

Miepos B

$\Delta$  idiovika Neoplata

① ταυτότης της τάσης σε  
2 και 3 διαστάσεις.



## Εισχόμενη στη Διαφορική Προβληματική

Ο ταυτότητας της τάσης  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$  Ο ταυτότητας της παραλλαγής  $\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix}$

Όταν οι ενδιάμεσες σύνθετες διατίθενται αυτό θα παραπομπή  
τη σημείωσης διατίθενται. ~~Τις~~ ή να περιλαμβάνεται  
ανά το μέσο τεταγμένων ή το μέσο παρατομένων  
αριθμών χρησιμοποιούστε τους τύπους:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

Όπου  $u_x$  το μέσο τεταγμένων κατά  $x$   
και  $v_y$  —||— —||— κατά  $y$ .

Αν γνωρίζουμε την ταυτότητα της παραπομπής, (τέσσερις τα  
τεταγμένων, ή όλες διατίθενται a priori) προσποιτείται  
να περιλαμβάνεται στην ταυτότητα των τάσεων τέσσερας της  
κατατατάξης εφιώνων του ν. Hooke για 2 και 3 διά-  
στασεις.

$$Η \text{ με το φερμάτιον } \Delta \text{ δείκτων } \rightarrow \sigma_{ij} = \frac{E}{1+v} \epsilon_{ij} + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \text{ tr}(\epsilon_{ij}) \delta_{ij}$$

Η σε μηδημένη έκταση για 2D  $\Rightarrow$

(c)

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+v} \epsilon_{xx} + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1+v} \epsilon_{yy} + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+v} \epsilon_{xy}$$

$$\left( \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

δέλτα Kronecker

Αντισφρόφως  $\epsilon_{ij} = \frac{1+v}{E} \sigma_{ij} - \frac{v}{E} \text{tr}(\sigma_{ij}) \delta_{ij}$

$\epsilon_{xy}$

$$\epsilon_{xx} = \frac{1+v}{E} \sigma_{xx} - \frac{v}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1+v}{E} \sigma_{yy} - \frac{v}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1+v}{E} \sigma_{xy}$$

### Στροφές - Κύριοι Άξονες

Έκα σώμα που βρίσκεται σε εντατική κατάσταση συνήθως δεν έχει ίδια ταυτότητα ταύτη της τάσης σε όλη τη σφράγιδα του. Ακόμα και αν ο ταυτότητα της τάσης είναι ίδια σε όλη την έκταση των σύνδεσμών, ο ταυτότητα αναφέρεται πάντα σε fix συγκεκριμένη κατεύδυση. Υπάρχει δε fix συγκεκριμένη διεύθυνση στην οποία τυδενιστείται οι δικτύωτικές ( $\sigma_{xy}, \sigma_{yx}$ ) τάσεις και τεριστομολογίες οι οποίες άρει είναι το κύριο σημείο της έννοιας.

Οι κύπελλες τάσεων προστατεύουν τους τόνους:

$$\left[ \sigma_{I,II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \sigma_{xy}^2} \right]$$

Είναι η κατεύθυνση του κύπελλου συστήματος προστατεύεται από:

$$(\tan 2\theta_p = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}})$$

Αν στρέψουμε το κύπελλο σύστημα κατά  $45^\circ$  τότε σχηματίζεται ο προστατευόμενος σύστημας όπου τα γεωμετρικά σημεία είναι διατηρητές τάσεων.

$$\theta_{shear} = \theta_{principal} \pm 45^\circ \quad (\theta_s = \theta_p \pm 45^\circ)$$

Οι γενικοί τόνοι στροφής φανούνται πρεδούν στο τυπολόγιο (τύπος του βαρυδίπτα). Είναι ίδιες με τάσεις και παραπομπών.

Ο κύκλος του Mohr (γραφική επίλυση) είναι ένας άλλος τρόπος επίλυσης των προβλημάτων αυτών.

Μπορεί να προσεξτεί στην σ. 21 των συμβολών.

Η "σωστή" σεριά λιγνώσεων των επόμενων δερμάτων είναι όμως διατελεστική. Δηλ. αδημ:  $7+9 \rightarrow 10+11 \rightarrow 9 \rightarrow 15$

(cv)

# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη

Πολυτεχνειόπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ

Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235

Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr



## ΜΗΧΑΝΙΚΗ II (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ)

### 7<sup>η</sup> Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

#### ΔΙΑΣΟΝΙΚΕΣ ΕΝΤΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΑΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

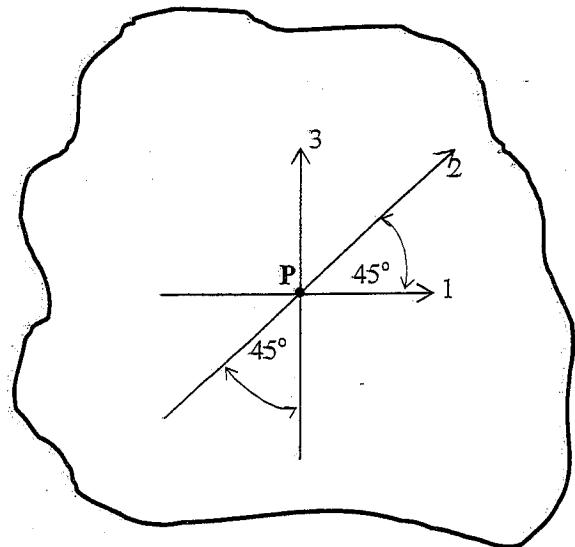
##### Άσκηση 1

Στο σημείο P της επιφάνειας λεπτού μεταλλικού φύλλου οι παραμορφώσεις μετρήθηκαν με ηλεκτρομηκυνσιόμετρα και βρέθηκαν ίσες με:

$$\varepsilon_1 = 8 \times 10^{-6}, \varepsilon_2 = 5 \times 10^{-6}, \varepsilon_3 = -4 \times 10^{-6}$$

Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του φύλλου είναι  $E=200$  GPa και ο λόγος Poisson είναι  $\nu=0.3$ .

- Να ευρεθεί ο τανυστής των παραμορφώσεων στο σημείο P.
- Να εκτιμηθούν με τη βοήθεια του κύκλου Mohr οι κύριες τάσεις, στο σημείο P.
- Να υπολογισθεί η μέγιστη διατμητική τάση και η διεύθυνσή της, στο σημείο P.

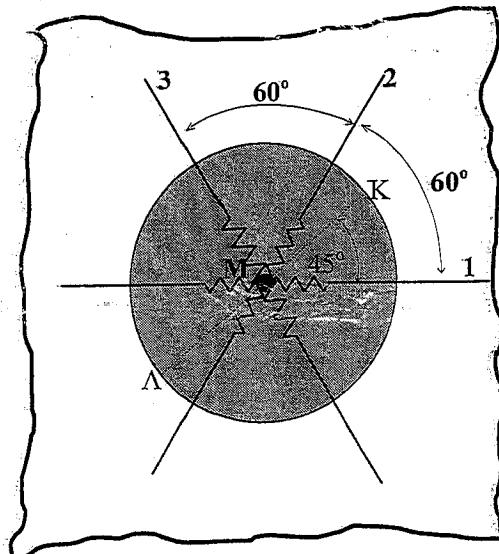


Σχήμα 1

##### Άσκηση 2

Για τη μέτρηση των ανηγμένων παραμορφώσεων σε σημείο M λεπτού επιπέδου μεταλλικού ελάσματος χρησιμοποιήθηκε σύστημα τριών ηλεκτρομηκυνσιομέτρων με τη διάταξη του Σχ.2. Για δεδομένη εξωτερική φόρτιση οι αντίστοιχες ενδείξεις είναι:  $\varepsilon_1 = 8 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_2 = 4 \times 10^{-4}$  και  $\varepsilon_3 = -6 \times 10^{-4}$ . Το υλικό του ελάσματος θεωρείται άλκιμο και γραμμικώς ελαστικό με μέτρο ελαστικότητας  $E=220$  GPa, λόγο Poisson  $\nu=0.3$  και τάση διαρροής  $\sigma_d=200$  MPa. Το πεδίο των παραμορφώσεων θεωρείται ομογενές.

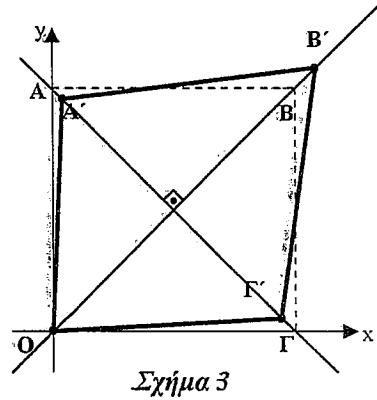
- Να ευρεθεί ο τανυστής των παραμορφώσεων.
- Να ευρεθεί η μεταβολή μήκους του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ το οποίο είχε αρχικό μήκος 2 cm.
- Να ευρεθεί αναλυτικά ο τανυστής των κυρίων τάσεων και ο προσανατολισμός του.
- Να εκτιμηθούν γραφικά οι μέγιστες διατμητικές τάσεις και η κατεύθυνση στην οποία εμφανίζονται.



Σχήμα 2

### Άσκηση 3

Η διαγώνιος  $OB$  του τετραγώνου  $OABG$  ( $OA=1\text{ cm}$ ) υπέστη ανηγμένη παραμόρφωση  $\varepsilon_{OB}=3\times10^{-4}$ . Η διαγώνιος  $AG$  υπέστη ανηγμένη παραμόρφωση  $\varepsilon_{AG}=-2\times10^{-4}$ . Να υπολογισθεί το τελικό μήκος της πλευράς  $OA$  και η τελική τιμή της γωνίας  $\Gamma OA$ .



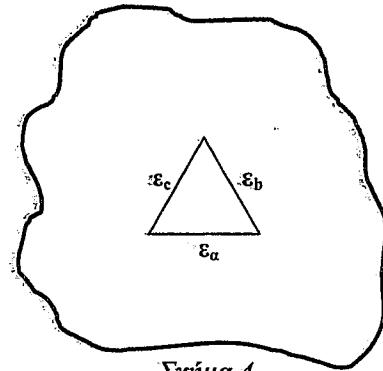
Σχήμα 3

### Άσκηση 4

Αποδείξτε ότι οι συνιστώσες των ανηγμένων παραμορφώσεων,  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$ ,  $\varepsilon_c$ , κατά μήκος των πλευρών ισοπλεύρου τριγώνου συνδέονται με τις κύριες παραμορφώσεις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_{II}$  μέσω των σχέσεων:

$$3(\varepsilon_1 + \varepsilon_{II}) = 2(\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c)$$

$$3(\varepsilon_1 - \varepsilon_{II}) = 2\sqrt{(2\varepsilon_a - \varepsilon_b - \varepsilon_c)^2 + 3(\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2}$$



Σχήμα 4

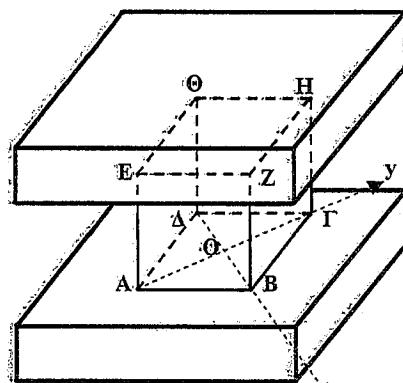
### Άσκηση 5

- Δείξτε την ταυτότητα των κυρίων αξόνων των τάσεων και των παραμορφώσεων σε ένα γραμμικώς ελαστικό σώμα.
- Χαλύβδινος κύβος ακμής  $20\text{ cm}$  είναι εγκλωβισμένος ανάμεσα σε δύο οριζόντιες απολύτως άκαμπτες και ανένδοτες πλάκες (Σχ.5). Ο κύβος φορτίζεται έτσι ώστε να ευρίσκεται σε επίπεδη παραμόρφωση, είναι δε γνωστές οι δύο κύριες τάσεις:

$$\sigma_{xx}=\sigma_1=-50\text{ MPa} \text{ και } \sigma_{yy}=\sigma_{II}=-100\text{ MPa}$$

Το υλικό του κύβου έχει μέτρο ελαστικότητας  $E=190\text{ GPa}$  και λόγο Poisson  $\nu=0.29$ . Υπολογίστε:

- Την τρίτη κύρια τάση.
- Τις κύριες παραμορφώσεις και τις διευθύνσεις τους.
- Τη μεταβολή του μήκους των ακμών  $AB$  και  $AD$  και τη μεταβολή της γωνίας  $\Delta AB$ .



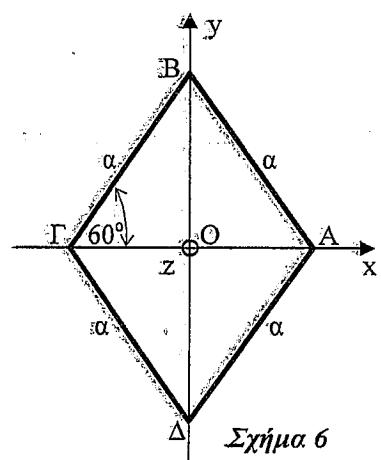
Σχήμα 5

### Άσκηση 6

Λεπτή χαλύβδινη πλάκα  $ABΓΔ$ , σχήματος ρόμβου (Σχ.6) έχει μήκος πλευράς  $a=1\text{ m}$  και πάχος  $t=1\text{ cm}$ . Οι τέσσερεις πλευρές της πλάκας, που ισορροπεί, φορτίζονται με ομοιόδιμορφα κατανεμημένες ορθές και διατμητικές τάσεις κάθετες στον άξονα  $z$  και έτσι στην πλάκα έχουμε ομογενές εντατικό πεδίο. Μετά τη φόρτιση οι πλευρές της πλάκας επιμηκύνθηκαν κατά  $\Delta a=0.975\text{ mm}$  ενώ το πάχος δεν μεταβλήθηκε.

- Υπολογίστε τη μεταβολή του μήκους των διαγωνών, τη μεταβολή της ορθής γωνίας  $AOB$  και τη μεταβολή του όγκου της πλάκας.
- Υπολογίστε τις ορθές και διατμητικές τάσεις που εφαρμόζονται στις πλευρές της πλάκας, καθώς και τις κύριες τάσεις στην πλάκα.

Δίνεται:  $E=200\text{ GPa}$  και  $\nu=0.3$



Σχήμα 6

## 7. για τα για Σεριά -Τετράς Οδυσσίας

Στα προβλήματα αυτά χρησιμοποιούται ~~κατά~~ κύριως το σετ εφιωδών για τη σφρόφη του Ει.

$$\left[ \begin{array}{l} \epsilon'_{xx} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta \\ \epsilon'_{yy} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} - \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta - \epsilon_{xy} \sin 2\theta \\ \epsilon'_{xy} = -\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \sin 2\theta + \epsilon_{xy} \cos 2\theta. \end{array} \right]$$

→ Άλλες λεπτίσεις φύλλωσης 7 → 4, 6.

→ Η στρώση 5 έχει ιδεί τε την παραδοχή ότι το σωστήρα που ανεκμετάλλευται και το κύριο ( $\sigma_{xx} = \sigma_I = -50 \text{ MPa}$  και  $\sigma_{yy} = \sigma_{II} = -100 \text{ MPa}$ ).

→ Φύλλωση 9

→ Στην Ασκηση 3 δεν προκύπτει το βγαζόταν...

→ Η Ασκηση 4 λένε τα τε σφρόφη ~~και~~ του ταντού, για την πλάνηση του ταντού τε το φάρδοιο δινωτα της μέρεως ΒΓ.



## Мүнгечікій II - Парафарміс

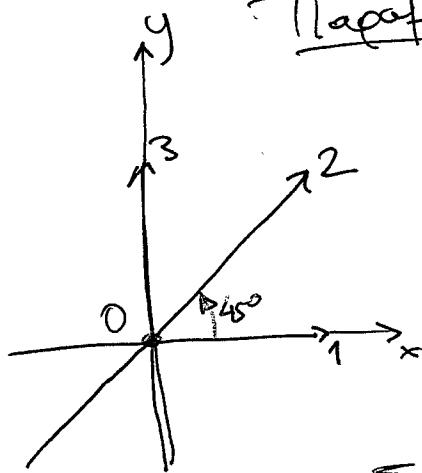
7.1 Деріе Қосындар

(2013)

Диафармалықтар және

Парафармалықтар касиеттері

①



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 = 8 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_2 = 5 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_3 = -4 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

@  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_3$ . Зародың танымай  $\varepsilon_{ij}$

$$\varepsilon'_{xx} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2(45^\circ) + \varepsilon_{xy} \sin 2(45^\circ)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy} &\equiv \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{xx} &\equiv \varepsilon_1 \\ \varepsilon'_{xx} &\equiv \varepsilon_2 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} = 5 \times 10^{-6} - \frac{(8 - 4) \times 10^{-6}}{2} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{xy} = 3 \times 10^{-6}}$$

$$\left[ \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \times 10^{-6} \right]$$

$$\textcircled{B} \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon \delta_{ij}$$

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 4 \times 10^{-6}, E = 200 \text{ GPa}, \nu = 0.3 \\ \Rightarrow \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon = \frac{200 \times 10^9 \times 0.3}{(1.3)(0.4)} \times 4 \times 10^{-6} = 461 \times 10^3 \\ \frac{E}{1+\nu} = \frac{200 \times 10^9}{1.3} = 154 \times 10^9 \end{cases}$$

$$\rightarrow \sigma_{ij} = 154 \times 10^9 \varepsilon_{ij} + 461 \times 10^3 \delta_{ij}$$

$$\rightarrow \sigma_{xx} = 154 \times 10^9 \times 8 \times 10^{-6} + 461 \times 10^3 \rightarrow \boxed{\sigma_{xx} = 1.7 \text{ MPa}}$$

$$\rightarrow \sigma_{yy} = 154 \times 10^9 \times (-4) \times 10^{-6} + 461 \times 10^3 \rightarrow \boxed{\sigma_{yy} = -0.15 \text{ MPa}}$$

