, ορίζοντας την πρόσθεση "$+$", τον πολλαπλασιασμό "$\cdot$" και τη διάταξη "$<$". Η επέκταση των πράξεων γίνεται με τη βοήθεια των πράξεων που έχουμε ήδη στο $\mathbb{N}$ και το ίδιο ισχύει για τη διάταξη. Στους ακόλουθους ορισμούς θα χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα $+_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}}, <_{\mathbb{N}}$ για τις πράξεις και τη διάταξη στο $\mathbb{N}$ ώστε να μην δημιουργηθεί σύγχυση με τις αντίστοιχες του $\mathbb{Z}$.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

(i) Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m + 0 = m$.
(ii) Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $n + m = n +_{\mathbb{N}} m$.
(iii) Για κάθε $-m, -n \in -\mathbb{N}$, $(-n) + (-m) = -(n +_{\mathbb{N}} m)$
(iv) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $-n \in -\mathbb{N}$ θα ορίζουμε το $m + (-n)$ διακρίνοντας τις ακόλουθες περιπτώσεις:
  α) Αν $n = m$, τότε $m + (-n) = 0$.
  β) Αν $m >_{\mathbb{N}} n$, τότε από τις ιδιότητες της διάταξης των φυσικών αριθμών υπάρχει μοναδικό $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $m = n +_{\mathbb{N}} k$ και ορίζουμε $m + (-n) = k$.
  γ) Αν $m <_{\mathbb{N}} n$, τότε υπάρχει μοναδικό $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n = m +_{\mathbb{N}} k$ και ορίζουμε $m + (-n) = -k$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

(i) Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m \cdot 1 = m$.
(ii) Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m \cdot 0 = 0$.
(iii) Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $m \cdot n = m \cdot_{\mathbb{N}} n$.
(iv) Για κάθε $-m, -n \in -\mathbb{N}$, $(-m) \cdot (-n) = m \cdot_{\mathbb{N}} n$.
(v) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $-n \in -\mathbb{N}$, $m \cdot (-n) = -(m \cdot_{\mathbb{N}} n)$.

ΔΙΑΤΑΞΗ

(i) Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$ αν και μόνον αν $n <_{\mathbb{N}} m$.
(ii) Για κάθε $-m, -n \in -\mathbb{N}$, $(-m) < (-n)$ αν και μόνον αν $n <_{\mathbb{N}} m$.

(iii) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $-n \in -\mathbb{N}$, $-n < m$.

(iv) $-1 < 0 < 1$.

Από τους ορισμούς των πράξεων και της διάταξης είναι εύκολη η διαπίστωση των ακόλουθων ιδιοτήτων.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ

1 Το στοιχείο 0 αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης στο $\mathbb{Z}$, δηλαδή για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m + 0 = 0 + m = m$.

2 Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ υπάρχει ο αντίθετός του $-m$ ώστε $m + (-m) = 0$. (Πράγματι αν $m \in \mathbb{N}$, τότε ο $-m$ έχει ορισθεί. Αν $m \in -\mathbb{N}$ με $m = -n$, τότε $-m = n$.)

3 Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$, $n + m = m + n$ (αντιμεταθετική).

4 Για κάθε $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $n + (n + k) = (n + m) + k$ (προσεταιριστική).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

1 Το στοιχείο 1 αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{Z}$, δηλαδή για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$.

2 Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \cdot m = m \cdot n$ (αντιμεταθετική).

3 Για κάθε $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $n \cdot (n \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$ (προσεταιριστική).

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Για κάθε $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $k \cdot (n + m) = k \cdot m + k \cdot m$ (επιμεριστική).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

1 Η διάταξη " $<$ " στο $\mathbb{Z}$ είναι ολική διάταξη.

1 Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$, $n < m$ αν και μόνο αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $m = n + k$.

2 Για κάθε $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $n < m$ αν και μόνο αν $n + k < m + k$.

3 Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$ και $k \in \mathbb{N}$, $n < m$ αν και μόνο αν $n \cdot k < m \cdot k$.

