

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
1-9-2008**

ΘΕΜΑ 1^ο

(A) Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή \mathbb{C} και τα στοιχεία του $u_1, u_2, \dots, u_n, n \in \mathbb{N}^*$. Να δώσετε τους ορισμούς:

(α) της γραμμικής εξάρτησης και ανεξαρτησίας των $u_1, u_2, \dots, u_n \in V, n \in \mathbb{N}^*$.

(β) της βάσης και της διάστασης του διανυσματικού χώρου V .

Μονάδες 1,5

(B) Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή \mathbb{C} πεπερασμένης διάστασης n . Να αποδείξετε ότι κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολό του με n στοιχεία είναι βάση του.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: x = \frac{y}{2} = -z.$$

(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι ασύμβατες.

Μονάδες 1

(β) Να βρεθεί σημείο M της ε_2 τέτοιο ώστε $\overline{AM} \perp \varepsilon_2$, όπου $A(1, 0, -1)$.

Μονάδες 1,5

ΘΕΜΑ 3^ο

Για τις διάφορες τιμές των $\lambda \in \mathbb{R}$ να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned} x + \lambda y + z &= \lambda \\ (\lambda + 1)x + (\lambda + 1)y + 2z &= \lambda + 1 \\ 2x + (\lambda + 1)y + (\lambda + 1)z &= \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, 2x + y - 3z, -x + z).$$

(α) Να βρείτε μια βάση του πυρήνα $\text{Ker}T$ και μια βάση της εικόνας $\text{Im}T$ της T .

Μονάδες 1,5

(β) Να βρείτε τον πίνακα της T ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 .

Μονάδες 1

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 45 λεπτά.

Καλή επιτυχία