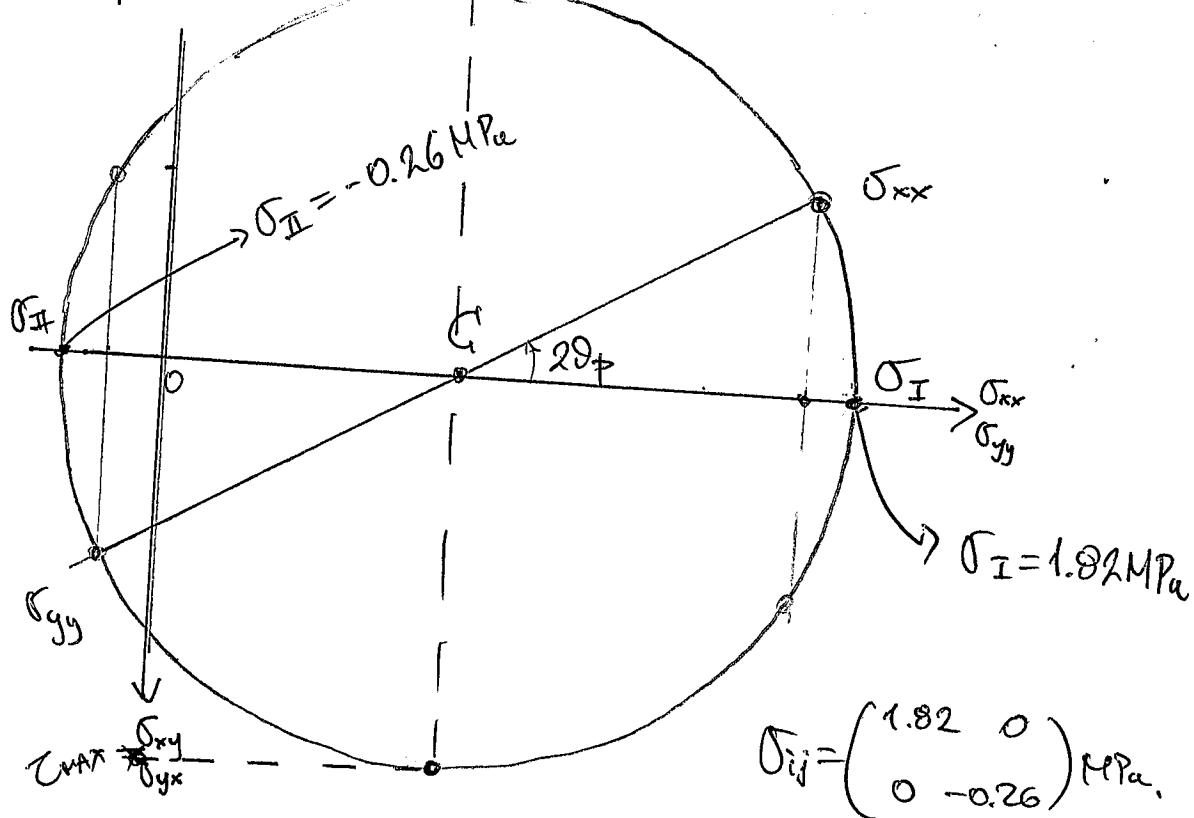
$$\rightarrow \sigma_{xy} = 154 \times 10^9 \times (3) \times 10^{-6} \rightarrow \boxed{\sigma_{xy} = 0.46 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1.7 & 0.46 \\ 0.46 & -0.15 \end{pmatrix} \text{ MPa.}$$

①

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = 0.775 \text{ MPa.}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{1.7 + 0.15}{2}\right)^2 + (0.46)^2} = 1.03 \text{ MPa.}$$



$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1.82 & 0 \\ 0 & -0.26 \end{pmatrix} \text{ MPa.}$$

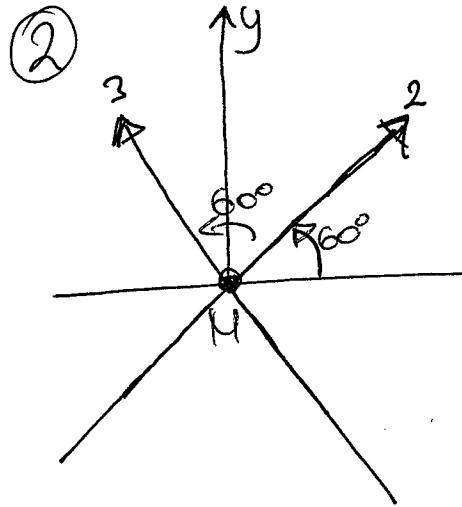
$$\textcircled{1} \quad \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2} = 1.04 \text{ MPa.}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2 \times 0.46}{1.7 + 0.15} = 0.497 \rightarrow \underline{\theta_p = 13.22^\circ}$$

$$\theta_s = \theta_p \pm 45^\circ \rightarrow \theta_{s1} = 58.22^\circ$$

$$\rightarrow \theta_{s2} = -31.78^\circ$$

\textcircled{2}



$$\left[ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = 8 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_2 = 4 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_3 = -6 \times 10^{-4} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} E = 220 \text{ GPa} \\ V = 0.3 \\ \sigma_y = 200 \text{ MPa} \end{array} \right]$$

@  $\varepsilon_{xx} \equiv \varepsilon_1 \rightarrow$  Ιτροφή των  $\varepsilon_{ij} \rightarrow 60^\circ$

$$\varepsilon'_{xx} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos(2 \times 60^\circ) + \varepsilon_{xy} \sin(2 \times 60^\circ) \xrightarrow{\varepsilon_{xx} \equiv \varepsilon_1} \varepsilon'_{xx} \equiv \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_{yy}}{2} - \frac{1}{4} \varepsilon_1 + \frac{1}{4} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left( \varepsilon_2 = \frac{1}{4} \varepsilon_1 + \frac{3}{4} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) ①$$

$\rightarrow$  Ιτροφή  $\varepsilon_{ij} \rightarrow 120^\circ$

$$\varepsilon'_{xx} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos(240^\circ) + \varepsilon_{xy} \sin(240^\circ) \xrightarrow{\varepsilon_{xx} \equiv \varepsilon_1} \varepsilon'_{xx} \equiv \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_{yy}}{2} - \frac{1}{4} \varepsilon_1 + \frac{1}{4} \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xy} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{4} \varepsilon_1 + \frac{3}{4} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy} \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{①} \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 + \frac{3}{2} \varepsilon_{yy} \rightarrow -2 \times 10^{-4} = 4 \times 10^{-4} + \frac{3}{2} \varepsilon_{yy}$$

$$\boxed{\varepsilon_{yy} = -4 \times 10^{-4} \xrightarrow{①} 4 \times 10^{-4} = \frac{8 \times 10^{-4} + 3(-4)}{4} \times 10^{-4} + \varepsilon_{xy} \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{xy} = 5.77 \times 10^{-4}}}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 5.77 \\ 5.77 & -4 \end{pmatrix} \times 10^{-4}}$$

③

B

$$\epsilon_{xx}' = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta}{2} \quad \theta = 45^\circ$$

$$\epsilon_{xx}' = \frac{8-4 \times 10^{-4}}{2} + \frac{8+4 \times 10^{-4}}{2} \cos(90^\circ) + 5.77 \sin(90^\circ) \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{xx}' = 2 \times 10^{-4} + 5.77 \times 10^{-4} \rightarrow \boxed{\epsilon_{xx}' = 7.77 \times 10^{-4}} \rightarrow \epsilon_{xx} = \frac{\Delta L_x}{L_0} = 2 \text{ cm}$$

$$E_{xx} f \frac{\partial u_x}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} = \epsilon_{xx}' \cdot L \rightarrow u_x = \int \epsilon_{xx}' dx + C \quad \boxed{\Delta L_x = 15.54 \times 10^{-6} \text{ m}}$$

8

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad ②$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+v} \epsilon_{ij} + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \epsilon \delta_{ij}$$

$$\begin{cases} \frac{E}{1+v} = \frac{200 \times 10^3}{1.3} = 154 \times 10^3 \\ \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) = \frac{200 \times 0.3}{(1.3)(0.4)} \times 4 \times 10^5 \\ = 461 \times 10^5 \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = 154 \times 10^3 \epsilon_{ij} + 461 \times 10^5 \delta_{ij}$$

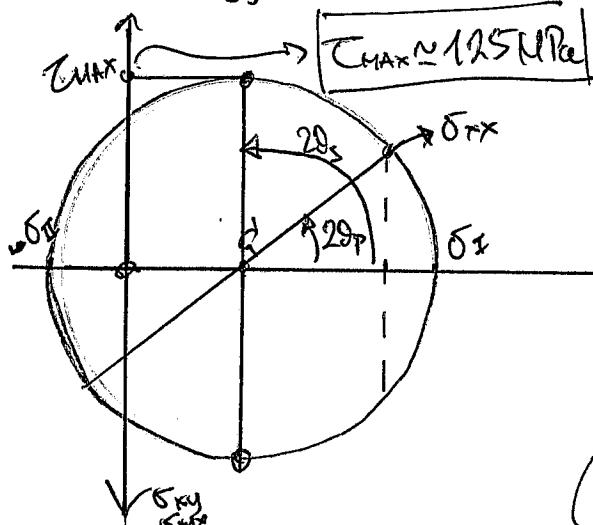
$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 154 \times 10^3 \times 8 \times 10^{-4} + 461 \times 10^5 = 169 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} = 154 \times 10^3 \times (-4) \times 10^{-4} + 461 \times 10^5 = -15.5 \text{ MPa} \\ \sigma_{xy} = 154 \times 10^3 \times 5.77 \times 10^{-4} = 89 \text{ MPa} \end{cases} \rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 169 & 89 \\ 89 & -15.5 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

①

$$\sigma_{I,II} = \frac{169 - 15.5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{169 + 15.5}{2}\right)^2 + 89^2} \rightarrow \sigma_I \approx 205 \text{ MPa} \quad \sigma_{II} \approx -51.25 \text{ MPa}$$

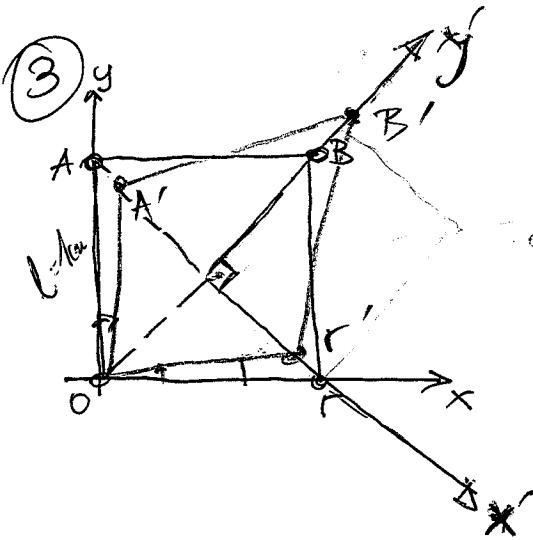
$$\tan(2\alpha_p) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{178 \times 10^6}{189.5 \times 10^6} \rightarrow \alpha_p \approx 22^\circ$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 205 & 0 \\ 0 & -51.25 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$



4

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \alpha_p \pm 45^\circ \\ \alpha_s &= 22 \pm 45^\circ \\ [\alpha_s &\rightarrow 67^\circ, -23^\circ] \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \epsilon_{Ar} = \epsilon_{xx} = -2 \times 10^{-4} \\ \epsilon_{Bz} = \epsilon_{yy} = 3 \times 10^{-4} \end{cases}$$

Τορχυρές σε σειρά συστήματα  $x'y'$  οι οποίες δεν αποδίδουν την επίδραση  $\epsilon_{xy}' = 0$ .

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \times 10^{-4} \rightarrow \text{Τορχυρές } 45^\circ \rightarrow$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\epsilon_{Ar} + \epsilon_{Bz}}{2} + \frac{\epsilon_{Ar} - \epsilon_{Bz}}{2} \cos(2 \times 45^\circ) + \cancel{\epsilon_{xy} \sin(2 \times 45^\circ)}$$

$$\epsilon_{xx} = -\frac{2 \times 10^{-4} + 3 \times 10^{-4}}{2} \rightarrow \boxed{\epsilon_{xx} = 0.5 \times 10^{-4}}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\epsilon_{Ar} + \epsilon_{Bz}}{2} \rightarrow \cancel{\frac{\epsilon_{Ar} - \epsilon_{Bz}}{2} \cos(2 \times 45^\circ)} + \cancel{\epsilon_{xy} \sin(2 \times 45^\circ)} \Rightarrow \epsilon_{yy} = -\frac{2 + 3}{2} \times 10^{-4}$$

$$\boxed{\epsilon_{yy} = 0.5 \times 10^{-4}}$$

$$\epsilon_{xy} = -\frac{-2 \times 10^{-4} - 3 \times 10^{-4}}{2} \sin(2 \times 45^\circ) + \cancel{\epsilon_{xy} \cos(2 \times 45^\circ)} \rightarrow \epsilon_{xy} = 2.5 \times 10^{-4}$$

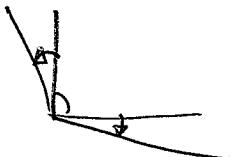
$$\boxed{\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times 10^{-4}}$$

$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 5 \times 10^{-5} \rightarrow \Delta L = \frac{\epsilon L_0}{L_{\text{final}}} = \frac{5 \times 10^{-5}}{1 + 5 \times 10^{-5}} \text{ m}$   
 $\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \rightarrow \gamma = 2 \epsilon_{xy} \rightarrow \boxed{\gamma = 5 \times 10^{-4}}$

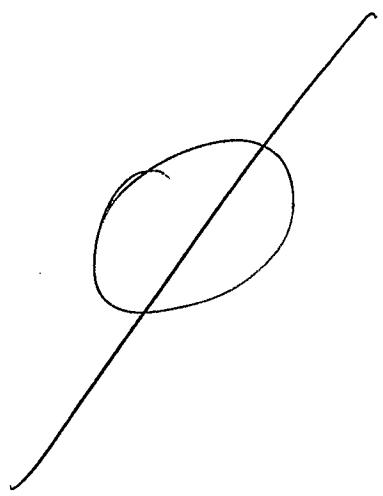
(Το δεύτερο πρόσωπο σε γ υποδεικνύει αλλαγή σειράς κατά την οποία η μεταβολή είναι:



$\epsilon_{xy} \sim \alpha_{ρυγκώδεις} \rightarrow$



(5)



⑥

(5)

$$a = 0.2 \text{ m.}$$

$$\text{Eniexdij naploj} \Rightarrow \varepsilon_{zz} = 0.$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_I = -50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{II} = -100 \text{ MPa.}$$

$$E = 190 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.29$$

(a)

$$\Rightarrow \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \xrightarrow{\varepsilon_{zz}=0} \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \rightarrow \sigma_{zz} = 0.29(-150) \rightarrow \underline{\sigma_{zz} = -43.5 \text{ MPa}}$$

$$\left[ \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -50 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -43.5 \end{pmatrix} \text{ MPa.} \right]$$

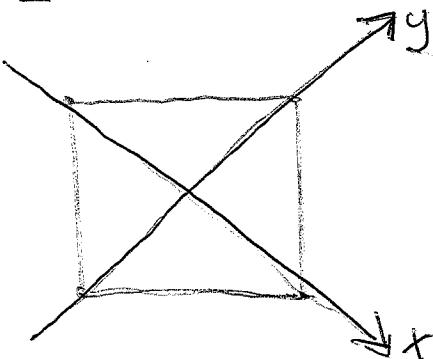
$$\textcircled{B} \quad \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{1}{190 \times 10^9} (-50 - 0.29(-143.5)) \times 10^6$$

$$\underline{\varepsilon_{xx} = 0.044 \times 10^{-3}}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) \rightarrow \varepsilon_{yy} = \frac{1}{190 \times 10^9} (-100 - 0.29(-93.5)) \times 10^6$$

$$\underline{\varepsilon_{yy} = -0.38 \times 10^{-3}}$$

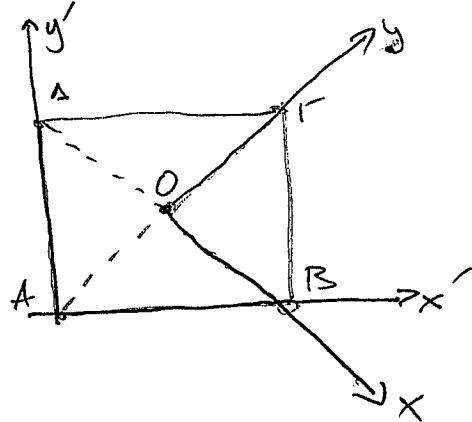
$$\left[ \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} -0.044 & 0 & 0 \\ 0 & -0.38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \right]$$



→ Οι κύριες παρατορθίσεις θα είναι ωριμάσεις σε αυτή την διεύθυνση + τείχη στην άλλη διεύθυνση. Σπουδέας θα είναι και αυτές παρατορθίσεις σε αυτή την διεύθυνση ουτε-ταχθέαντας νωρίς ανεκρούγεται η σχύλη.