4 Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$ και $k \in -\mathbb{N}$, $n < m$ αν και μόνο αν $n \cdot k > m \cdot k$.

Ορισμος 0.1. Έστω $(X, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq X$. Ένα $y \in X$ καλείται άνω φράγμα (αντίστοιχα κάτω φράγμα) του A αν για κάθε $x \in A$ το $x \leq y$ (αντίστοιχα $x \geq y$). Ένα $y \in A$ καλείται μέγιστο (αντίστοιχα ελάχιστο) στοιχειο του A αν για κάθε $x \in A$ το $x \leq y$ (αντίστοιχα $x \geq y$).

Προταση 0.2. *Κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει μέγιστο.*

Αποδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό και άνω φραγμένο. Έστω B το σύνολο όλων των άνω φραγμάτων του A. Εφόσον το A άνω φραγμένο έπεται ότι B είναι μη κενό και συνεπώς λόγω της καλής διάταξης του $\mathbb{N}$ το B έχει ελάχιστο στοιχείο n_0. Για να δείξουμε ότι το n_0 αποτελεί μέγιστο στοιχείο για το A αρκεί να δείξουμε ότι $n_0 \in A$. Υποθέτουμε ότι $n_0 \notin A$. Τότε για κάθε $n \in A$, $n <_{\mathbb{N}} n_0$. Επόμένως για κάθε $n \in A$, $n \leq_{\mathbb{N}} n_0 - 1$. Τότε όμως $n_0 - 1 \in B$ που είναι άτοπο καθώς $n_0 - 1 <_{\mathbb{N}} n_0$ και n_0 το ελάχιστο στοιχείο του B. □

Προταση 0.3. *Ένα $A \subset \mathbb{Z}$ έχει ελάχιστο στοιχείο αν και μόνο αν το $-A = \{-n : n \in A\}$ έχει μέγιστο και μάλιστα ισχύει $\min(A) = -\max(-A)$.*

Αποδειξη. Έστω n_0 το ελάχιστο στοιχείο του A. Τότε το $-n_0 \in -A$. Αρκει να δείξουμε ότι ο n_0 αποτελεί άνω φράγμα του $-A$. Πράγματι, για κάθε $l = -k \in -A$ το $k \in A$ και $k \geq n_0$. Επομένως το $l = -k \leq -n_0$. Ομοίως αποδεικνύεται και η αντίστροφη φορά. □

Θεωρημα 0.4. *Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο, (αντοίστιχα κάτω φραγμένο) υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει μέγιστο (αντοίστιχα ελάχιστο).*

Αποδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{Z}$ μη κενό και άνω φραγμένο. Αν $A \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$, τότε το $A \cap \mathbb{N}$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$, άρα από την Πρόταση 0.5 θα έχει μέγιστο, το οποίο θα είναι και μέγιστο του A. Αν το $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$ τότε το $A \subseteq -\mathbb{N} \cup \{0\}$. Αν το $0 \in A$ τότε αποτελεί και μέγιστο για το A. Αλλιώς το $A \subseteq -\mathbb{N}$ και επομένως το $-A$ μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Από την καλή διάταξη του $\mathbb{N}$ έπεται ότι το $-A$ έχει ελάχιστο και από Πρόταση 0.3 το A έχει μέγιστο. $\square$

2. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των Ρητών

Οι ρητοί προκύπτουν από τους ακεραίους κατά φυσιολογικό τρόπο. Κατ' αρχάς ορίζουμε το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών. Το $\mathbb{Q}$ ορίζεται σαν ένα σύνολο νέων συμβόλων ως εξής:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ και } q \in \mathbb{N} \right\}$$

