(Γ) ΓΕΩΔΕΣΙΑΚΕΣ

Γεωδεσιακή καμπύλη καλούμε τη μικρότερη σε μήκος καμπύλη που ενώνει δύο σημεία A, B και βρίσκεται πάνω σε δοσμένη επιφάνεια.

Έστω S μία επιφάνεια και (γ) μία καμπύλη που βρίσκεται πάνω στην S,

$$S: \quad \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \qquad (6.1'$$

(γ): $u = u(t)$, $v = v(t)$ που βρίσκεται πάνω στην S

δηλ. (γ): $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}(u(t), v(t)) = \underset{\sim}{r}(t)$.

Το μήκος της καμπύλης με άκρα τα A, B, όπου $A(\underset{\sim}{r}_0 = \underset{\sim}{r}(t_0))$, $B(\underset{\sim}{r}_1 = \underset{\sim}{r}(t_1))$ δίνεται,

$$J(u(t), v(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \qquad \begin{matrix} x' = x_u u' + x_v v' \\ y' = y_u u' + y_v v' \\ z' = z_u u' + z_v v' \end{matrix}$$

$$(*) \quad = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2}\, dt \qquad (6.11)$$

όπου $E = \underset{\sim}{r}_u \cdot \underset{\sim}{r}_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$, $F = \underset{\sim}{r}_u \cdot \underset{\sim}{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$

$G = \underset{\sim}{r}_v \cdot \underset{\sim}{r}_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$, E, F, G συναρτήσεις των u, v.

Το σύστημα των εξισώσεων Euler για την (6.11) είναι

$$L_u - \frac{d}{dt} L_{u'} = 0 \quad , \quad L_v - \frac{d}{dt} L_{v'} = 0 \qquad (6.12$$

όπου $L = (E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2)^{1/2}$, $' = \frac{d}{dt}$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2}{L} - \frac{d}{dt}\frac{2(Eu' + Fv')}{L} &= 0 \\ \frac{E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2}{L} - \frac{d}{dt}\frac{2(Gv' + Fu')}{L} &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad (6.1$$

Οι λύσεις της (6.13) μας δίνουν τις σταθερές u, v και στη συνέχεια από την (6.11) παίρνουμε την ελάχιστη απόσταση.

Σ' αυτό το "αμφίεσμο μαθηματικό", η συνάρτηση g, που είναι ότι η $(\gamma) \in S$, συμπεριλαμβάνεται στο αναφαιρετικό (δες (*) στην (6.11)) κατά την παραγωγή του.

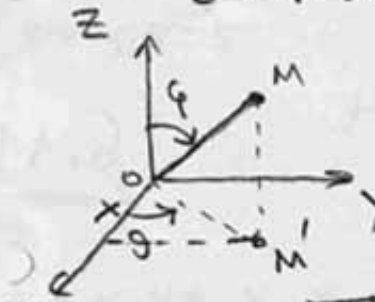
Άσκηση (με λογισμό μεταβολών)

Βρείτε τη μικρότερη απόσταση δύο σημείων A, B που ανήκουν σε μία σφαίρα (γεωδεσιακή).

Λύση

Έστω $S = S(0,R)$ η σφαίρα, $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}(\vartheta,\varphi) = (x(\vartheta,\varphi), y(\vartheta,\varphi), z(\vartheta,\varphi))$

με $\left.\begin{aligned} x &= R\cos\vartheta\sin\varphi \\ y &= R\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= R\cos\varphi \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} E &= \underset{\sim}{r}_\vartheta \cdot \underset{\sim}{r}_\vartheta = R^2\sin^2\varphi \\ G &= \underset{\sim}{r}_\varphi \cdot \underset{\sim}{r}_\varphi = R^2 \end{aligned}$



$\underset{\sim}{r}_\vartheta = R\sin\varphi(-\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0)$

$\underset{\sim}{r}_\varphi = R(\cos\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\cos\varphi, -\sin\varphi)$

$F = \underset{\sim}{r}_\vartheta \cdot \underset{\sim}{r}_\varphi = 0$

$0 \le \vartheta < 2\pi$
$0 \le \varphi < \pi$

$\vartheta = \vartheta(t), \ \varphi = \varphi(t)$

$$J(\vartheta,\varphi) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\vartheta'^2 + 2F\vartheta'\varphi' + G\varphi'^2}\, dt =$$

$$= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{E\,d\vartheta^2 + 2F\,d\vartheta\,d\varphi + G\,d\varphi^2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{E\dot\vartheta^2 + 2F\dot\vartheta + G}\, d\varphi$$