(7)

⑦  $\Sigma_{\text{xy}}'$  առաջ շարույթ  $E_{ij} \rightarrow 45^\circ$ .



$$\begin{aligned}\epsilon'_{xx} &= \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos(2 \times 45^\circ) + \epsilon_{xy} \sin(90^\circ) \\ \hookrightarrow \epsilon'_{xx} &= -\frac{0.044 + 0.38}{2} \times 10^{-3} \rightarrow \boxed{\epsilon'_{xx} = 0.21 \times 10^{-3}} \\ \epsilon'_{yy} &= \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} - \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos(2 \times 45^\circ) + \epsilon_{xy} \sin(90^\circ) \\ \hookrightarrow \epsilon'_{yy} &= -0.21 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\epsilon'_{xy} = -\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \sin(90^\circ) + \epsilon_{xy} \cos(90^\circ) \rightarrow \epsilon'_{xy} = \frac{-0.044 + 0.38}{2} (-1)$$

$$\boxed{\epsilon'_{xy} = -0.17 \times 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} -0.21 & -0.17 \\ -0.17 & -0.21 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \quad (\epsilon_{zz} = 0).$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{AA} = \epsilon_{AB} = \epsilon'_{xx} &= -0.21 \times 10^{-3} & L^{AA} = L^{AB} &= 0.2 \text{ m} \rightarrow \epsilon = \frac{\Delta L}{L} \\ \text{"} &\epsilon'_{yy} \text{"} & &\end{aligned}$$

$$\Delta L^{AA} = \Delta L^{AB} = -(0.21 \times 0.2) \times 10^{-3} \rightarrow \boxed{\Delta L = -0.042 \text{ mm}} \quad \text{թօքսուրը.}$$

$$\epsilon'_{xy} = \frac{1}{2} \rightarrow \gamma = 2\epsilon'_{xy} \rightarrow \gamma = 2(-0.17) \times 10^{-3} \rightarrow \boxed{\gamma = -0.34 \times 10^{-3}}$$

⑧

# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη

Πολύτεχνουπόλη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ. Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Τηλέφωνα Γραφείου: 210-7721313, 210-7721263,

Τηλέφωνα Εργαστηρίων: Εμβιομηχανικής 210-7724235, 210-7721317, Φυσικών Δομικών Λιθών:

210-7724025. Οπτικόν Μεθόδων: 210-7721318

Τηλεομοιότυπο: 2107721302

Διεύθυνση τηλεοπτικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr



Ακαδημαϊκό έτος 2011-2012

## ΜΗΧΑΝΙΚΗ II (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ)

### 9<sup>η</sup> Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

#### Σχέσεις μετατοπίσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων

##### Ασκηση 1<sup>η</sup>

Επίπεδο στερεό σώμα από υλικό με μέτρο ελαστικότητας  $E=2 \times 10^{11}$  Pa και λόγο Poisson  $\nu=0.3$  φορτίζεται έτσι ώστε το πεδίο των μετατοπίσεων να δίνεται από την σχέση:

$$\bar{a} = [(2x^2 + 3y)\bar{i} + (3y^2 + 2xy)\bar{j}] \times 10^{-5} \text{ m}$$

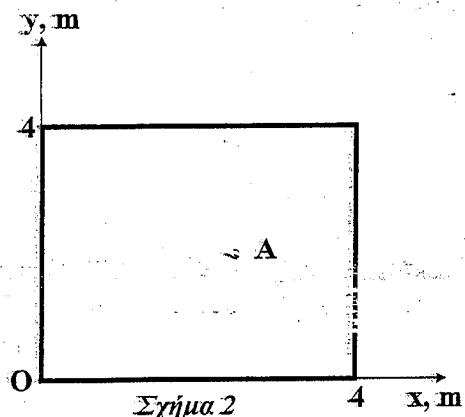
- Να γραφεί ο τανυστής των τροπών (ανηγμένων παραμορφώσεων).
- Να ευρεθεί το τελικό μήκος γραμμικού στοιχείου AB του σώματος, του οποίου τα άκρα στην απαραμόρφωτη κατάσταση είναι: A(0.00 m, 0.00 m) και B(0.01m, 0.00 m).
- Να ευρεθεί η μεταβολή αρχικώς ορθής γωνίας με πλευρές αρχικώς παράλληλες με τους άξονες του συστήματος αναφοράς, της οποίας στην απαραμόρφωτη κατάσταση η κορυφή βρίσκεται στο σημείο Δ(-0.02 m, 0.03 m).
- Να γραφεί ο τανυστής των τάσεων για το σημείο H (1 m, 2 m, -2 m).

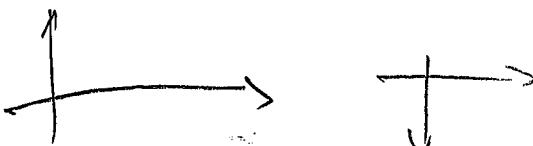
##### Ασκηση 2<sup>η</sup>

Τετραγωνική πλάκα, από υλικό με μέτρο ελαστικότητας  $E=0.9375$  GPa και λόγο Poisson  $\nu=0.25$ , και με διαστάσεις όπως φαίνονται στο Σχ.2, βρίσκεται υπό την επίδραση επίπεδης εντατικής κατάστασης. Το πεδίο των μετατοπίσεων περιγράφεται στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς Oxy από τις εξισώσεις:

$$u = (-x + x^2y) \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad v = \left(2y^2 - \frac{y^3}{3}\right) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

- Να ευρεθεί το σύνολο των σημείων της πλάκας (γεωμετρικός τόπος) στα οποία η ορθή ανηγμένη παραμόρφωση (τροπή)  $\epsilon_{yy}$  παίρνει τη μέγιστη της τιμή.
- Να υπολογισθεί η μεταβολή του μήκους της γραμμής του προηγουμένου ερωτήματος.
- Στο σημείο A(2.25 m, 2 m) να ευρεθεί ο τανυστής των τάσεων και στη συνέχεια να ευρεθούν οι κύριες τάσεις και η διεύθυνση των κυρίων αξόνων με τη βοήθεια του κύκλου του Mohr.



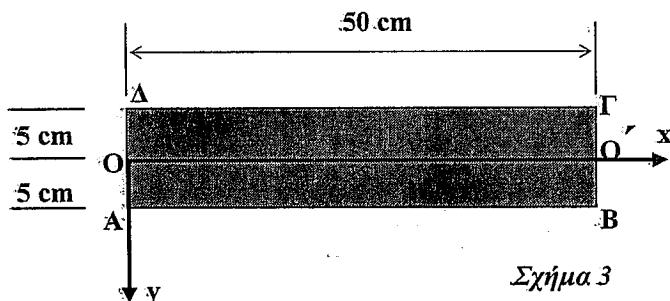


### Άσκηση 3<sup>η</sup>

Η λεπτή μεταλλική πλάκα του Σχ.3 βρίσκεται υπό επίπεδη εντατική κατάσταση. Οι μετατοπίσεις κατά τους άξονες x και y δίνονται ως:

$$u = (-3x^2y + 2.3y^3 + 7305y) \cdot 10^{-6} \text{ cm}$$

$$v = (0.9xy^2 + x^3 - 7500x + 250000) \cdot 10^{-6} \text{ cm}$$



Σχήμα 3

- Υπολογίστε τις παραμορφώσεις  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{xy}$  σε τυχόν σημείο της πλάκας.
- Υπολογίστε τις μεταβολές μήκους των πλευρών της πλάκας και της ευθείας ΟΟ' καθώς και τη μεταβολή της αρχικώς ορθής γωνίας xOy κατά μήκος του άξονα x.
- Υπολογίστε τον τανυστή των τάσεων σε τυχόν σημείο της πλάκας και δείξτε ότι οι πλευρές AB και ΓΔ είναι ελεύθερες τάσεων.

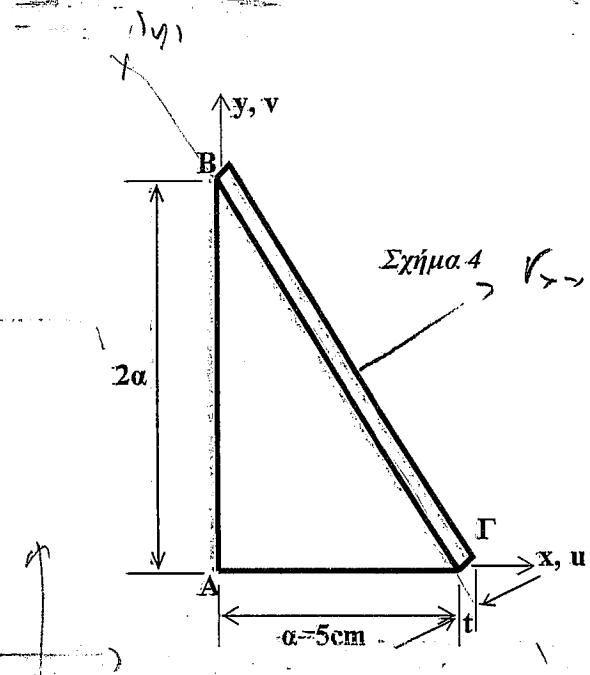
Δίνεται ότι:  $E=200 \text{ GPa}$  και  $v=0.3$

### Άσκηση 4<sup>η</sup>

Λεπτή επίπεδη τριγωνική πλάκα, πάχους  $t=1 \text{ mm}$ , από ομογενές και ισότροπο υλικό με  $E=200 \text{ GPa}$  και  $v=0.3$  ευρίσκεται υπό επίπεδη εντατική κατάσταση. Το πεδίο των μετατοπίσεων δίνεται από τις σχέσεις:

$$u = (x+y)^2 \cdot 10^{-5} \text{ m}, \quad v = -(x+y)^2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

- Να ευρεθεί ο τανυστής των παραμορφώσεων  $\epsilon_{ij}$ .
- Να ευρεθούν οι ορθές και διατμητικές τάσεις κατά μήκος της πλευράς BG συναρτήσει της μεταβλητής x.
- Να ευρεθεί η συνισταμένη ορθή και η συνισταμένη διατμητική δύναμη που δρούν στην πλευρά BG.



Σχήμα 4

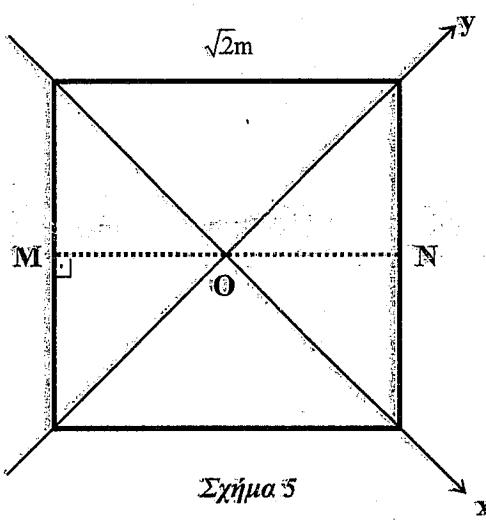
### Άσκηση 5<sup>η</sup>

???

Δίνεται λεπτή τετραγωνική πλάκα με ακμή μήκους  $\sqrt{2} \text{ m}$ . Η πλάκα είναι κατασκευασμένη από όλκιμο υλικό με μέτρο ελαστικότητας  $E=200 \text{ GPa}$  και λόγο Poisson  $v=0.3$  (Σχ.5). Το πεδίο μετατοπίσεων για δεδομένη φόρτιση και για το σύστημα αναφοράς του Σχ.5 δίνεται από την σχέση:

$$\bar{u} = [(x^3 + y^2x)\vec{i} + (y^3 + x^2y)\vec{j}] \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

- Να ευρεθεί το τελικό μήκος των διαγωνίων της πλάκας και η τελική τιμή της γωνίας xOy.
- Να ευρεθεί το τελικό μήκος του ευθυγράμμου τμήματος MN.
- Να ευρεθεί ο τανυστής των κυρίων τάσεων στο σημείο N με τη βοήθεια του κύκλου του Mohr?



Σχήμα 5

# Μηχανική II - Περιφοράς

Για Δειγμά Λοκίσεων

(2013)

Σχέσης Ηλεκτρονισμού - Αυμφίβου Λογίσεων

$$\textcircled{1} \quad \vec{u} = [(2x^2 + 3y)\hat{i} + (3y^2 + 2xy)\hat{j}] \times 10^{-5} \text{ m.}$$

$$\begin{bmatrix} E = 200 \text{ GPa} \\ \nu = 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad u_x = 2x^2 + 3y$$

$$v_y = 3y^2 + 2xy$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \rightarrow \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 4x$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 6y + 2x$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{3+2y}{2}$$

$$\left[ \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 4x & \frac{3+2y}{2} \\ \frac{3+2y}{2} & 6y + 2x \end{pmatrix} \times 10^{-5} \right]$$

$$\textcircled{3} \quad \Rightarrow \Delta L^{AB} = \epsilon_{xx} L^{AB} \rightarrow \text{Όχι} \quad \epsilon_{xx} \neq \text{σαδερός} \quad \text{αλλά} \quad \epsilon_{xx}(x).$$

$$\Rightarrow \Delta L^{AB} = \int_0^L \epsilon_{xx} dx = \int_0^{0.01} 4x dx = 2x^2 \Big|_0^{0.01} = 2 \text{ mm}$$

$$\left[ L_{AB}^{\text{final}} = L^{AB} + \Delta L = 0.01 + 2 \times 10^{-3} \text{ m.} \right]$$

$$\textcircled{4} \quad \epsilon_{xy} = \frac{3+2y}{2} \quad y = -0.02 \quad \epsilon_{xy} = -1.48 \times 10^{-5}$$

$$\text{Diagram showing a beam segment AB of length 0.03 m. Point A is at the left end, and point B is at the right end with coordinates (0.01, 0). The beam is deflected downwards, with point A at y = -0.02 m and point B at y = -0.05 m.}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{-0.05 - (-0.02)}{0.03} = -1.0 \times 10^{-3}$$

$$\gamma = 2 \epsilon_{xy} \rightarrow \gamma = -2.0 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

(1)

$$(5) \quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 4x & \frac{3+2y}{2} \\ \frac{3+2y}{2} & 6y+2x \end{pmatrix} \times 10^{-5} \xrightarrow{H(1,2,-2)} \varepsilon_{ij}^{(+)1} = \begin{pmatrix} 4 & 3.5 \\ 3.5 & 14 \end{pmatrix} \times 10^{-5}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+v} \varepsilon_{ij} + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \varepsilon \delta_{ij} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 18 \times 10^{-5} \\ \frac{E}{1+v} = \frac{200 \times 10^9}{1.3} \approx 154 \times 10^9 \\ \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \approx 115 \times 10^9, \times \varepsilon \rightarrow = 2070 \times 10^4 \end{array} \right.$$

$$\sigma_{ij} = 154 \times 10^9 \varepsilon_{ij} + 2070 \times 10^4 \delta_{ij}$$

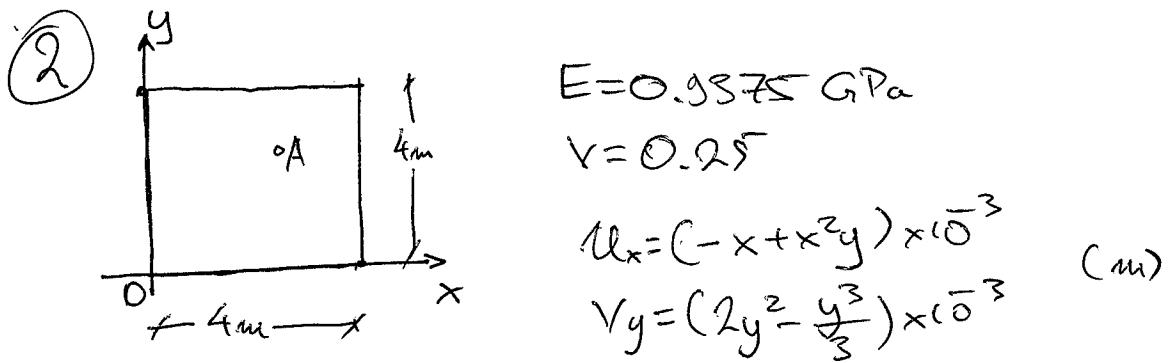
$$\sigma_{xx} = 154 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-5} + 2070 \times 10^4 \rightarrow \underline{\sigma_{xx} = 26.86 \text{ kPa}}$$

$$\sigma_{yy} = 154 \times 10^9 \times 14 \times 10^{-5} + 2070 \times 10^4 \rightarrow \underline{\sigma_{yy} = 42.26 \text{ kPa}}$$

$$\sigma_{xy} = 154 \times 10^9 \times 3.5 \times 10^{-5} \rightarrow \underline{\sigma_{xy} = 5.39 \text{ kPa}}$$

$$\left[ \delta_{ij}^{(+1)} = \begin{pmatrix} 26.86 & 5.39 \\ 5.39 & 42.26 \end{pmatrix} \text{ kPa} \right]$$

(2)



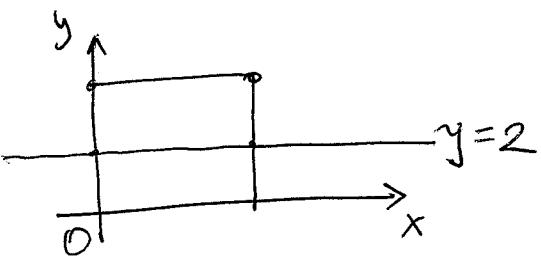
③  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = (2xy - 1) \times 10^{-3}$ ,  $\frac{\partial v_y}{\partial y} = (4y - y^2) \times 10^{-3}$   
 $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (x^2 + 0) = \frac{x^2}{2} \times 10^{-3}$$

$$\rightarrow \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 2xy - 1 & \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} & 4y - y^2 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (4y - y^2) = 4 - 2y \rightarrow \text{at } y=0 \quad 4 - 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y=2}$$

Endeine //xx



④ If  $\epsilon_{xx} = 0$   $\rightarrow$   $\epsilon_{yy} = 0$   $\rightarrow$   $\epsilon_{xy} = 0$   $\rightarrow$   $\epsilon_{yy} = 0$   $\rightarrow$   $\epsilon_{yy} = 0$

$$\epsilon_{xx}(y=2) \rightarrow \epsilon_{xx}^{(y=2)} = (4x - 1) \times 10^{-3}$$

$$x_{\text{total}} = \int_0^L \epsilon_{xx} dx = \int_0^4 (4x - 1) dx = 2x^2 - x \Big|_0^4 = 28 \text{ mm}$$

$$\left[ L_{\text{final}} = 4.028 \text{ m} \right]$$

⑤  $\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 2xy - 1 & \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} & 4y - y^2 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \xrightarrow{A(2.25, 2)} \epsilon_{ij}^{(A)} = \begin{pmatrix} 8 & 2.53 \\ 2.53 & 4 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$

⑥

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 2.53 \\ 2.53 & 4 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+v} \epsilon_{ij} + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \epsilon \delta_{ij}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \text{tr}(\epsilon_{ij}) = 8+4 = 12 \times 10^3 \\ \frac{E}{1+v} = 0.75 \times 10^9 \\ \frac{0.9375 \times 0.25}{(1.25)(0.5)} \times 10^9 = 0.37 \times 10^9 \\ \times \epsilon \rightarrow 4.44 \times 10^6 \end{array} \right.$$