Το $\frac{p}{q}$ είναι ένα νέο σύμβολο και όταν θα ορίσουμε τις πράξεις θα αναπαριστά τον αντίτοιχο ρητό όπως είναι αναμενόμενο να συμβεί. Μια ιδιαιτερότητα του $\mathbb{Q}$ είναι η ισότητα των στοιχείων του. Συνήθως όταν ορίζουμε ένα σύνολο προνοούμε τα στοιχεία που συμβολίζονται με διαφορετικά σύμβολα να είναι διάφορα μεταξύ τους. Αυτό δε συμβαίνει στο $\mathbb{Q}$ όπως το περιγράφουμε ανωτέρω. Έτσι υπάρχουν στοιχεία που ενώ είναι ίσα μεταξύ τους τους αντιστοιχούν διαφορετικά σύμβολα. Αυτό βεβαίως ισχύει και στους ρητούς όπως τους ορίζει κάποιος στις προπανεπιστημιακές σπουδές. (π.χ οι ρητοί $\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{4}$ είναι ίσοι.) Επίσης πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στο $\mathbb{Q}$ δεν έχουμε συμπεριλάβει όλους τους $\frac{p}{q}$ με $p, q \in \mathbb{Z}$ και $q \neq 0$. Ο λόγος είναι ότι αυτοί που έχουμε συμπεριλάβει επαρκούν για να περιγράψουμε το σύνολο των ρητών και επίσης μας επιτρέπουν να ορίσουμε τη διάταξη με πιο κομψό τρόπο. Στο $\mathbb{Q}$ η ισότητα, η διάταξη και οι πράξεις ορίζονται ως εξής:

ΙΣΟΤΗΤΑ

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1$$

ΔΙΑΤΑΞΗ

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 q_2 < p_2 q_1$$

ΠΡΟΘΕΣΗ

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$$

Ασκηση 0.1. Δείξτε ότι αν $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{Q}$ ώστε $r_1 = r_3$ και $r_2 = r_4$, τότε

α. $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$.
β. $r_1 \cdot r_2 = r_3 \cdot r_4$.
γ. $r_1 < r_2 \Leftrightarrow r_3 < r_4$.

Οι ιδιότητες των ακεραίων συνεπάγονται τις ακόλουθες ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης στο $\mathbb{Q}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ

(1) Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}$, $r + s = s + r$.
(2) Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}$, $r + (s + t) = (r + s) + t$.
(3) Υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in \mathbb{Q}$ ώστε για κάθε $r \in \mathbb{Q}$, $0 + r = r$. (Το 0 αναπαρίσταται από οποιοδήποτε $\frac{0}{q}$ με $q \in \mathbb{N}$)
(4) Για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ υπάρχει ο αντίθετός του $-r \in \mathbb{Q}$ ώστε $r + (-r) = 0$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

(5) Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}$, $r \cdot s = s \cdot r$.

(6) Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}$, $r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$.

(7) Υπάρχει ένα στοιχείο $1 \in \mathbb{Q}$ ώστε για κάθε $r \in \mathbb{Q}$, $1 \cdot r = r$.

(8) Για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r \neq 0$ υπάρχει ο αντίστροφός του $r^{-1} \in \mathbb{Q}$ ώστε $r \cdot r^{-1} = 1$.

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

(9) Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}$, $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

(10) Η διάταξη " $<$ " στο $\mathbb{Q}$ είναι ολική. Δηλαδή για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}$, είτε $r = s$ ή $r < s$ ή $r > s$.

(11) Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}$, αν $r < s$ τότε $r + t < s + t$.

(12) Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}$, αν $r < s$ και $t > 0$ τότε $r \cdot t < s \cdot t$.

Παρατηρησεις.

(i) Για $r \in \mathbb{Q}$ ο αντίστροφός του r^{-1} αναπαρίσταται ως εξής. Αν ο $r = \frac{p}{q}$ επειδή $r \neq 0$ έπεται ότι $p \neq 0$. (Ο q είναι διάφορος του 0 γιατί $q \in \mathbb{N}$). Τότε ο $r^{-1} = \frac{sgn(p) \cdot q}{|p|}$, όπου $sgn(p) = 1$ αν $p > 0$ αλλιώς $sgn(p) = -1$ και $|p| = p$ αν $p > 0$ αλλιώς $|p| = -p$.