($F = 0$)

$$\vartheta'(t) = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot\vartheta(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{E\dot\vartheta^2 + G}\, d\varphi =$$

$$= R\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\sin^2\varphi\,\dot\vartheta^2 + 1}\, d\varphi \quad (1)$$

Τεχνικά $J(\vartheta,\varphi) = J(\vartheta) = R\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(\sin^2\varphi)\dot{\vartheta}^2+1}\, d\varphi$

αναφερόμαι μιας μεταβλητής $\vartheta = \vartheta(\varphi)$, οπότε η εξίσωση Euler είναι:

$$L_\vartheta - \frac{d}{d\varphi} L_{\dot\vartheta} = 0 \quad \text{όπου} \quad L = R\sqrt{(\sin^2\varphi)\dot\vartheta^2+1}$$

$$\Rightarrow \left(L_\vartheta = 0 \qquad L_{\dot\vartheta} = R\,\frac{\dot\vartheta \sin^2\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi\,\dot\vartheta^2+1}} \right)$$

$$L_\vartheta - \frac{d}{d\varphi} L_{\dot\vartheta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\varphi} L_{\dot\vartheta} = 0 \Rightarrow$$

$$L_{\dot\vartheta} = c_0 \text{ ή } \frac{R\dot\vartheta\sin^2\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi\,\dot\vartheta^2+1}} = c_0 \text{ ή } \dot\vartheta^2\sin^4\varphi = c_1^2(\sin^2\varphi)\dot\vartheta^2 + c_1^2$$

$$0 < c_1 = c_0/R$$

$$\dot\vartheta = \frac{c_1}{\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi + c_1^2}} = \frac{c_1}{\sin^2\varphi\sqrt{1-\frac{c_1^2}{\sin^2\varphi}}} \text{ ή}$$

$$\dot\vartheta = \frac{d\vartheta}{dw}\cdot\frac{dw}{dt} = \frac{c_1}{\sin^2\varphi\sqrt{1-c_1^2(1+w^2)}} = \frac{-c_1\cdot(dw/dt)}{\sqrt{(1-c_1^2)-c_1^2w^2}}$$

όπου $w = \cot\varphi$

$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\sin^2\varphi}$

$\frac{1}{\sin^2\varphi} = 1+w^2$

$$\frac{d\vartheta}{dw} = \frac{-c_1}{\sqrt{(1-c_1^2)-c_1^2w^2}} \text{ ή}$$

$$d\vartheta = \frac{-c_1\,dw}{\sqrt{(1-c_1^2)-c_1^2w^2}} \Longrightarrow \int$$

$$\vartheta(\varphi) = \operatorname{Arc}\cos\frac{c_1\cot\varphi}{\sqrt{1-c_1^2}} + c_2 = \operatorname{Arc}\cos(c\cot\varphi) + c_2 \Rightarrow$$

$$\cos(\vartheta-c_2) = c\cot\varphi \Rightarrow \cot\varphi = \frac{1}{c}[\cos\vartheta\cos c_2 - \sin\vartheta\sin c_2] = A\cos\vartheta + B\sin\vartheta$$

$$(\cdot R\sin\varphi) \Rightarrow R\cos\varphi = AR\sin\varphi\cos\vartheta + BR\sin\varphi\sin\vartheta \text{ ή}$$

$z = Ax + By$. Αυτό είναι ένα επίπεδο που περνάει από $(0,0,0)$ και τέμνει τη σφαίρα κατά "μέγιστο κύκλο", ένα τόξο από τον οποίο είναι η ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΗ.

ΥΠΟΔ

3.6

$$\bar{m} = \frac{m}{M}, \quad \bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T}, \quad \bar{v} = \frac{v}{V}$$

$$\bar{m}' = -\frac{\alpha T}{M}$$

$$\bar{x}' = -\frac{VT}{R}\bar{v}$$

$$\bar{v}' = \frac{\alpha\beta T}{MV}\frac{1}{\bar{m}} - \frac{T\vartheta}{V(1-\bar{x})^2}$$

(i) $\frac{VT}{R} = \frac{\alpha\beta T}{MV}$ ΙΔΙΑΣ ΤΑΞΗΣ

$$\Rightarrow V = \sqrt{\alpha\beta R/M}$$

(ii) $\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{1}{R}VT = \bar{v} = \frac{v}{V} \Rightarrow$

$$T = \frac{R}{V}$$