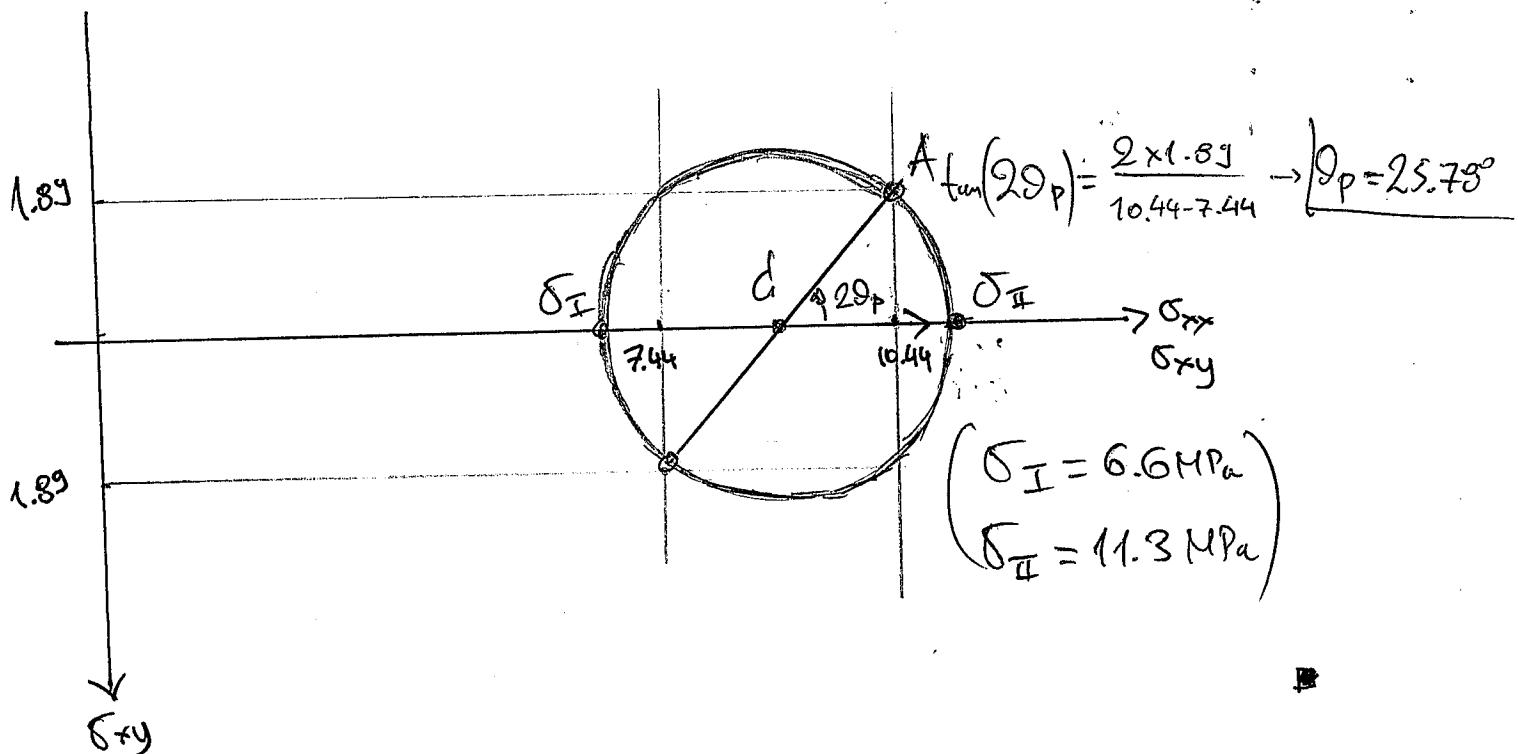
$$\sigma_{ij} = 0.75 \times 10^9 \epsilon_{ij} + 4.44 \times 10^6$$

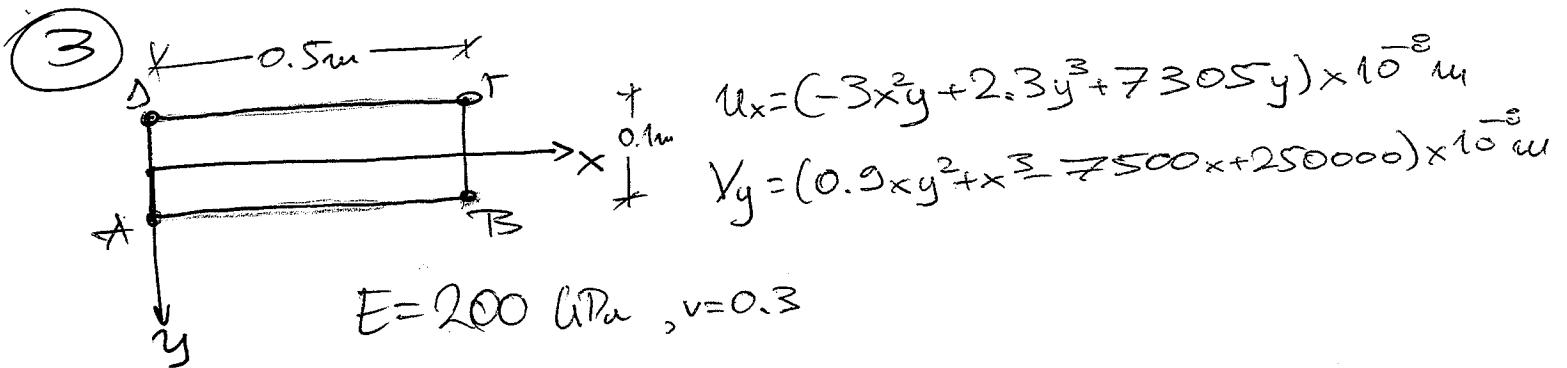
$$\rightarrow \sigma_{xx} = 0.75 \times 10^9 \times 8 \times 10^{-3} + 4.44 \times 10^6 = 10.44 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_{yy} = 0.75 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-3} + 4.44 \times 10^6 = 7.44 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \sigma_{xy} = 0.75 \times 10^9 \times 2.53 \times 10^{-3} = 1.89 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 10.44 & 1.89 \\ 1.89 & 7.44 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad (\Sigma \text{ of } A)$$





②  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \epsilon_{xx} \rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} = -6xy, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = \epsilon_{yy} \rightarrow \frac{\partial u_y}{\partial y} = 1.8xy$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( -3x^2 + 6.9y^2 + 7305 + 0.9y^2 + 3x^2 - 7500 \right)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} (7.8y^2 - 195) = 3.9y^2 - 97.5$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6xy & 3.9y^2 - 97.5 \\ 3.9y^2 - 97.5 & 1.8xy \end{pmatrix} \times 10^{-8}$$

③ • Meupd A  $\rightarrow x=0 \rightarrow \epsilon_{ij}^{AD} = \begin{pmatrix} 0 & 3.9y^2 - 97.5 \\ 3.9y^2 - 97.5 & 0 \end{pmatrix} \times 10^{-8}$

$$\Delta L^{AD} = \int_{-0.05}^{0.05} \epsilon_{yy}^{AD} dy = 0$$

• Meupd A  $\rightarrow y=-0.05 \rightarrow \epsilon_{ij}^{AR} = \begin{pmatrix} 0.3x & -97.5 \\ -97.5 & -0.09x \end{pmatrix} \times 10^{-8}$

$$\Delta L^{AR} = \int_0^{0.5} \epsilon_{xx}^{AR} dx = 0.3 \int_0^{1/2} x dx = 0.0375 \times 10^{-8} \text{ m} = 3.75 \times 10^{-10} \text{ m}$$

• Meupd B  $\rightarrow x=0.5 \rightarrow \epsilon_{ij}^{RB} = \begin{pmatrix} -3y & 3.9y^2 - 97.5 \\ 3.9y^2 - 97.5 & 0.9y \end{pmatrix} \times 10^{-8}$

$$\Delta L^{RB} = \int_{-0.05}^{0.05} \epsilon_{yy}^{RB} dy = 0.9 \int_{-0.05}^{0.05} y dy = \frac{0.9}{2} y^2 \Big|_{-0.05}^{0.05} = 0.$$

• Meupd AB  $\rightarrow y=0.05 \rightarrow \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} -0.3x & -97.5 \\ -97.5 & +0.09x \end{pmatrix} \times 10^{-8}$

(5)

$$\Delta L^{\text{AB}} = \int_0^{0.5} \varepsilon_{xx} dx = -0.3 \int_0^{0.5} x dx = 0.15 x^2 \Big|_0^{0.5} = 0.0375 \times 10^{-8} \text{ m} = 3.75 \times 10^{-10} \text{ m.}$$

$$1 \text{ m } 00' \rightarrow y=0 \rightarrow \varepsilon_{ij}^{00'} = \begin{pmatrix} 0 & -97.5 \\ -97.5 & 0 \end{pmatrix} \times 10^{-8}$$

$$\Delta L^{00'} = 0.$$

$$x \hat{O} y \rightarrow x=0 \rightarrow \varepsilon_{ij}^{x0y} = \begin{pmatrix} 0 & -97.5 \\ 97.5 & 0 \end{pmatrix} \times 10^{-8} \rightarrow \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \rightarrow \gamma = -195 \times 10^{-9} \text{ rad.}$$

$$\textcircled{1} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} -6xy & 3.9y^2 - 97.5 \\ 3.9y^2 - 97.5 & 1.8xy \end{pmatrix} \times 10^{-8}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+v} \varepsilon_{ij} + \frac{Ev}{(1+v)(1-v)} \text{tr}(\varepsilon_{ij}) \delta_{ij}$$

$$\frac{E}{1+v} = \frac{200 \times 10^9}{1.3} = 153.8 \times 10^9$$

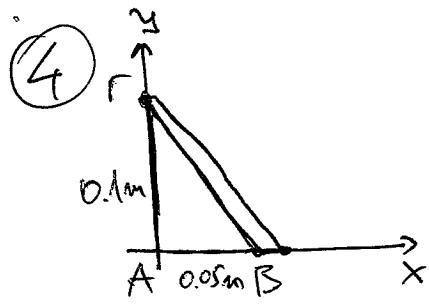
$$\frac{Ev}{(1+v)(1-v)} = \frac{200 \times 0.3 \times 10^9}{(1.3)(0.4)} = 115.4 \times 10^9$$

$$\text{tr}(\varepsilon_{ij}) = -4.2xy$$

$$\frac{Ev}{(1+v)(1-v)} \cdot \text{tr}(\varepsilon_{ij}) = -4847xy$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = 153.8 \times 10^9 \varepsilon_{ij} - 4847xy \delta_{ij}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} = 153.8(-6xy) - 4847xy \\ \sigma_{yy} = 153.8(1.8xy) - 4847xy \\ \sigma_{xy} = 153.8(3.9y^2 - 97.5) \end{array} \right\} \rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -14xy & 6y^2 - 15 \\ 6y^2 - 15 & -2.1xy \end{pmatrix} \text{ KPa.}$$



$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$u_x = (x+y)^2 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$v_y = -(x+y)^2 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$@ u_x = (x^2 + 2xy + y^2) \times 10^{-5}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = (2x + 2y) \times 10^{-5} = 2(x+y) \times 10^{-5}$$

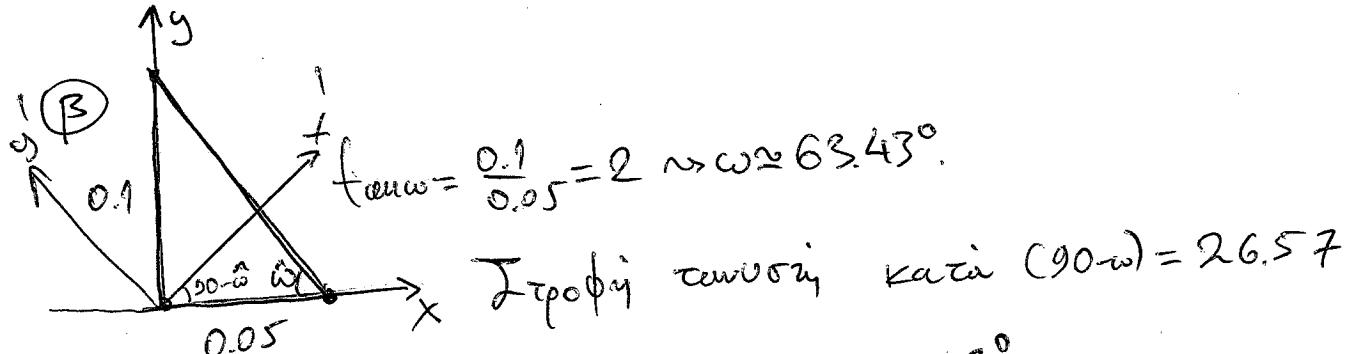
$$v_y = -(x^2 + 2xy + y^2) \times 10^{-5}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -(2y + 2x) \times 10^{-5} = -2(x+y) \times 10^{-5}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = (2y + 2x) \times 10^{-5} = 2(y+x) \times 10^{-5} \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = -(2x + 2y) \times 10^{-5} = -\frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = 0$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 2(x+y) & 0 \\ 0 & -2(x+y) \end{pmatrix} \times 10^{-5}$$



$$\circ \quad \epsilon_{xx}' = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos(2 \times 26.57^\circ) + \epsilon_{xy} \sin 29^\circ$$

$$\epsilon_{xx}' = \frac{2(x+y) + 2(x+y)}{2} \times 0.6 = 1.2(x+y) \times 10^{-5}$$

$$\circ \quad \epsilon_{yy}' = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} - \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos(2 \times 26.57^\circ) + \epsilon_{xy} \sin 29^\circ$$

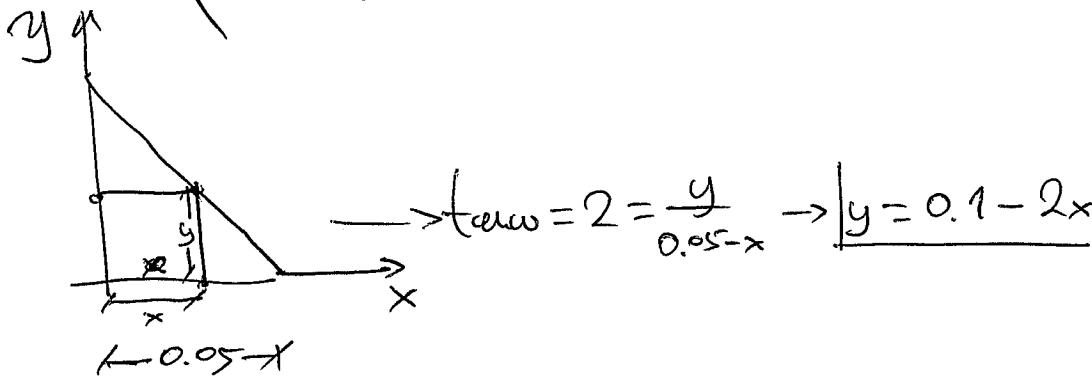
$$\epsilon_{yy}' = \dots = -1.2(x+y) \times 10^{-5}$$

$$\circ \quad \epsilon_{xy}' = -\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \sin(2 \times 26.57^\circ) + \epsilon_{xy} \cos(26.57^\circ)$$

$$\hookrightarrow \epsilon_{xy}' = -\frac{2(x+y) + 2(x+y)}{2} \times 0.8 = -1.6(x+y)$$

⑦

$$\varepsilon_{ij}' = \begin{pmatrix} 1.2(x+y) & -1.6(xy) \\ -1.6(xy) & -1.2(x+y) \end{pmatrix} \times 10^{-5}$$



$$\stackrel{y=...}{\varepsilon_{ij}'} \quad \varepsilon_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 1.2 & -1.6 \\ -1.6 & -1.2 \end{pmatrix} (0.1-x) \cdot 10^{-5}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+v} \varepsilon_{ij} + \frac{E_v}{(1+v)(1-2v)} \text{tr}(\varepsilon_{ij}) \delta_{ij} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{E}{1+v} = 153.8 \times 10^3 \\ \text{tr}(\varepsilon_{ij}) = 0 \end{array} \right)$$

$$\sigma_{ij} = 153.8 \times 10^3 \varepsilon_{ij} \rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0.12 - 1.2x & -0.16 + 1.6x \\ -0.16 + 1.6x & 1.2x - 0.12 \end{pmatrix} \cdot (153.8) \times 10^3$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 184.6 - 184.6x & -246.1 + 246.1x \\ -246.1 + 246.1x & 184.6 - 184.6x \end{pmatrix} \text{ kPa.} \quad \overline{\sigma}_{\text{BR}} = \overline{\sigma}_{xx} + \overline{\sigma}_{xy}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

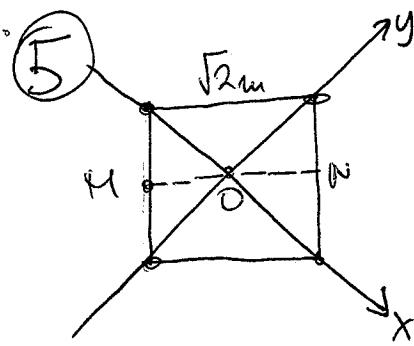
$$\int_0^{0.05} f(x) dx = \sigma_{xx} \int_0^{0.05} dy \quad \left. \begin{array}{l} dA = dy \\ f(x) = f(x) \end{array} \right\} \rightarrow \int f(x) dy$$

$$\frac{dy}{dx} \approx \cos \omega = \frac{dx}{dy}$$

$$f(x) = 2.22 \int_0^{0.05} (184.6 - 184.6x) dx$$

$$f(x) = \sigma_{xy} \rightarrow \int_0^{0.05} \sigma_{xy} dy = 2.22 \int_0^{0.05} (-246.1 + 246.1x) dx$$

$$dx = 0.45 dy$$



$$\vec{u} = [(Cx^3 + y^2)x]\vec{i} + [(y^3 + x^2)y]\vec{j} \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

②  $u_x = x^3 + y^2x \rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2yx$

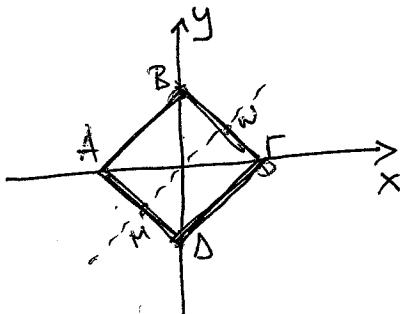
$$v_y = y^3 + x^2y \rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = 3y^2 + x^2, \frac{\partial v_y}{\partial x} = 2yx$$

$$\epsilon_{xx} = 3x^2 + y^2$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = 2yx.$$

$$\epsilon_{yy} = 3y^2 + x^2$$

$$\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 2yx \\ 2yx & 3y^2 + x^2 \end{pmatrix} \times 10^{-3}.$$



$$\rightarrow AO = BO = CO = OD = 1 \text{ m.}$$

$$\epsilon_{xx}(y=0) = 3x^2 \rightarrow \Delta L^{Ar} = \int_{-1}^1 \epsilon_{xx} dy = \int_{-1}^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_{-1}^1 = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\epsilon_{yy}(x=0) = 3y^2 \rightarrow \Delta L^{Ar} = \int_0^1 3y^2 dy = y^3 \Big|_0^1 = 2 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

$$\left[ L_{Ar}^{find} = 2.002 = L_{Bo}^{find} \right] \quad x \overset{A}{\underset{D}{\underset{O}{\underset{y}{\rightarrow}}}} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \right\} \rightarrow \epsilon_{xy} = 0 \rightarrow \boxed{x=0}$$

~~$$\epsilon_{xy} dx dy = \int \int y x^2 dy dx = \int \int y dy = \frac{1}{2} y^2 dy = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times 10 = 500$$~~

③  $\rightarrow$  jauvix MN eivae  $45^\circ$ .