(ii) Το $\mathbb{Q}$ σαν διατεταγμένο σύνολο διαφέρει σημαντικά από το $\mathbb{N}$ και το $\mathbb{Z}$. Η βασική διαφορά είναι ότι αν $r, s \in \mathbb{Q}$ με $r < s$ τότε υπάρχει $t \in \mathbb{Q}$ ώστε $r < t < s$. Για παράδειγμα $t = \frac{r+s}{2}$ ικανοποιεί την ιδιότητα. Ακριβέστερα υπάρχουν άπειροι ρητοί μεταξύ αυτών των r και s. Μια άλλη διαφορά είναι ότι τα άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{Q}$ δεν έχουν πάντοτε μέγιστο στοιχείο. π.χ. το σύνολο $A = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$ είναι άνω φραγμένο αλλά δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Αντίστοιχα φαινόμενα εμφανίζονται για τα κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{Q}$.

(iii) Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και άρα το σύνολο των φυσικών περιέχονται στο $\mathbb{Q}$. Το $\mathbb{N}$ αναπαρίσταται από το σύνολο $\left\{\frac{p}{q} : \frac{p}{q} = \frac{p'}{1} \text{ για κάποιο } p' \in \mathbb{N}\right\}$ και το $\mathbb{Z}$ από το σύνολο $\left\{\frac{p}{q} : \frac{p}{q} = \frac{p'}{1} \text{ για κάποιο } p' \in \mathbb{Z}\right\}$. Στο εξής τα στοιχεία των $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ θα τα συμβολίζουμε με $p, m, k, \ldots$

Ασκηση 0.2. Δείξτε ότι αν $r < s$ ρητοί, τότε το σύνολο $\{t \in \mathbb{Q} : r < t < s\}$ είναι άπειρο σύνολο.

Ασκηση 0.3. Δείξτε ότι το σύνολο $\{r \in \mathbb{Q} : r < 1\}$ είναι άνω φραγμένο και ότι δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Προταση 0.5. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

α) *Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.*

β) *Για κάθε $r, t \in \mathbb{Q}$ με $r > 0$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $k \cdot r > t$.*

Αποδειξη. Για να αποδείξουμε το α) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ρητό r υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n ώστε $r < n$. Πράγματι έστω $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, όπου $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{N}$. Αν $p \in -\mathbb{N} \cup \{0\}$ τότε $p \cdot 1 = p < 1 \leq q$ και από τον ορισμό της διάταξη στο $\mathbb{Q}$ έπεται ότι $r < 1$. Αν $p \in \mathbb{N}$, τότε $p \cdot 1 = p < p + 1 \leq (p+1)q$. Από τον ορισμό της διάταξης στο $\mathbb{Q}$ έπεται ότι το $r < p + 1$.

Θα δείξουμε το β) με εις άτοπο απαγωγή. Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχουν $r, t \in \mathbb{Q}$ με $r > 0$ τέτοιοι ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $k \cdot r < t$. Ισοδύναμα από τις ιδιότητες της διάταξης στο $\mathbb{Q}$ έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $k < q \cdot r^{-1}$, το οποίο είναι άτοπο καθώς από το α) έχουμε ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. □

3. Εναλλακτικοί Ορισμοί των $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$

Στη συνέχεια θα δώσουμε δύο διαφορετικούς ορισμούς των ακεραίων $\mathbb{Z}$ και των ρητών $\mathbb{Q}$ οι οποίοι είναι αναμφίβολα πιο κομψοί και αποφεύγουν την διευρημένη έννοια της ισότητας που ήδη συζητήσαμε στο $\mathbb{Q}$. Ο λόγος που δεν τους παρουσιάσαμε εξαρχής είναι ότι χρησιμοποιούν πιο προχωρημένη μαθηματική τεχνολογία και πιθανόν να ξενίζουν τον μη εξοικειωμένο αναγνώστη. Και οι δύο ορισμοί στηρίζονται στις σχέσεις ισοδυναμίας και τις εξ' αυτών οριζόμενες κλάσεις ισοδυναμίας. Η σχέση ισοδυναμίας είναι ένα εργαλείο ταξινόμησης με ευρεία χρήση στα μαθηματικά και συναφείς επιστήμες.

