ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

28-2-2008

ΘΕΜΑ 1° Δίνονται σημείο $\mathrm{P}(1,0,3)$, επίπεδο Π με εξίσωση $x+y+z=13$ και η ευθεία $\varepsilon: \dfrac{x-1}{2}=-y=\dfrac{z-3}{2}$. Να βρεθούν :

(i) Το συμμετρικό P' του P ως προς το επίπεδο Π. *(Μονάδες 1,5)*

(ii) Η ευθεία που περνάει από το σημείο P' και είναι παράλληλη προς την προβολή της ευθείας ε στο επίπεδο Π. *(Μονάδες 1)*

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται τα υποσύνολα

$$\mathrm{U}_1=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\},\ \mathrm{U}_2=\left\{\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ \delta & -\gamma\end{pmatrix}:\gamma,\delta\in\mathbb{R}\right\}$$

του συνόλου $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ των 2×2 πραγματικών πινάκων.

(i) Να αποδείξετε ότι τα υποσύνολα U_1 και U_2 είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ και να βρείτε μία βάση στον καθένα. *(Μονάδες 1)*

(ii) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{U}_1+\mathrm{U}_2=\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. *(Μονάδες 1)*

(iii) Είναι ο διανυσματικός χώρος $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ το ευθύ άθροισμα των υποχώρων U_1 και U_2; *(Μονάδες 0,5)*

ΘΕΜΑ 3° Έστω $\mathbf{a},\mathbf{b}$ δύο μοναδιαία διανύσματα του χώρου Δ^3 με

$|a| = |b| = 1$

$$\left(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}\right)=\frac{\pi}{3} \text{ και } \mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ είναι μία βάση του Δ^3. *(Μονάδες 0,5)*

(ii) Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $\mathrm{T}:\Delta^3\to\Delta^3$, όπου Δ^3 είναι το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου, με τύπο $\mathrm{T}(\mathbf{u})=\mathbf{a}\times\mathbf{u}$ είναι γραμμική και να βρείτε τον πίνακά της ως προς τη βάση $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$. *(Μονάδες 1,5)*

(iii) Να βρείτε μία βάση του πυρήνα της Τ. *(Μονάδες 0,5)*

ΘΕΜΑ 4° (Α) Να ελέγξετε πότε το διάνυσμα $\mathbf{u}=(0,2-\lambda,-2,\lambda)$ ανήκει στον υπόχωρο $\mathrm{U}=[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3]$ του $\mathbb{R}^4$, όπου $\mathbf{u}_1=(\lambda+1,1,1,1),\mathbf{u}_2=(1,\lambda+1,1,1)$ και $\mathbf{u}_3=(1,1,\lambda+1,1)$. Στην περίπτωση που ισχύει $\mathbf{u}\in\mathrm{U}$, να γραφεί το διάνυσμα $\mathbf{u}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$. *(Μονάδες 1,5)*

(Β) Αν Α,Β είναι $\nu\times\nu$ αντιστρέψιμοι πίνακες, να αποδείξετε ότι:

(i) $\det(adj\mathrm{A})=(\det\mathrm{A})^{\nu-1}$,

(ii) $adj(\mathrm{AB})=(adj\mathrm{B})(adj\mathrm{A})$. *(Μονάδες 1)*

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 45 λεπτά. *Καλή επιτυχία*