$$\epsilon_{xx}' = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy} \cos(90^\circ) + \epsilon_{xy} \sin(90^\circ)}{2} = \frac{4x^2 + 4y^2}{2} + 2yx$$

$$= x^2 + y^2 + 2yx = x^2 + y^2$$

$$= (x+y)^2 + x^2 + y^2$$

⑨

$$\Sigma_{yy}' = \dots = (x-y)^2 + x^2 + y^2.$$

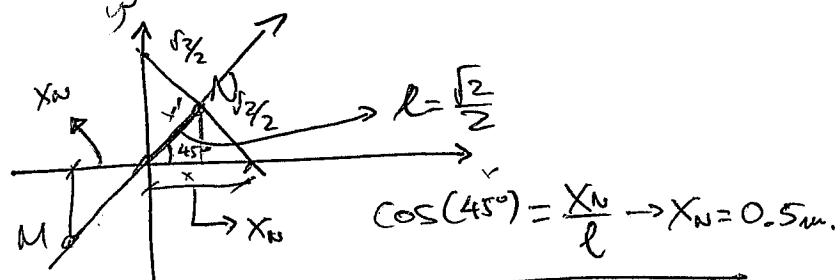
$$\Sigma_{xy}' = -\frac{\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy}}{2} \sin(90^\circ) + \Sigma_{xy} \cos(90^\circ) = y^2 - x^2.$$

$$\Sigma_{ij}' = \begin{pmatrix} 2(x^2 + y^2 + xy) & y^2 - x^2 \\ y^2 - x^2 & 2(x^2 + y^2 - xy) \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

Hence we have two Hooke's law given by:  $y = ax + b \rightarrow \theta = 45^\circ \rightarrow a = 1$

$y = x + b \rightarrow$  equal to zero.

$$y = x.$$



$$\rightarrow \Sigma_{ij}' = \begin{pmatrix} 6x^2 & 0 \\ 0 & 2x^2 \end{pmatrix} \times 10^{-3}.$$

$$\Rightarrow \Delta L_{MN} = \int_{x_N}^{x_M} \Sigma_{xx} dx' = \int_{-0.5}^{0.5} 6x^2 dx = [2x^3] \Big|_{-0.5}^{0.5} = 0.705 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

$$L_{MN}^{\text{final}} = \sqrt{2} + 0.5 \times 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow L_{MN}^{\text{final}} \approx 1.419 \text{ m}$$

$$\textcircled{Y} \quad \Sigma_{ij}'(N) \xrightarrow{x=0.5} \Sigma_{ij}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{ij} + \frac{Ev}{(1+\nu)(1-\nu)} \delta \epsilon_{ij}$$

$$\left( \begin{array}{l} \frac{E}{1+\nu} \approx 154 \times 10^9 \\ \epsilon = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \times 10^{-3} \\ \frac{Ev}{(1+\nu)(1-\nu)} \approx 115 \times 10^9 \end{array} \right)$$

$$\delta_{ij} = 154 \times 10^9 \epsilon_{ij} + 230 \times 10^6 \delta_{ij}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} = 154 \frac{3}{2} \times 10^9 + 230 \times 10^6 \rightarrow \sigma_{xx} = 461 \text{ MPa} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{yy} = 154 \frac{1}{2} \times 10^9 + 230 \times 10^6 \rightarrow \sigma_{yy} = 307 \text{ MPa} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xy} = 0 \end{array} \right\}$$

(10)

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 461 & 0 \\ 0 & 307 \end{pmatrix} \text{ MPa} \end{array} \right]$$

# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη

Πολυτεχνειόπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Τηλέφωνα Γραφείου: 210-7721313, 210-7721263,

Τηλέφωνα Εργαστηρίου: Εμβιομηχανικής 210-7724235, 210-7721317, Φυσικών Δομικών Λίθων:

210-7724025. Οπτικών Μεθόδων: 210-7721318

Τηλεοποιότητα: 2107721302

Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr



Ακαδημαϊκό έτος 2010-2011

## ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ)

10<sup>η</sup> Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

Ασκήσεις επί του τανυστή των τάσεων

### Ασκηση 1<sup>η</sup>

Δίνεται ο τανυστής τάσεων:

$$\begin{bmatrix} 20x^3 + y^2 & 100 + 80y^2 & xz^3 + 30x^2y \\ 100 + 80y^2 & 30x^3 + 100 & 0 \\ xz^3 + 30x^2y & 0 & 30y^2 + 30z^3 \end{bmatrix}$$

Να προσδιορισθούν οι μαζικές δυνάμεις ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις ισορροπίας.

### Ασκηση 2<sup>η</sup>

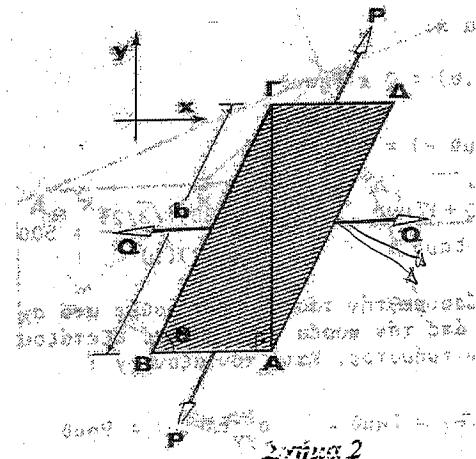
Ορθό πρίσμα πάχους 1 cm με βάση παραλληλόγραμμο πλευράς  $BG=b=10$  cm και του οποίου η διαγώνιος  $AG$  είναι κάθετη προς την  $AB$ , φορτίζεται από τις δυνάμεις  $P=1730$  N και  $Q=1000$  N που διέρχονται από το κέντρο βάρους του πρίσματος.

Να ευρεθούν:

a. Οι συνιστώσες  $\tau_a$  σημείου  $A$  και  $\tau_b$  σημείου  $B$  σε τομή κάθετη στο παραλληλόγραμμο που περιέχει τη διαγώνιο  $AG$ .

b. Οι κύριες τάσεις και οι διευθύνσεις των κυρίων αξόνων.

Δίνεται:  $\theta=30^\circ$ .



### Ασκηση 3<sup>η</sup>

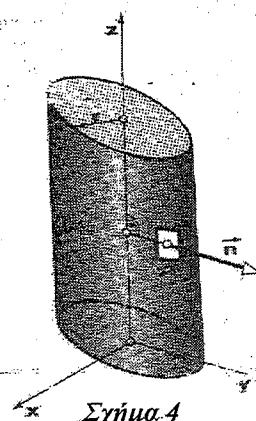
Από σημείο  $A$  στερεού σώματος υπό ένταση, άγονται δύο επίπεδα τομής με κάθετα μοναδιαία διαμύσματα  $\alpha$  και  $\beta$ . Έστω  $\sigma_\alpha$  και  $\sigma_\beta$  τα διανύσματα τάσεως που δρουν στα επίπεδα αυτά. Να αποδειχθεί το θεώρημα Betti-Maxwell, σύμφωνα με το οποίο η προβολή του  $\sigma_\alpha$  στο  $\beta$  ισούται με την προβολή του  $\sigma_\beta$  στο  $\alpha$ .

### Ασκηση 4<sup>η</sup>

Για την ράβδο του Σχ.4 δίνεται ο τανυστής των τάσεων:

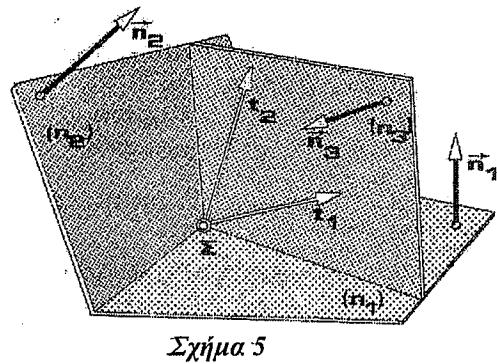
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -G\theta_y \\ 0 & 0 & G\theta_x \\ -G\theta_y & G\theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

Να αποδειχθεί ότι η παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου είναι ελεύθερη τάσεων.



### Άσκηση 5<sup>η</sup>

Έστω  $\vec{t}_1$  και  $\vec{t}_2$  τα διανύσματα τάσης που αντιστοιχούν στα επίπεδα  $\pi_1$  και  $\pi_2$  (με μοναδιαία διανύσματα  $\vec{n}_1$  και  $\vec{n}_2$ ) που διέρχονται από το σημείο  $\Sigma$  σώματος υπό ένταση (Σχ.5). Να ευρεθεί η κατεύθυνση του διανύσματος τάσεως  $\vec{t}_3$  που αντιστοιχεί στο επίπεδο  $\pi_3$  που περνάει από το  $\Sigma$  και ορίζεται από τα διανύσματα  $\vec{t}_1$  και  $\vec{t}_2$ .



Σχήμα 5

### Άσκηση 6<sup>η</sup>

Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του Σχ.6 ( $AA' = 2a$  και  $A\Gamma = B\Delta = a$ ) δέχεται ομοιόμορφη φόρτιση σε όλες τις έδρες του.

Το διάνυσμα των τάσεων στην έδρα  $ABB'A'$  είναι:

$$\vec{t}_1 = 4c \vec{i}_1 + 11c \vec{i}_2 + 6c \vec{i}_3.$$

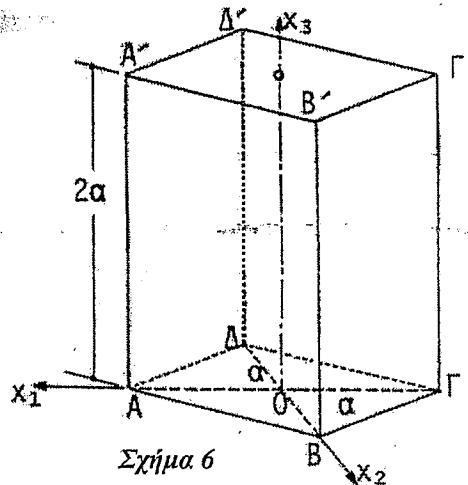
Το διάνυσμα των τάσεων στην έδρα  $\Delta AA'\Delta'$  είναι:

$$\vec{t}_2 = -8c \vec{i}_1 + c \vec{i}_2 + 2c \vec{i}_3.$$

Τέλος το διάνυσμα των τάσεων στην έδρα  $A'B'T'\Delta'$  είναι:

$$|\vec{t}_3| = 6c\sqrt{2}.$$

Να προσδιορισθεί ο τανυστής των τάσεων.



Σχήμα 6

### Άσκηση 7<sup>η</sup>

Το ορθογώνιο πρίσμα του Σχ.7 ( $\angle(A_1AB) = \angle(A_1A\Gamma) = 90^\circ$ ) ευρίσκεται υπό ομοιόμορφο τασικό πεδίο, το οποίο προεκλήθη από τα κάτωθι ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία:

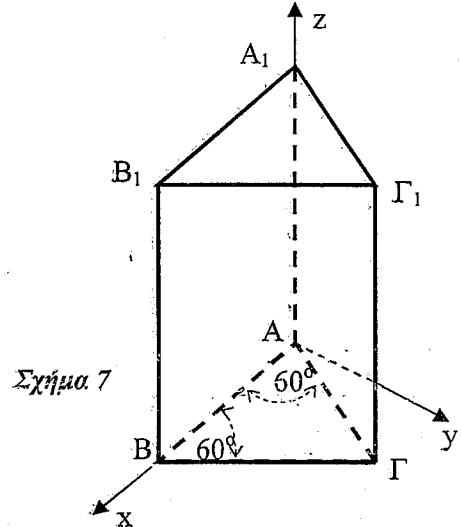
$\vec{t}_1$ : στην έδρα  $A_1B_1\Gamma_1$ ,  $-\vec{t}_1$ : στην έδρα  $AB\Gamma$ ,  $\vec{t}_2$ : στην έδρα  $B\Gamma\Gamma_1B_1$ ,  $\vec{t}_3$ : στην έδρα  $A\Gamma\Gamma_1A_1$  και  $\vec{t}_4$ : στην έδρα  $ABB_1A_1$ .

Δίνεται ότι:

$$\vec{t}_1 = (0, 2c, -2c), \vec{t}_2 = (-\sqrt{3}c, -c, c), \vec{t}_3 = (\sqrt{3}c, -c, c)$$

Να υπολογισθούν:

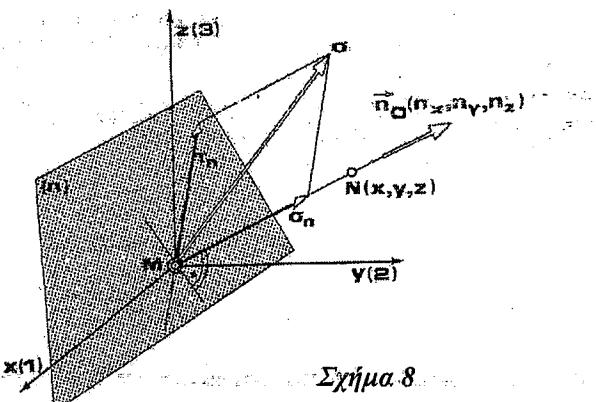
- Ο τανυστής των τάσεων.
- Οι συνιστώσες του διανύσματος  $\vec{t}_4$ .
- Οι κύριες τάσεις.



Σχήμα 7

### Άσκηση 8<sup>η</sup>

Θεωρούμε τις καθέτους επί των επιπέδων που διέρχονται από το σημείο  $M$  σώματος υπό ένταση (Σχ.8). Επί των καθέτων αυτών λαμβάνονται τμήματα  $MN = 1/\sqrt{\tau}$ , όπου  $\tau$  η διατμητική τάση που δρα στα αντίστοιχα επίπεδα. Να ευρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $N$  και η τομή του τόπου αυτού με τα επίπεδα των κυρίων τάσεων.



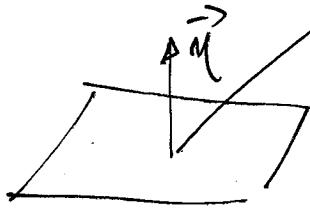
Σχήμα 8

# 10η - 11η Σερί - Τετρες Οδηγίες

Έστω τανυστής της τάσης στο  $\vec{t}$  διεύθυνση:

$$\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Αν αυτός ο τανυστής αντιβρέπεται σε ένα σώμα υπό ενταση, τότε αν κανουμε για ονοδιδύνοντας την τέσσερα στο σώμα αυτό, δεκτόποτε σε διάνυστη τάση (για  $\sigma_{xx}$  ελάχιστης, traction) στο ενισχυόμενης τοπούς. Τια να προσθέτετε τη διάνυστη τάση σημείου  $t$  στην πλανταρίστικη του τανυστή  $\vec{n}$  το τοναδιδιό διάνυστο  $\vec{n}$  του ενισχυόμενου στο ονοδιδύνοντας σημείο.



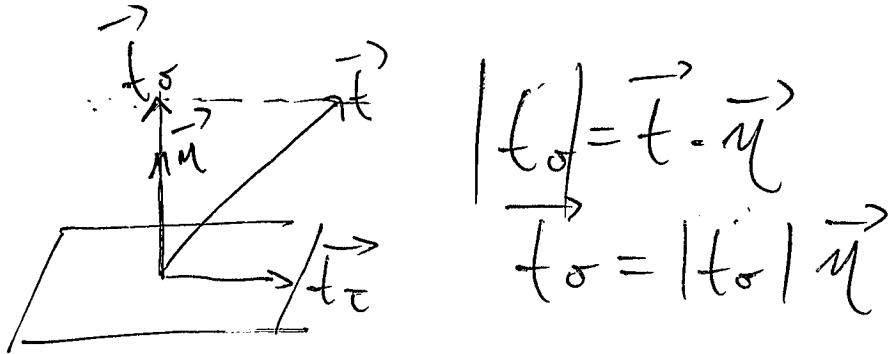
$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \text{ Μονάδια.}$$

$$\vec{t} = (t_x, t_y, t_z) \text{ Διάνυστη τάσης.}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} t_x = n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{xy} + n_z \sigma_{xz} \\ t_y = n_x \sigma_{yx} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{yz} \\ t_z = n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{zy} + n_z \sigma_{zz} \end{array} \right\}$$

Αν ηφέζουμε το  $\vec{t}$  σημείων στο  $\vec{n}$  διάνυστο την ορθή τάση πάνω στο ενισχυόμενο σημείο. (Το φέρομες)

(i)



$$|f_n| = \vec{f} \cdot \vec{n}$$

$$f_n = |f_n| \vec{n}$$

Av xafieσoufe to  $f_n$  anis  $\vec{n}$  Ia Δipoufe  
to δixuofe tis δiketikis τaisys tou enineδou  $f_n$ .

→ Σtis nroymjiteves xokides ian kavate otopofij  
teruotij τaisys, ouriaσtika nolendosifage tou teru-  
otij tis τaisys sto fuwsto oioτyfa fe to  
tou δiketiko δixuofe oco enineδo na dedafe va  
tetaxboufe.

Σtis 2 δiketikes, na dedafe va ppoife tis  
kiples τaises, xomorfonoloiße tous τinous  
$$\left( \sigma_{I,II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \right)$$

Σtis 3 δiketikes, npeleni va ppoife tis idiotifē  
tou teruotij tis τaises. Oi 3 idiotifēs eivai  
oi kiples τaises, kai oi autiσtixes δiketikatudoues  
tous eivai kai oi δixuofas tou kipiou ourmifatos.

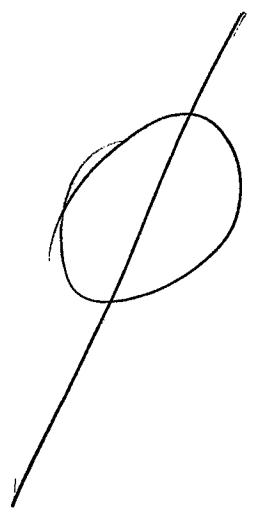
Όc 2 σεκοίδες που ήρενται να φέρεται διάφορα από  
6 και 7 ώρα το φύλλισμα 10.

Όλες οι υπόλοιπες αετοίδες έγιναν την ίδια  
φιλοσοφία. Πολλανδούσαντος του ταυτοτήτων  
ταύρων με το λυτίσταρχο φυλλίδιο (κανόνες  
Πλευρών, ορού τετά, με σωστές απρόποτες γωνίες,  
(ηραπότες κλπ.) βρίσκονται ορθά και διατηγόταν  
ταύρεις σαν πλευρά.