3.1. Σχέσεις Ισοδυναμίας.

Ορισμος 0.6. Έστω X μή κενό σύνολο. Μια σχέση ισοδυναμίας στο X είναι μια διμελής σχέση " $\sim$ " που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε $x \in X$, $x \sim x$.
(ii) Για κάθε $x, y \in X$, $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
(iii) Για κάθε $x, y, z \in X$, $x \sim y$ και $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Το πλέον άμεσο παράδειγμα μιας σχέσης ισοδυναμίας είναι η ισότητα. Η ιδιότητα (i) του ορισμού συνεπάγεται ότι η οποιαδήποτε σχέση ισοδυναμίας σ' ένα σύνολο X επεκτείνει την ισότητα του X, δηλαδή για κάθε σχέση ισοδυναμίας το $x = x$ συνεπάγεται $x \sim x$. Το περιεχόμενο του ορισμού είναι ότι επιτρέπει να ταυτίσουμε αντικείμενα τα οποία αν και διαφορετικά ικανοποιούν κάποιες κοινές ιδιότητες. Τέτοιου είδους ταυτίσεις είναι συνήθεις στην κοινωνία, την επιστήμη και αλλού και επιτρέπουν την ταξινόμηση και κατανόηση πολύπλοκων συστημάτων. Για παράδειγμα η διμελής σχέση μεταξύ των ανθρώπων ο $a \sim b$ αν και μόνο αν οι a, b έχουν τους ίδιους γονείς είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Οι ταυτίσεις που υπάρχουν μεταξύ ισοδύναμων αντικειμένων περιγράφονται από τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζονται ως εξής.

Ορισμος 0.7. Έστω X μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μια σχέση ισοδυναμίας " $\sim$ " και $x \in X$. Η κλάση ισοδυναμίας του x συμβολίζεται με $[x]$ και είναι:

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}$$

Προταση 0.8. *Έστω X μη κενό σύνολο και " $\sim$ " σχέση ισοδυναμίας στο X. Τότε για κάθε $x, y \in X$ ένα από τα επόμενα συμβαίνει*
είτε $[x] = [y]$
ή $[x] \cap [y] = \emptyset$.
Κατά συνέπεια η οικογένεια υποσυνόλων του X $\{[x] : x \in X\}$ ορίζει μια πλήρης διαμέριση του X σε ξένα ανα δύο σύνολα.

Αποδειξη. Έστω $x, y \in X$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $z \in [x] \cap [y]$. Θα δείξουμε ότι $[x] = [y]$. Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $w \in [x]$ ισχύει ότι $w \in [y]$ και αντίστροφα. Πράγματι έστω $w \in [x]$. Τότε $x \sim w$ και επειδή $z \in [x]$ έχουμε ομοίως ότι $z \sim x$. Από την ιδιότητα (iii) του ορισμού της σχέσης ισοδυναμίας προκύπτει ότι $z \sim w$. Εν συνεχεία χρησιμοποιώντας ότι $z \in [y]$ συμπεραίνουμε ότι $w \sim y$ και άρα $w \in [y]$. Χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα δείχνουμε ότι αν $w \in [y]$ τότε $w \in [x]$ και άρα η πρόταση αποδείχτηκε. □

Ορισμος 0.9. Αν X ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μια σχέση ισοδυναμίας " sin ", τότε ορίζουμε ως χώρο πηλίκο το σύνολο $X/\sim = \{[x] : x \in X\}$. Επίσης αν $[x] \in X/\sim$ τότε κάθε $y \in [x]$ καλείται εκπρόσωπος της κλάσης $[x]$.