• Άλλες αετοίδες: φύλλισμα 10  $\xrightarrow{4}$

• φύλλισμα 11  $\begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 8 \end{matrix}$   $\xrightarrow{8}$   
 $\xrightarrow{9}$

(iii)



# Чиғанықы II - Пәннөсөлшем

(2013)

## 10 үй Зерттеу жүргізу

### Тароғатын Тасев

①

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 20x^3 + y^2 & 100 + 80y^2 & xz^3 + 30x^2y \\ 100 + 80y^2 & 30x^3 + 100 & 0 \\ xz^3 + 30x^2y & 0 & 30y^2 + 30z^3 \end{pmatrix}$$

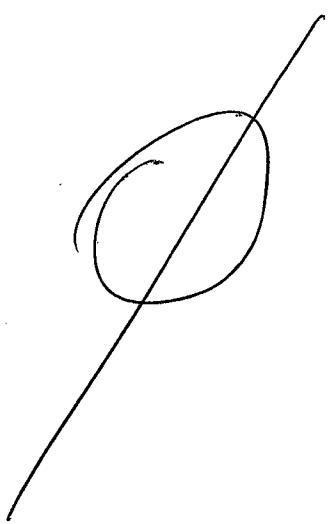
$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \rightarrow 60x^2 + 160y + 3xz^2 = -f_x(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \rightarrow f_y = 0$$

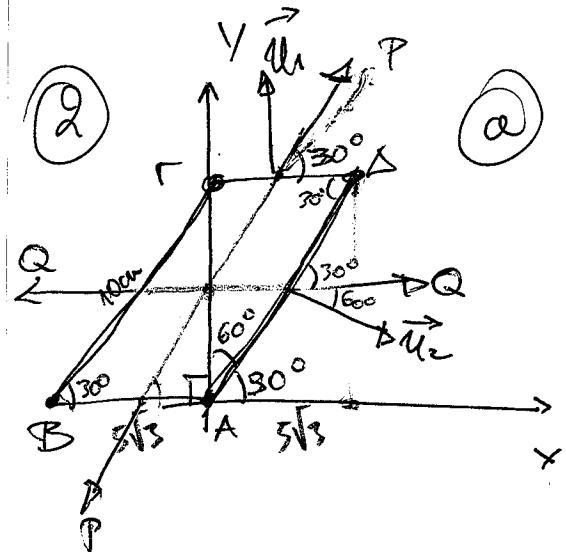
$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \rightarrow z^3 + 60xy + 90z^2 = -f_z(x, y, z)$$

$$f(x, y, z) = \left\{ \begin{array}{l} -(60x^2 + 160y + 3xz^2) \\ 0 \\ -(z^3 + 60xy + 90z^2) \end{array} \right\}$$

①



(2)



ⓐ  $\vec{P} = 173 \text{ N}$   $\vec{Q} = 100 \text{ N}$

$\vec{R}_1 = \vec{j}$   $\vec{R}_2 = \vec{i}$

$A(0,0)$   $D(5\sqrt{3}, 5)$

$\vec{AD} = (5\sqrt{3}, 5)$

$\vec{AD} \cdot \vec{R}_2 = 0 \rightarrow 5\sqrt{3}R_{2x} + 5R_{2y} = 0$   
 $R_{2y} = -\sqrt{3}R_{2x}$

$R_{2x}^2 + R_{2y}^2 = 1 \rightarrow R_{2x}^2 + 3R_{2x}^2 = 1$

$R_{2x} = \frac{1}{2}$   
 $\Rightarrow R_2 = \left( \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \right) \text{ cm.}$

$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} = \cos(30^\circ)P \vec{i} + (\sin 30^\circ)P \vec{j} \rightarrow \vec{P} = 1498 \vec{i} + 865 \vec{j} \text{ N}$

$\vec{f}_1 = \frac{\vec{P}}{|A|} = \frac{\vec{P}}{5\sqrt{3} \text{ cm}^2} \Rightarrow f_1 = \frac{1.498 \vec{i} + 0.865 \vec{j} \times 10^3}{5\sqrt{3} \times 10^{-4}} \rightarrow \vec{f}_1 = 1.73 \vec{i} + 1 \vec{j} \text{ MPa}$

$\vec{f}_2 = \frac{\vec{Q}}{|A_2|} = \frac{\vec{Q} (N)}{10 \text{ cm}^2} = \frac{1 \vec{i} \times 10^3}{10 \times 10^{-4}} \rightarrow \vec{f}_2 = 1 \vec{i} \text{ MPa}$

$\sigma_{xy} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{ix} \\ t_{iy} \end{pmatrix}$

$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xy} = 1.73 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} = 1 \text{ MPa} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\sigma_{xx} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{xy} = 1 \\ \frac{1}{2}\sigma_{yy} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{xy} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \sigma_{xx} = 5 \text{ MPa}$

$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 1.73 \\ 1.73 & 1 \end{pmatrix} \text{ MPa.}$   $\left[ \sigma_u = \sigma_{xx} = 5 \text{ MPa} \right] + \left[ \tau_u = \sigma_{xy} = 1.73 \text{ MPa} \right]$

③  $\tan(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2 \times 1.73}{5 - 1} = \frac{3.46}{4} \rightarrow 2\theta_p = \arctan(0.865)$

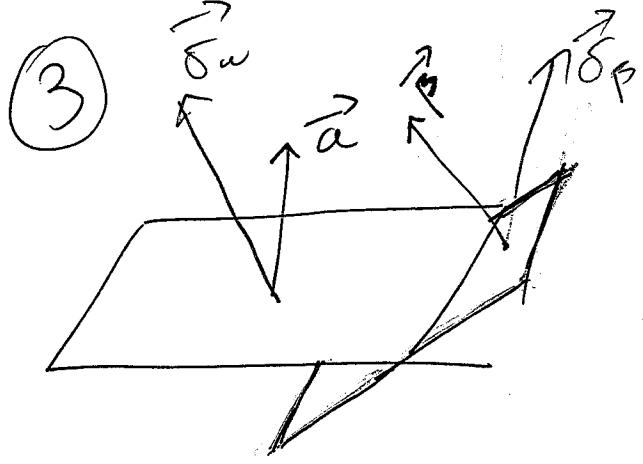
$\theta_p = 20.43^\circ$

(3)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\sigma_{xy})^2} = \frac{5+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$\sigma_{1,2} = 3 \pm \sqrt{7} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 5.64 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 0.35 \text{ MPa} \end{cases}$$

(4)



$$\vec{\sigma}_a = \begin{pmatrix} \sigma_{ax} \\ \sigma_{ay} \\ \sigma_{az} \end{pmatrix} \quad \vec{\sigma}_B = \begin{pmatrix} \sigma_{Bx} \\ \sigma_{By} \\ \sigma_{Bz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{ax} \\ \sigma_{ay} \\ \sigma_{az} \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_x \sigma_{xx} + a_y \sigma_{xy} + a_z \sigma_{xz} = \sigma_{ax} \\ a_x \sigma_{yx} + a_y \sigma_{yy} + a_z \sigma_{yz} = \sigma_{ay} \\ a_x \sigma_{zx} + a_y \sigma_{zy} + a_z \sigma_{zz} = \sigma_{az} \end{array} \right\} \circ \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_x \beta_x \sigma_{xx} + a_y \beta_x \sigma_{xy} + a_z \beta_x \sigma_{xz} + a_x \beta_y \sigma_{yx} + a_y \beta_y \sigma_{yy} + a_z \beta_y \sigma_{yz} + a_x \beta_z \sigma_{zx} + a_y \beta_z \sigma_{zy} + a_z \beta_z \sigma_{zz} = \vec{\sigma}_a \cdot \vec{\beta}. \quad (1)$$

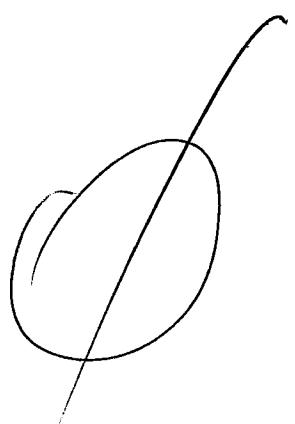
$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{px} \\ \sigma_{py} \\ \sigma_{pz} \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \beta_x \sigma_{xx} + \beta_y \sigma_{xy} + \beta_z \sigma_{xz} = \sigma_{px} \\ \beta_x \sigma_{yx} + \beta_y \sigma_{yy} + \beta_z \sigma_{yz} = \sigma_{py} \\ \beta_x \sigma_{zx} + \beta_y \sigma_{zy} + \beta_z \sigma_{zz} = \sigma_{pz} \end{array} \right\} \circ \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_x \beta_x \sigma_{xx} + a_y \beta_x \sigma_{xy} + a_z \beta_x \sigma_{xz} + a_x \beta_y \sigma_{yx} + a_y \beta_y \sigma_{yy} + a_z \beta_y \sigma_{yz} + a_x \beta_z \sigma_{zx} + a_y \beta_z \sigma_{zy} + a_z \beta_z \sigma_{zz} = \vec{\sigma}_B \cdot \vec{a} \quad (2)$$

(5)

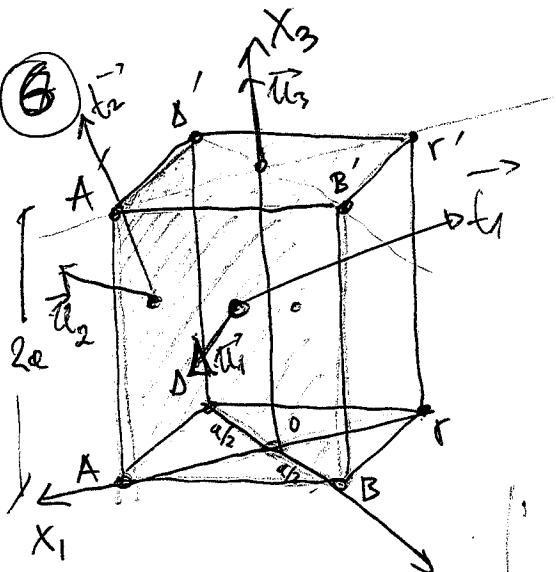
$\frac{(1) \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}}{(2) \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}}$

$\left[ \vec{\sigma}_a \cdot \vec{\beta} = \vec{\sigma}_B \cdot \vec{a} \right]$



/





$$\begin{aligned} &A\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) \\ &\Delta\left(0, \frac{a}{2}, 0\right) \quad \vec{d} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right) \\ &\Delta'\left(0, \frac{a}{2}, 2a\right) \quad \vec{d}' = (0, 0, 2a) \end{aligned}$$

$$\cdot \vec{u}_1 = \frac{\vec{AB} \times \vec{AA'}}{|\vec{AB} \times \vec{AA'}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{vmatrix}}{|\vec{u}_1|} = \frac{\vec{i}\left(\frac{a}{2}2a\right) - \vec{j}\left(-\frac{a}{2}2a\right)}{|\vec{u}_1|}$$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{i}^2 + \vec{j}^2}{\sqrt{(\vec{a})^2 + (\vec{a})^2}} = \frac{\vec{i}^2 + \vec{j}^2}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow$$

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\cdot \vec{u}_2 = \frac{\vec{DA} \times \vec{DD'}}{|\vec{u}_2|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{vmatrix}}{|\vec{u}_2|} = \frac{\vec{i}\left(\frac{a}{2}2a\right) + \vec{j}\left(\frac{a}{2}2a\right)}{|\vec{u}_2|} = \dots \vec{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\vec{u}_3 \equiv \vec{i}_3.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{1x_1} & \sigma_{1x_2} & \sigma_{1x_3} \\ \sigma_{2x_1} & \sigma_{2x_2} & \sigma_{2x_3} \\ \sigma_{3x_1} & \sigma_{3x_2} & \sigma_{3x_3} \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{ix_1} \\ u_{ix_2} \\ u_{ix_3} \end{pmatrix}}_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} t_{ix_1} \\ t_{ix_2} \\ t_{ix_3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} i=1 \rightarrow I \\ i=2 \rightarrow II \\ i=3 \rightarrow III \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &I \rightarrow u_{1x_1} \sigma_{1x_1} + u_{1x_2} \sigma_{1x_2} = t_{1x_1} \\ &u_{1x_1} \sigma_{2x_1} + u_{1x_2} \sigma_{2x_2} = t_{2x_1} \\ &u_{1x_1} \sigma_{3x_1} + u_{1x_2} \sigma_{3x_2} = t_{3x_1} \end{aligned} \quad \left. \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{1x_1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{1x_2} = 4c \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{2x_1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{2x_2} = 11c \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{3x_1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_{3x_2} = 6c \end{cases} \right\} \textcircled{I}$$

$$\left. \begin{cases} \sigma_{1x_1} + \sigma_{1x_2} = 4\sqrt{2}c \\ \sigma_{2x_1} + \sigma_{2x_2} = 11\sqrt{2}c \\ \sigma_{3x_1} + \sigma_{3x_2} = 6\sqrt{2}c \end{cases} \right\} \textcircled{I}$$

7

$$\det \xi = 0$$

$$\text{II} \rightarrow U_1 X_1 \sigma_1 x_1 + U_2 X_2 \sigma_1 x_2 = f_2 x_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_1 x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_1 x_2 = -\sigma_2 c \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_2 x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_2 x_2 = c \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_3 x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_3 x_2 = 2c \end{array} \right.$$

$$U_2 X_2 \sigma_2 x_1 + U_2 X_2 \sigma_2 x_2 = f_2 x_2$$

$$U_2 X_2 \sigma_3 x_1 + U_2 X_2 \sigma_3 x_2 = f_2 x_3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 x_1 - \sigma_1 x_2 = -\sigma_2 \sqrt{2} c \\ \sigma_2 x_1 - \sigma_2 x_2 = \sigma_2 c \\ \sigma_3 x_1 - \sigma_3 x_2 = 2\sigma_2 c \end{array} \right. \quad \text{II}$$

$$\text{I+II} \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \sigma_1 x_1 = -2\sigma_2 c \\ \sigma_2 x_1 = 6\sigma_2 c \\ \sigma_3 x_1 = 4\sigma_2 c \end{array} \right] \xrightarrow{\text{I}} \left[ \begin{array}{l} \sigma_1 x_2 = 6\sigma_2 c \\ \sigma_2 x_2 = 5\sigma_2 c \\ \sigma_3 x_2 = 2\sigma_2 c \end{array} \right]$$

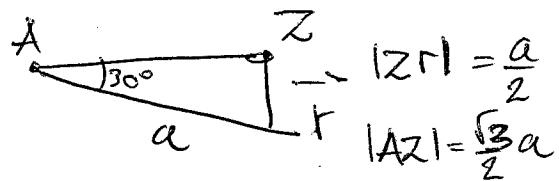
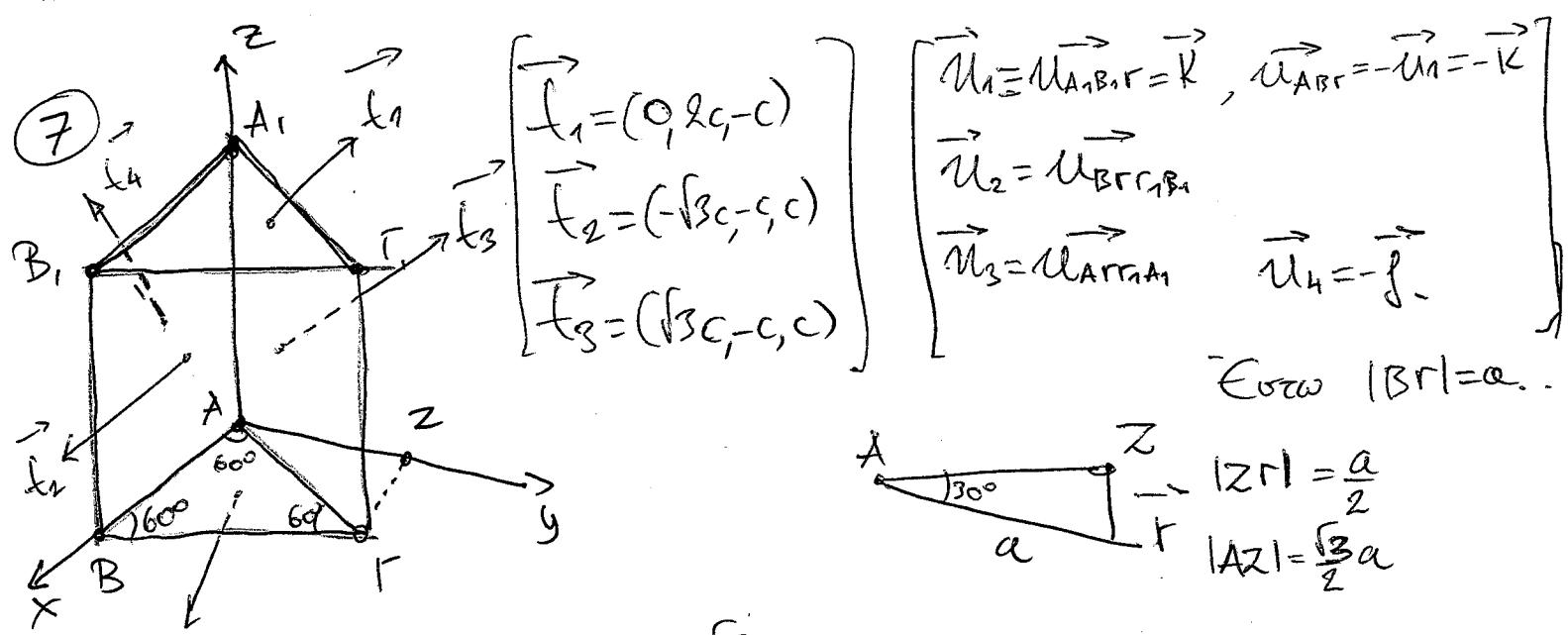
$$O_{ij} = \begin{pmatrix} -2\sigma_2 c & 6\sigma_2 c & \sigma_3 x_3 \\ 6\sigma_2 c & 5\sigma_2 c & \sigma_2 x_3 \\ 4\sigma_2 c & 2\sigma_2 c & \sigma_3 x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{symm}} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & \sigma_3 x_3 \end{pmatrix} \sqrt{2} c \quad \text{verg.}$$

$$t_3 = 4\sqrt{2} \vec{c} + 2\sqrt{2} c \vec{j} + \sigma_3 x_3 \vec{k} \quad |t_3| = 6c\sqrt{2} \rightarrow$$

$$\sqrt{2(16 \cdot 2 + 4 \cdot 2) + \sigma_3 x_3^2} = 6c\sqrt{2} \rightarrow$$

$$c^2(32 + 8) + \sigma_3 x_3^2 = 36c^2 \cdot 2 \rightarrow \sigma_3 x_3^2 = 32c^2 \rightarrow \underline{\underline{\sigma_3 x_3 = 4\sqrt{2} c}}$$

$$\sim O_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sqrt{2} c$$



$$\vec{x}_1 = B(a, 0, 0) \quad r\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right)$$

$$\vec{B}\vec{C} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right) \quad \vec{u}_2 = u_{2x}\vec{i} + u_{2y}\vec{j} + u_{2z}\vec{k}$$

$$\vec{B}\vec{C} \cdot \vec{u}_2 = 0 \rightarrow -\frac{a}{2}u_{2x} + \frac{\sqrt{3}}{2}a u_{2y} = 0 \Rightarrow u_{2x} = \sqrt{3}u_{2y}$$

$$u_{2x}^2 + u_{2y}^2 + u_{2z}^2 = 1 \rightarrow (\sqrt{3}u_{2y})^2 + (u_{2y})^2 = 1 \rightarrow u_{2y} = \frac{1}{2} \quad (u_{2y} = \pm \frac{1}{2} \text{ case 1})$$

$$\therefore u_{2y} = \frac{1}{2} \quad (u_{2y} = \frac{1}{2} \text{ case 2}) \rightarrow u_{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{\vec{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)}$$

$$\vec{A}\vec{C} = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right), \quad \vec{u}_3 = u_{3x}\vec{i} + u_{3y}\vec{j} + u_{3z}\vec{k}$$

$$\vec{A}\vec{C} \cdot \vec{u}_3 = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{2}u_{3x} + \frac{\sqrt{3}}{2}u_{3y}\right)a = 0 \rightarrow u_{3x} = -\sqrt{3}u_{3y} \rightarrow \dots \rightarrow \vec{u}_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

a)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1x} & \sigma_{1y} & \sigma_{1z} \\ \sigma_{2x} & \sigma_{2y} & \sigma_{2z} \\ \sigma_{3x} & \sigma_{3y} & \sigma_{3z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1z} \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\sigma_{ij} \cdot u_{ij}}_{i=1} = \underbrace{f_{ij}}_{i=2} \rightarrow \underbrace{\sigma_{ij} \cdot u_{ij}}_{i=3} = f_{ij}$$