Παραδειγμα. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε στο $\mathbb{N}$ την " $\sim_m$ " σχέση ισοδυναμίας ως εξής. Αν $k, l \in \mathbb{N}$, $k \sim_m l$ αν υπάρχει $v \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ με $0 \leq v < m$ και $p_1, p_2 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ ώστε $k = p_1 m + v$ και $l = p_2 m + v$. Είναι εύκολο να δούμε ότι " $\sim_m$ " είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}$. Επίσης εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\mathbb{N}/\sim_m = \{[0], [1], \ldots, [m-1]\}$$

όπου $[1] = \{1, m+1, 2m+1, 3m+1, \ldots\}$ και γενικά για κάθε $j = 1, \ldots, m$

$$[j] = \{j + m \cdot l : l \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$$

Επίσης ας παρατηρήσουμε ότι $[1] = [m+1] = [2m+1] = \ldots$ και γενικότερα για κάθε $j = 1, \ldots, m$ και $n \in [j]$ έχουμε ότι $[j] = [n]$.

4. Η συμβατότητα πράξεων και διάταξης με σχέση ισοδυναμίας

Ορισμος 0.10. Έστω X μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ".

(i) Αν " $*$ " είναι μαι πράξη στο X θα λέμε ότι οι " $*$ " και " $\sim$ " είναι συμβατές αν ισχύει το ακόλουθο. Για κάθε x, x', y, y' στο X ώστε $x \sim x'$ και $y \sim y'$ ισχύει $x * y \sim x' * y'$.

(ii) Αν " $<$ " είναι μια διάταξη στο X θα λέμε ότι οι " $<$ " και " $\sim$ " είναι συμβατές αν ισχύει το ακόλουθο:
Για κάθε x, x', y, y' στο X ώστε $x \sim x'$ και $y \sim y'$ ισχύει $x < y \Leftrightarrow x' < y'$.

Προταση 0.11. *Έστω X μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μια πράξη " $*$ " και μια σχέση ισοδυναμίας " $\sim$ " που είναι συμβατές μεταξύ τους. Τότε η " $*$ " επάγει μια πράξη " $*$ " στο χώρο πηλίκο $X/\sim$.*

Αποδειξη. Ορίζουμε την πράξη $*$ στον X ως εξής: $[x] * [y] = [x * y]$. Το μόνο που πρέπει να ελένξουμε είναι ότι η $*$ είναι καλά ορισμένη. Για να είναι καλά ορισμένη η πράξη $*$ στον $X/\sim$ πρέπει να αποδείξουμε ότι το αποτέλεσμα της πράξης είναι ανεξάρτητο από τους εκπροσώπους των κλάσεων $[x], [y]$ που χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε το αποτέλεσμα της πράξης. Πράγματι έστω $x' \in [x]$ και $y' \in [y]$. Τότε από την συμβατότητα των $*$ και $\sim$ προκύπτει ότι $x * y \sim x' \sim y'$ και άρα $[x * y] = [x' * y']$. □

Ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για την διάταξη.

Προταση 0.12. *Αν σ' ένα μη κενό σύνολο υπάρχουν μια διάταξη $<$ και μαι σχέση ισοδυναμίας $\sim$ συμβατές μεταξύ τους, τότε η $<$ επάγει μια διάταξη στο $X/\sim$.*

Αποδειξη. Για $[x], [y]$ στο $X/\sim$ ορίζουμε $[x] < [y]$ αν $x < y$. Το ότι η διάταξη είναι καλά ορισμένη αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο όπως προηγουμένως. □

5. Εναλλακτικός ορισμός του $\mathbb{Z}$

Έχοντας ορίσει το $\mathbb{N}$, το $\mathbb{Z}$ μπορεί να προκύψει από το $\mathbb{N}$ ακολουθώντας τα επόμενα βήματα. Θα θεωρήσουμε το σύνολο $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ όπου $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ το σύνολο των διατεταγμένων ζευγαριών φυσικών αριθμών. Δηλαδή το (n, m) αποτελεί ένα διατεταγμένο ζευγάρι όπου $(n, m) = (n', m') \Leftrightarrow n = n'$ και $m = m'$. Στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

θα ορίσουμε πρόσθεση, πολλαπλασιασμό και διάταξη. Αυτά θα ορισθούν με χρήση των αντίστοιχων του $\mathbb{N}$. Επιπλέον θα ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας η οποία θα είναι συμβατή με τις πράξεις και τη διάταξη. Το $\mathbb{Z}$ θα είναι το $\mathbb{N}^2 / \sim$ με τις επαγόμενες πράξεις και διάταξη. Ας δούμε πιο προσεκτικά τα βήματα που περιγράψαμε.