(g)

$$\underset{i=1}{\rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1z} = f_{1x} = 0 \\ \sigma_{2z} = f_{1y} = 2c \\ \sigma_{3z} = f_{1z} = -c \end{array} \right\} \quad \underset{i=2}{\rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1x}u_{2x} + \sigma_{1y}u_{2y} + \sigma_{1z}u_{2z} = -\sqrt{3}c \\ \sigma_{2x}u_{2x} + \sigma_{2y}u_{2y} + \sigma_{2z}u_{2z} = -c \\ \sigma_{3x}u_{2x} + \sigma_{3y}u_{2y} + \sigma_{3z}u_{2z} = c \end{array} \right\}$$

~~det~~  $\tilde{\sigma}_{2z} = 0 \Rightarrow$

$$M_3 = \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{1x} + \frac{1}{2}\sigma_{1y} = -\sqrt{3}c \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{2x} + \frac{1}{2}\sigma_{2y} = -c \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{3x} + \frac{1}{2}\sigma_{3y} = c \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3}\sigma_{1x} + \sigma_{1y} = -2\sqrt{3}c \\ \sqrt{3}\sigma_{2x} + \sigma_{2y} = -2c \\ \sqrt{3}\sigma_{3x} + \sigma_{3y} = 2c \end{array} \right\} \quad \textcircled{II}$$

$$\underset{i=3}{\rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1x}u_{3x} + \sigma_{1y}u_{3y} + \sigma_{1z}u_{3z} = \sqrt{3}c \\ \sigma_{2x}u_{3x} + \sigma_{2y}u_{3y} + \sigma_{2z}u_{3z} = -c \\ \sigma_{3x}u_{3x} + \sigma_{3y}u_{3y} + \sigma_{3z}u_{3z} = c \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_3 = \dots \\ -\sqrt{3}\sigma_{1x} + \sigma_{1y} = 2\sqrt{3}c \\ -\sqrt{3}\sigma_{2x} + \sigma_{2y} = -2c \\ -\sqrt{3}\sigma_{3x} + \sigma_{3y} = 2c \end{array} \right\} \quad \textcircled{III}$$

$$\textcircled{II} + \textcircled{III} \rightarrow \sigma_{1y} = 0, \sigma_{2y} = -2c, \sigma_{3y} = 2c.$$

$$\rightarrow \sigma_{1x} = -2c, \sigma_{2x} = 0, \sigma_{3x} = 0 \quad \Rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} c$$

$$\textcircled{B} \quad \sigma_{ij} \cdot \underline{u}_4 = f_4 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{4x} \\ f_{4y} \\ f_{4z} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} f_{4x} = 0 \\ f_{4y} = +2c \\ f_{4z} = -2c \end{cases} \rightarrow f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ +2 \\ -2 \end{pmatrix} c$$

$$\rightarrow f_4 = (+2\vec{j} - 2\vec{k})c$$

$$\det(\sigma_{ij} - \textcircled{A}I) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -2-2 & 0 & 0 \\ 0 & -2-2 & 2 \\ 0 & 2 & -1-2 \end{pmatrix} c = 0 \rightarrow \dots \rightarrow (-2-2)(2^2 + 3 \cdot 2 - 2) = 0.$$

$$\rightarrow \lambda_1 = -2c$$

$$\rightarrow \lambda_2 = -\frac{3+\sqrt{17}}{2}c$$

$$\rightarrow \lambda_3 = -\frac{3-\sqrt{17}}{2}c$$

$$\sigma_I = -2c$$

$$\sigma_{II} = -\frac{3+\sqrt{17}}{2}c$$

$$\sigma_{III} = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}c$$

(10)

# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηράκλειο Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη

Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Τηλέφωνα Γραφείου: 210-7721313, 210-7721263,

Τηλέφωνα Εργαστηρίων: Εμβοληματικής 210-7724235, 210-7721317, Φυσικών Δομικών Λίθων:

210-7724025. Οπτικών Μεθόδων: 210-7721302

Τηλεομοιότυπο: 2107721302

Διεύθυνση πλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr



## ΜΗΧΑΝΙΚΗ II (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ)

### 11<sup>η</sup> Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

#### Ασκήσεις επί την τανυστή των τάσεων (συνέχεια)

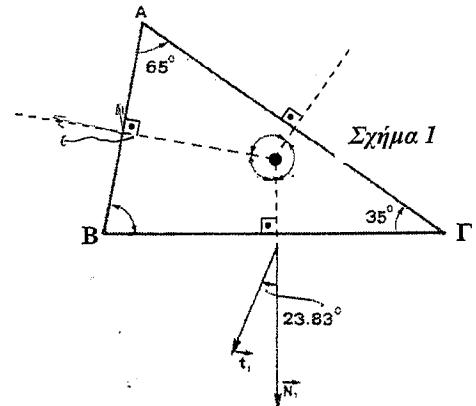
##### Ασκηση 1<sup>η</sup>

Για το εξαιρετικά μικρών διαστάσεων πρίσμα του Σχ.1 γνωρίζετε ότι το διάνυσμα τάσεως στην έδρα  $BG$  έχει μέτρο:

$$|\bar{t}_1| = 5957.7 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

και σχηματίζει γωνία  $23.88^\circ$  με την κάθετη στην έδρα  $BG$ . Δίνεται επίσης ότι το επίπεδο  $AG$  είναι κύριο. Να ευρεθούν:

- Το μέτρο του διανύσματος τάσης που δρα στο επίπεδο  $AG$ .
- Το διάνυσμα της τάσης που δρα στο επίπεδο  $BP\Delta AB$

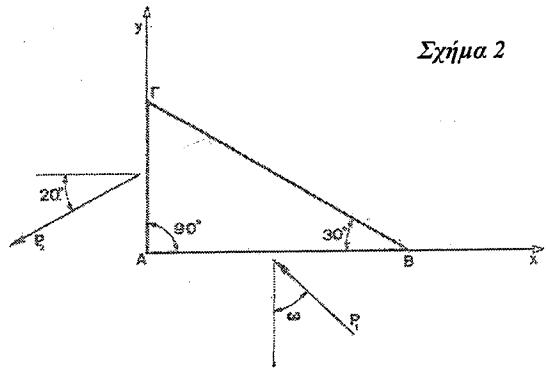


##### Ασκηση 2<sup>η</sup>

Στις έδρες  $AB$  και  $AG$  στοιχειώδους πρίσματος (Σχ.2) που βρίσκεται στο εσωτερικό ισορροπούντος σώματος ασκούνται οι δυνάμεις  $P_1=8 \text{ kN}$  και  $P_2=10 \text{ kN}$ . Ναυπολογισθούν:

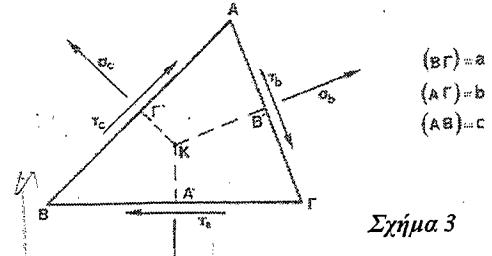
- Η γωνία που σχηματίζει η  $P_1$  με την κάθετη στην έδρα  $AB$ .
- Η ορθή και διατμητική τάση που δρουν στην έδρα  $BG$ .

Δίνεται ότι  $BG=1 \text{ mm}$  και ότι το πάχος του πρίσματος είναι  $t=1 \text{ mm}$



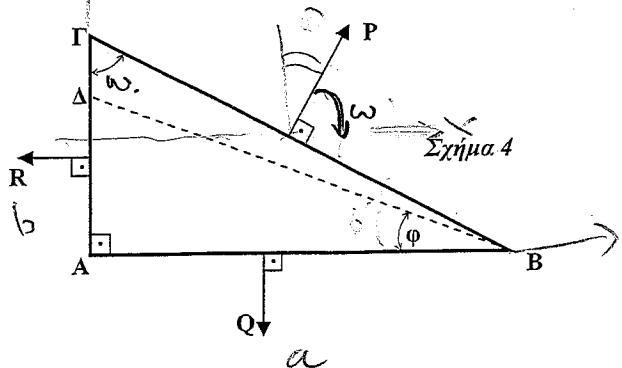
##### Ασκηση 3<sup>η</sup>

Να ευρεθεί η σχέση μεταξύ των διατμητικών τάσεων  $\tau_a$ ,  $\tau_b$ ,  $\tau_c$  που δρουν στις τρεις έδρες του στοιχειώδους τριγωνικού πρίσματος του Σχ.3 που έχει αποκοπεί από το εσωτερικό ισορροπούντος υπό επίπεδη εντατική κατάσταση σώματος



##### Ασκηση 4<sup>η</sup>

Στις έδρες του πρίσματος  $ABG$  με  $(AB)=a$ ,  $(AG)=b$  και  $(BG)=g$  δρουν οι κάθετες επί των αντιστοίχων εδρών δυνάμεις  $R$ ,  $Q$  και  $P$ , όπως φαίνεται στο Σχ.4. Θεωρώντας το τασικό πεδίο ομογενένς να ευρεθεί ο τανυστής των τάσεων καθώς και η ορθή και διατμητική τάση στο τυχαίο επίπεδο  $BD$ .

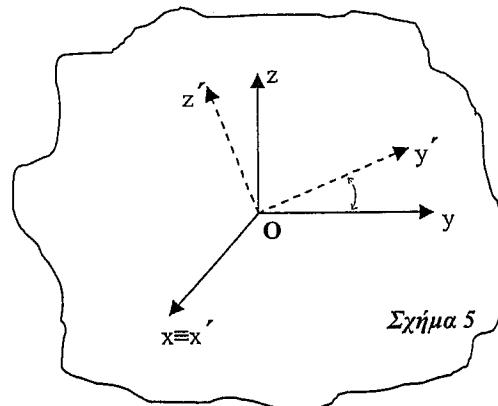


### Άσκηση 5<sup>η</sup>

Στο σημείο Ο φορτισμένου σώματος ο τανυστής των τάσεων δίνεται ως:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 300 & -200 & 0 \\ -200 & 400 & 100 \\ 0 & 100 & 300 \end{pmatrix} \text{ Pa}$$

- α. Να ευρεθεί ο τανυστής των τάσεων σε σύστημα συντεταγμένων που προκύπτει από περιστροφή του αρχικού συστήματος Oxyz πέριξ του άξονα Oy κατά  $30^\circ$  (Σχ.4)
- β. Να υπολογισθούν οι αναλλοίωτες του τανυστή σε κάθε σύστημα αναφοράς χωριστά και να σχολιασθεί το αποτέλεσμα ?



### Άσκηση 6<sup>η</sup>

Ο τανυστής της τάσης σε τυχόν σημείο φορτιζομένου σώματος δίνεται ως:  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$

Να προσδιορισθούν οι κύριες τάσεις και οι κύριες διευθύνσεις. Το αυτό για τον τανυστή:  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 7 & 10 & 5 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \text{ MPa}$

### Άσκηση 7<sup>η</sup>

- α. Στο σημείο P φορτισμένου σώματος δίνεται ο τανυστής των τάσεων  $\sigma_{ij}$ ,  $i,j=x,y,z$ . Να ευρεθούν τα συνημίτονα κατεύθυνσης του μοναδιαίου διανύσματος  $\vec{T}$  της διατμητικής τάσης που δρα στο επίπεδο με κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{N}(l,m,n)$ .

- β. Αν είναι  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 4 \\ 8 & 16 & -10 \\ 4 & -10 & 24 \end{pmatrix} \text{ MPa}$ ,  $i,j=x,y,z$ , να προσδιορισθούν η ορθή και η διατμητική τάση που δρουν στο δια του P επίπεδο με εξίσωση  $2x-3y+4z=3$ .

### Άσκηση 8<sup>η</sup>

Στο σημείο P φορτισμένου σώματος δίνονται οι κύριες τάσεις  $\sigma_1$ ,  $\sigma_{II}$  και  $\sigma_{III}$ . Σε κάθε επίπεδο που διέρχεται από το P φέρνουμε την κάθετη σ' αυτό και επ' αυτής λαμβάνεται ευθύγραμμο τμήμα μήκους  $(PN) = \pm \sqrt{\sigma}$  όπου σημείων N.

### Άσκηση 9<sup>η</sup>

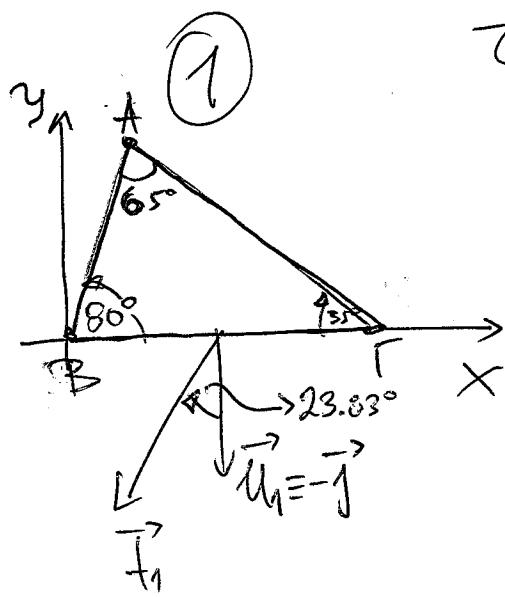
Δίνεται το μητρώο:  $\begin{pmatrix} c_1yz & c_4z^2 & c_5y^2 \\ c_4z^2 & c_2xz & c_6x^2 \\ c_5y^2 & c_6x^2 & c_3xy \end{pmatrix}$ . Θα μπορούσε και υπό ποιες προϋποθέσεις να παριστά τον τανυστή των τάσεων στο σύστημα (xyz); Οι παράμετροι  $c_i$ ,  $i=1\dots 6$  είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

# Мүжінкі II-Рафаданоффо

(2013)

11нг Зерттеулер

Тароғынан тәсеккүр (Джексен)



$$|f_1| = 5957.5 \text{ N/cm}^2$$

$$\textcircled{a} \quad \vec{f}_1 = -f_{1x}\vec{i} + f_{1y}\vec{j}$$

$$\cos(23.88)^\circ = \frac{f_{1y}}{f_1} \rightarrow f_{1y} = 0.914 \times f_1$$

$$|f_{1y}| = 5445.3 \text{ N/cm}^2$$

$$f_{1x}^2 + f_{1y}^2 = f_1^2 \rightarrow f_{1x}^2 = f_1^2 - f_{1y}^2 \rightarrow f_{1x}^2 = 35491806 - 29651292$$

$$f_{1x} = 2416.7 \text{ N/cm}^2$$

$$\vec{f}_1 = -2416.7\vec{i} - 5445.3\vec{j}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2416.7 \\ -5445.3 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_{xy} = 2416.7 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_{yy} = 5445.3 \text{ N/cm}^2$$

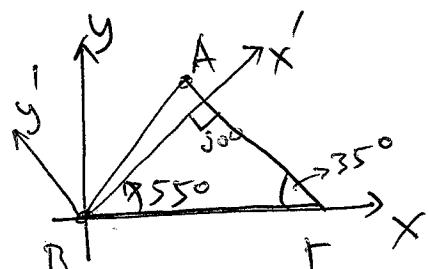
$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 2416.7 \\ 2416.7 & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \text{ N/cm}^2 \rightarrow \text{Жағынан тәсеккүр } 55^\circ.$$

$$y'x' \rightarrow \text{күпіл} \rightarrow \sigma_{xy}' = 0$$

$$\sigma_{xy}' = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \sin(110) + \sigma_{xy} \cos(110)$$

$$0 = -(\sigma_{xx} - 5445.3) \times 0.34 + 2416.7 \times 2 \times 0.342$$

$$\textcircled{1} \quad \boxed{\sigma_{xx} = 3686.9 \text{ N/cm}^2}$$



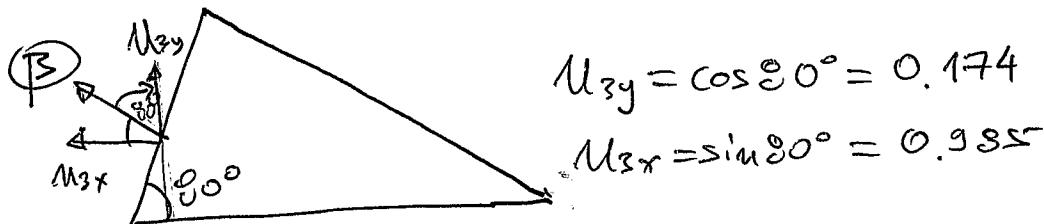
$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3686.8 & 2416.7 \\ 2416.7 & 5445.3 \end{pmatrix} \text{ N/cm}^2$$

$$\vec{u}_{AR} = \sin 35^\circ \vec{i} + \cos 35^\circ \vec{j}$$

$$\vec{u}_{Ar} = 0.573 \vec{i} + 0.819 \vec{j}$$

$$\begin{pmatrix} 3686.8 & 2416.7 \\ 2416.7 & 5445.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.573 \\ 0.819 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x^{Ar} \\ f_y^{Ar} \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_x^{Ar} = 4091.8 \text{ N/cm}^2 \\ f_y^{Ar} = 5844.5 \text{ N/cm}^2 \end{array} \right\} \rightarrow |f_{Ar}| = \sqrt{(4091.8)^2 + (5844.5)^2} \\ [f_{Ar}] = 7134.5 \text{ N/cm}^2$$