5.1. Ορισμοί πράξεων και διάταξης στο $\mathbb{N}^2$.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ:

$$(m,n) + (k,l) = (m+k, n+l)$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ:

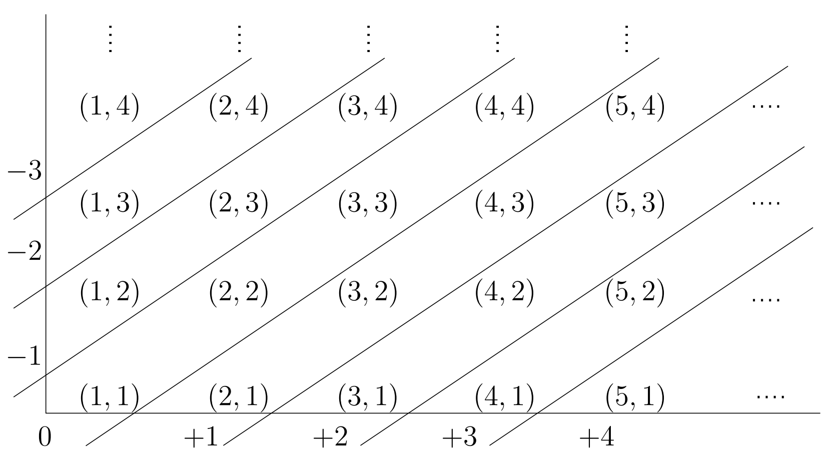
$$(m,n) \cdot (k,l) = (mk+nl, ml+nk)$$

ΔΙΑΤΑΞΗ:

$$(m,n) < (k,l) \Leftrightarrow m+l < n+k$$

Πιθανόν οι παραπάνω ορισμοί να φαίνονται περίεργοι και ίσως ακατανόητοι. Όμως είναι φυσιολογικοί αν φανταστούμε ότι ο στόχος μας είναι το διατεταγμένο ζευγάρι (m,n) να αναπαριστά τον ακέραιο $m-n$. Με αυτή την αντιστοιχία είναι εύκολο να ελεχθεί ότι οι πράξεις και η διάταξη είναι φυσιολογικά ορισμένες.

5.2. Ορισμός της σχέσης ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}^2$. Στο $\mathbb{N}^2$ ορίζουμε $(m,n) \sim (k,l)$ αν $m+l = n+k$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}^2$. Επομένως ορίζεται ο χώρος πηλίκο $\mathbb{N}^2 / \sim$. Στο επόμενο σχήμα περιγράφονται οι κλάσεις ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}^2$.



Πρόταση 0.13. *Οι πράξεις $+, \cdot$ στο $\mathbb{N}^2$ καθώς και η διάταξη $<$ είναι συμβατές με τη σχέση ισοδυναμίας.*

Η απόδειξη ότι η πρόσθεση και η διάταξη είναι συμβατές με την $\sim$ είναι εύκολες. Πιο πολύπλοκη είναι η απόδειξη για τον πολλαπλασιασμό. Η απόδειξη της πρότασης αφήνεται στον αναγνώστη.

Το σύνολα $\mathbb{Z}$ είναι ο χώρος πηλίκο $\mathbb{N}^2 / \sim$ εφοδιασμένο με τις πράξεις και τη διάταξη που ορίσαμε στ $\mathbb{N}^2$.

Σχόλια: Ο ορισμός που παραθέσαμε δημιουργεί κάποια εύλογα ερωτήματα που αξίζει να συζητήσουμε.

(α) Κατ' αρχάς ο ορισμός του συνόλου $\mathbb{Z} = \{[(m,n)] : m,n \in \mathbb{N}\}$ εμφανίζεται χαοτικός ως προς τη διάταξη των στοιχείων του. Εν τούτοις όπως εμφανίζεται από το προηγούμενο σχήμα, όπου κάθε κλάση ισοδυναμίας περιγράφεται από μια διαγώνια λωρίδα, ισχύει το ακόλουθο που η απόδειξή του αφήνεται στον αναγνώστη.

ΛΗΜΜΑ 0.14. *Για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$, ένα από τα τρία επόμενα ισχύει:*

(i) $(m,n) \sim (1,1)$.
(ii) *Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $(m,n) \sim (k,1)$.*
(iii) *Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $(m,n) \sim (1,k)$.*

Αυτό επιτρέπει να περιγράφουμε το $\mathbb{Z}$ ως εξής:

$$\mathbb{Z} = \big\{[(1,k)] : k \in \mathbb{N} \text{ και } k > 1\big\} \cup \big\{[(1,1)]\big\} \cup \big\{[(k,1)] : k \in \mathbb{N} \text{ και } k > 1\big\}$$

Είναι σαφές ότι το πρώτο σύνολο αντιπροσωπεύει το $-\mathbb{N}$, η κλάση $[(1,1)]$ είναι το 0 ενώ το τρίτο σύνολο είναι το $\mathbb{N}$. Με την προηγούμενη αναπαράσταση ο αριθμός 1 αντιστοιχεί στην κλάση $[(2,1)]$ και ο -1 στην $[(1,2)]$.

(β) Επίσης πρέπει να σημειώσουμε το ότι κάθε ακέραιος αναπαρίσταται από μία κλάση ισοδυναμίας και άρα από ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}^2$ δεν πρέπει να ξενίζει. Εν γένει στα σύγχρονα μαθηματικά όταν ορίζουμε μια μαθηματική δομή, δηλαδή ένα σύνολο με κάποιες πράξεις και σχέσεις, το κυρίαρχο είναι η σχέση μεταξύ των στοιχείων και δεν ενδιαφέρει καθόλου η φύση των στοιχείων. Το ότι θεωρούμε τους ακέραιους σαν τις κλάσεις $[(m,1)]$ ή $[(1,m)]$ ή $[(1,1)]$ και όχι $(m,1)$, $(1,m)$, $(1,1)$ οφείλεται στο ότι οι πράξεις όπως τις ορίσαμε δεν αντιστοιχούν το άθροισμα των εκπροσώπων που έχουμε επιλέξει σε αντίστοιχο εκπρόσωπο. Για παράδειγμα, για κάθε $m > 1$, $(1,m) + (m,1) = (m+1, m+1)$ και όχι $(1,1)$.

6. Εναλλακτικός ορισμός του $\mathbb{Q}$

Ο ορισμός του συνόλου των ρητών με χρήση σχέσης ισοδυναμίας είναι παρόμοιος με τον αντίστοιχο των ακεραίων. Σε αυτή την περίπτωση ο ορισμός είναι σχεδόν ο ίδιος με αυτόν που έχουμε ήδη παραθέσει. Η μόνη διαφορά είναι η ισότητα, που ήδη έχουμε αναφέρει, και όπως παρατηρήσαμε παρουσιάζει την ιδιομορφία να ταυτίζει στοιχεία με διαφορετικό συμβολισμό. Στην εναλλακτική προσέγγιση θα είναι, αυτό που πρέπει να είναι, μια σχέση ισοδυναμίας. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \big\{(p,q) : p \in \mathbb{Z} \text{ και } q \in \mathbb{N}\big\}$$

και ορίζουμε την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας.

$$(p_1,q_1) \sim (p_2,q_2) \Leftrightarrow p_1 q_2 = p_2 q_1$$

Οι πράξεις και η διάταξη στο $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ορίζονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που έχουν ήδη ορισθεί στο προηγούμενο ορισμό του $\mathbb{Q}$. Η άσκηση δείχνει ότι υπάρχει συμβατότητα μεταξύ της σχέσης ισοδυναμίας και των πράξεων, διάταξης. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι ο χώρος πηλίκο $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \sim$ εφοδιασμένος με τις πράξεις που επάγονται από τα αντίστοιχα του $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.