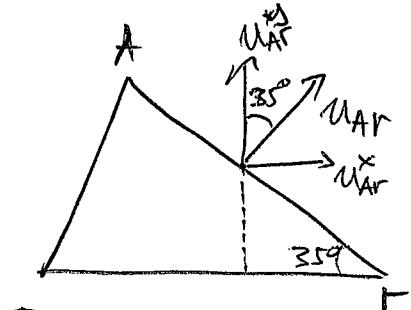
$$u_{3y} = \cos 80^\circ = 0.174$$

$$u_{3x} = \sin 80^\circ = 0.985$$

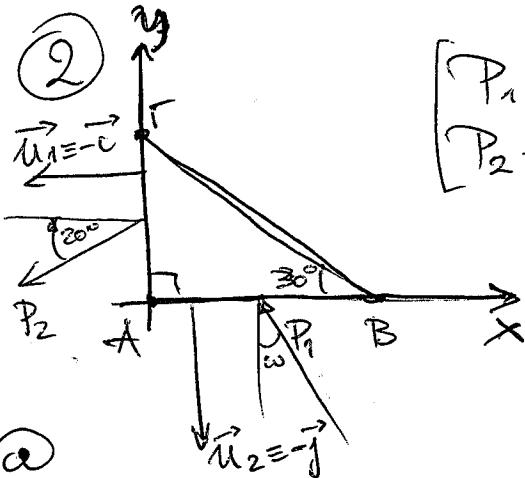
$$\begin{pmatrix} 3686.8 & 2416.7 \\ 2416.7 & 5445.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.174 \\ 0.985 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_3 = -f_{3x} \vec{i} + f_{3y} \vec{j} = (0.174 \times 3686.8 + 0.985 \times 2416.7) \vec{i} + (0.174 \times 2416.7 + 0.985 \times 5445.3) \vec{j}$$

$$[\vec{f}_3 = 3022 \vec{i} + 5784.1 \vec{j} \text{ N/cm}^2]$$



(2)



$$\begin{cases} P_1 = 8 \text{ kN} \\ P_2 = 10 \text{ kN} \end{cases}$$

~~Ansatz~~

$$\sin 30^\circ = \frac{r_A}{10^3} \rightarrow r_A = 0.5 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AB}{r_B} \rightarrow AB = 0.866 \times 10^{-3} \text{ m}$$

③

$$P_{2x}$$

$$\sin 20^\circ = \frac{P_{2y}}{P_2} \rightarrow P_{2y} = 3.42 \text{ kN}$$

$$\cos 20^\circ = \frac{P_{2x}}{P_2} \rightarrow P_{2x} = 9.4 \text{ kN}$$

$$\vec{f}_{\sigma_{xx}} = \vec{f}_{\sigma_{xx}} + \vec{f}_{\sigma_{xy}}$$

$$\vec{f}_{\sigma_{xx}} = -\vec{i} \frac{P_{2x}}{A r_A} = -\vec{i} \frac{9.4 \times 10^3}{0.5 \times 10^3 \times 10^{-3}} = -18.48 \vec{i} \text{ GPa.}$$

$$\vec{f}_{\sigma_{xy}} = -\vec{j} \frac{P_{2y}}{A r_A} = -\vec{j} \frac{3.42 \times 10^3}{0.5 \times 10^3 \times 10^{-3}} = -6.48 \vec{j} \text{ GPa.}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18.48 \\ -6.48 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} -\sigma_{xx} &= -18.48 \\ -\sigma_{yx} &= -6.48 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 18.48 & 6.48 \\ 6.48 & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \text{ GPa.}$$

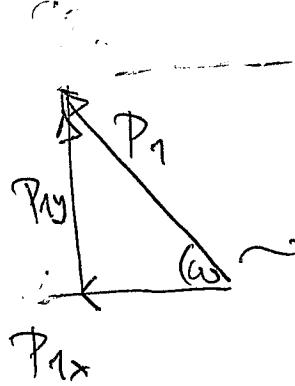
$$\underbrace{\sigma_{ij} \cdot n_2}_{} = f_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 18.48 & 6.48 \\ 6.48 & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \end{pmatrix}$$

$$f_{2x} = -6.48 \text{ GPa} \rightarrow f_{2x} = \frac{|P_{1x}|}{A} \rightarrow |P_{1x}| = 0.866 \times 10^{-3} \cdot 6.48 \times 10^3 \times 10^{-3}$$

$$f_{2y} = -\sigma_{yy}.$$

③

$$\underline{|P_{1x}| = 5.61 \text{ kN.}}$$



$$\cos \omega = \frac{P_{1x}}{P_1} = \frac{5.61}{8} = 0.701 \rightarrow \boxed{\omega \approx 45^\circ}$$

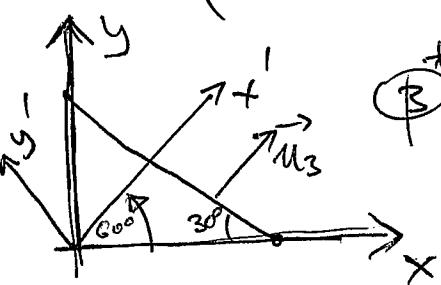
$$\sqrt{P_{1x}^2 + P_{1y}^2} = P_1 \rightarrow P_{1x}^2 + P_{1y}^2 = P_1^2 \rightarrow P_{1y}^2 = 64 - 31.47$$

$$\boxed{P_{1y} = 5.7 \text{ kN}}$$

$$t_{zy} = \frac{P_{1y}}{|A_2|} = \frac{5.7 \times 10^3}{0.866 \times 10^{-6}} = 6.58 \text{ GPa.}$$

$$\vec{t}_{zy} = 6.58 \vec{j} \rightarrow \sigma_{yy} = -6.58 \text{ GPa.}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 18.48 & 6.48 \\ 6.48 & -6.58 \end{pmatrix} \text{ GPa.}$$



3) Тріофілі тангенційна ката  $60^\circ$ .

$$\sigma_{xx}' = \frac{18.48 + (-6.58)}{2} + \frac{18.48 + 6.58}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} (6.48)$$

$$\boxed{\sigma_{xx}' = 5.3 \text{ GPa.} | \text{ Осьдм'}}$$

$$\sigma_{yy}' = \frac{18.48 - 6.58}{2} - \frac{18.48 + 6.58}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} (6.48)$$

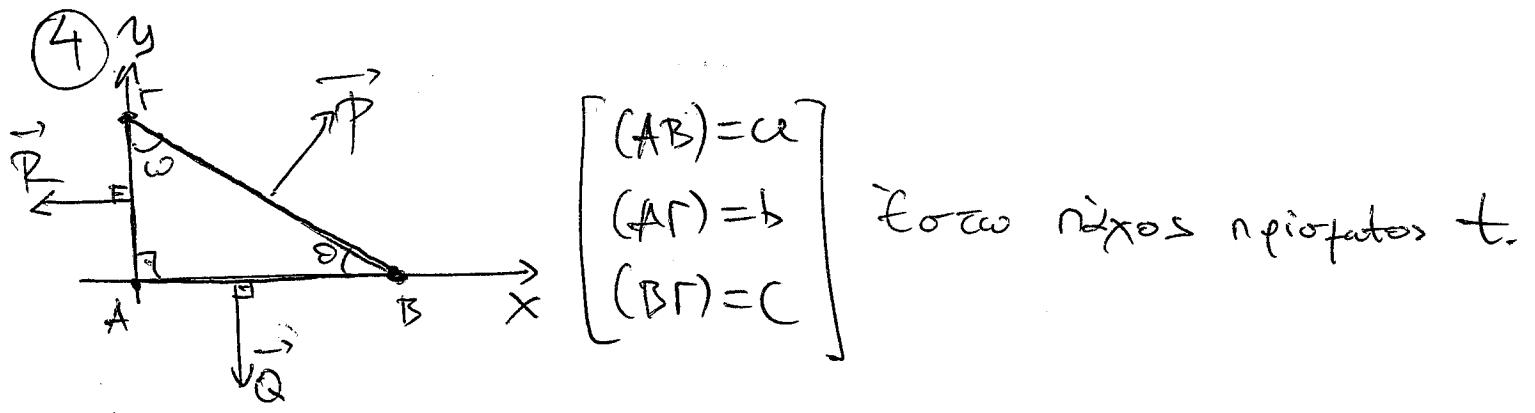
$$\boxed{\sigma_{yy}' = 3.47 \text{ GPa.}}$$

$$\sigma_{xy}' = -\frac{18.48 + 6.58}{2} 0.866 + 6.48 \left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \boxed{\sigma_{xy}' = 14.09 \text{ GPa.} | \text{ Діагональ}}$$

⊕ Оточіння:

$$\begin{pmatrix} 18.48 & 6.48 \\ 6.48 & -6.58 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \leftarrow \overset{\rightarrow}{\mu_3} = \begin{pmatrix} t_{3x} \\ t_{3y} \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\sigma_{xx} = t_3 \cdot \overset{\rightarrow}{\mu_3}}$$

(4)



$$\left[ \begin{array}{l} \tan \alpha = \frac{b}{c} \quad \cos \beta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \end{array} \right] \textcircled{I} \quad \vec{M}_{AF} = -\vec{c}, \quad \vec{F}_{AF} = \frac{R}{b} (-\vec{c}) = -\frac{R}{b} \vec{c}$$

$$\vec{M}_{AB} = -\vec{j}, \quad \vec{F}_{AB} = \frac{Q}{c} (-\vec{j}) = -\frac{Q}{c} \vec{j}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

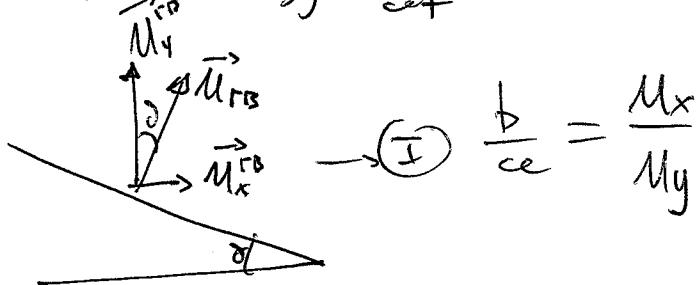
$$-\sigma_{xx} = -\frac{R}{b} \rightarrow \sigma_{xx} = \frac{R}{b}$$

$$\sigma_{yx} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{Q}{c} \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{yy} = \frac{Q}{c}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{R}{b} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \frac{Q}{c} \end{pmatrix}$$



$$\left. \begin{array}{l} M_y = \frac{a}{b} M_x \\ M_x = \frac{b}{a} M_y \\ M_x^2 + M_y^2 = 1 \end{array} \right\} \quad \frac{b^2}{a^2} M_x^2 + M_x^2 = 1 \rightarrow M_x^2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \rightarrow M_x = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow M_y = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

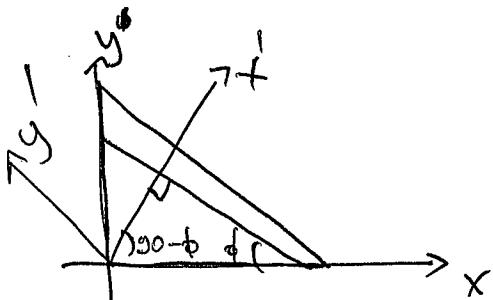
$$\vec{F}_{AB} = \frac{P}{ct} \vec{u} = \frac{Pb}{c^2 t} \vec{i} + \frac{Pa}{c^2 t} \vec{j}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} \frac{P}{ct} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \frac{Q}{ct} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b}{c} \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Pb}{ct} \\ \frac{Pa}{c^2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{P}{ct} \frac{b}{c} + \frac{\alpha}{c} \sigma_{xy} = \frac{Pb}{ct} \\ \sigma_{yx} \frac{b}{c} + \frac{\alpha}{c} \frac{Q}{ct} = \frac{Pa}{c^2t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{P}{ct} + \alpha \sigma_{xy} = \frac{Pb}{ct} \\ b \sigma_{yx} + \frac{Q}{ct} = \frac{Pa}{ct} \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \sigma_{xy}(ct+b) + \frac{(P+Q)}{ct} = \frac{P}{ct}(ct+b) \\ &\sigma_{xy} = \frac{P}{ct} - \frac{(P+Q)}{ct(ct+b)}. \end{aligned}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{P}{ct} & \frac{P}{ct} - \frac{(P+Q)}{ct(ct+b)} \\ \frac{P}{ct} - \frac{(P+Q)}{ct(ct+b)} & \frac{Q}{ct} \end{pmatrix}$$



Trigoform Kette 10-phi.

$$\sigma_{xy} \rightarrow \sigma_{xx}' \rightarrow \sigma_{xx}'(\phi) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(90 - \phi) + \sigma_{xy} \sin(90 - \phi).$$

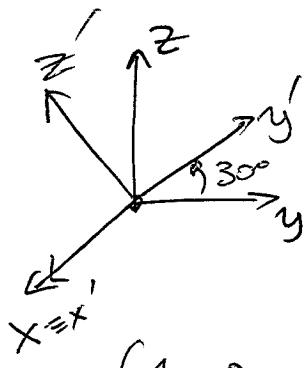
$$\Delta \text{Wtf}/\text{km} \rightarrow \sigma_{xy} \rightarrow \sigma_{xy}'(\phi) = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(90 - \phi) + \sigma_{xy} \cos(90 - \phi)$$

$$\sigma_{xx}'(\phi) = \frac{Ra+bt}{2abt} + \frac{Rd-b}{2abt} t \cos(90 - \phi) + \left[ \frac{P}{ct} - \frac{(P+Q)}{ct(ct+b)} \right] \sin(90 - \phi)$$

$$\sigma_{xy}'(\phi) = -\frac{Rd-b}{2abt} \sin(90 - \phi) + \left[ \frac{P}{ct} - \frac{(P+Q)}{ct(ct+b)} \right] \cos(90 - \phi).$$

(6)

(5)



$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 300 & -200 & 0 \\ -200 & 400 & 100 \\ 0 & 100 & 300 \end{pmatrix} \text{ Pa.}$$

(a)  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.866 \end{pmatrix}$

$$\sigma'_{ij} = \alpha^T \sigma_{ij} \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.866 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 & -200 & 0 \\ -200 & 400 & 100 \\ 0 & 100 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.866 \end{pmatrix}$$

$$\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} 300 & -173.2 & 100 \\ -173.2 & 461.6 & 6.7 \\ 100 & 6.7 & 238.4 \end{pmatrix} \text{ Pa.}$$

(B)  $I = \text{tr}(\sigma_{ij}) = 300 + 400 + 300 = 1000 \text{ Pa}$

$$I' = \text{tr}(\sigma'_{ij}) = 300 + 461.6 + 238.4 = 1000 \text{ Pa}$$

$$\underline{I = I'}$$

$$II = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2$$

$$II = 300 \times 400 + 300^2 + 400 \times 300 - (200)^2 - 0^2 - 100^2$$

$$II = 33 \times 10^4 - 4 \times 10^4 - 10^4 = 22 \times 10^4$$

$$II' = 300 \times 461.6 + 300 \times 238.4 + 461.6 \times 238.4 - (173.2)^2 - 100^2 - 6.7^2$$

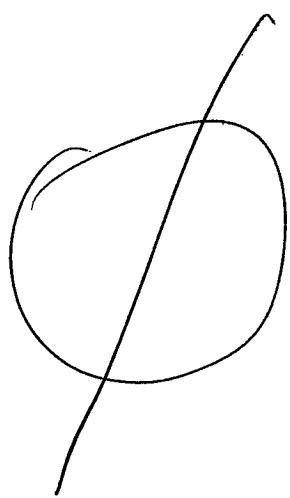
$$= 138480 + 71520 + 110045.44 - 29998.24 - 10000 - 44.89 \approx 22 \times 10^4$$

$$\cancel{II' = II} \quad \underline{\underline{II = II'}}$$

$$III = \det(\sigma_{ij}) = 2.1 \times 10^7 = \det(\sigma'_{ij}) = III.$$

(7)

Aufbauweise.  
 $\sigma_1$  diagonal  
 symmetrisch



⑧

$$\textcircled{6} \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3-\sigma & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma & 2 \\ 1 & 2 & -\sigma \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (3-\sigma)(\sigma^2-4) - (-2-\sigma) + (2+\sigma) = 0 \\ (3-\sigma)(\sigma-2)(\sigma+2) + 2(\sigma+2) = 0 \\ (\sigma+2)((3-\sigma)(\sigma-2)+2) = 0$$

$$\sigma^I = -2 \text{ MPa} \quad \rightarrow (3-\sigma)(\sigma-2)+2=0 \rightarrow 3\sigma - 6 - \sigma^2 + 2\sigma + 2 = 0 \\ \sigma^2 - 5\sigma + 4 = 0 \rightarrow \sigma^I = 1 \text{ MPa} \\ \rightarrow \sigma^{II} = 4 \text{ MPa}$$

$$\left[ \sigma_{ij}^{\text{pr}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ MPa.} \right]$$

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma^I = -2} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x^I \\ V_y^I \\ V_z^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} V_x + V_y + V_z = 0 \\ V_x + 2(V_y + V_z) = 0 \\ V_x + 2(V_y + V_z) = 0 \end{cases} \begin{cases} -2(V_y + V_z) \\ = -V_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow SV_x - \frac{V_x}{2} = 0 \rightarrow V_x = 0 \rightarrow V_y = -V_z$$

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = 1 \xrightarrow[V_x=0]{V_y=-V_z} V_y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow V_x = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left[ V = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k} \right]$$

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma^I = 1} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x^{\text{II}} \\ V_y^{\text{II}} \\ V_z^{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2V_x + V_y + V_z = 0 \\ V_x - V_y + 2V_z = 0 \\ V_x + 2V_y - V_z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_x = -V_z \\ V_x = V_y \end{cases} \rightarrow V_z = V_y$$

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = 1 \rightarrow 3V_z^2 = 1 \rightarrow V_z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, V_y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, V_x = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left[ Y^{\text{II}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{c} - \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{k} \right]$$

(9)

$$\overset{S_{ij}}{\cancel{S^{\text{II}}=4}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x^{\text{III}} \\ V_y^{\text{III}} \\ V_z^{\text{III}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -V_x + V_y + V_z = 0 \\ V_x - 4V_y + 2V_z = 0 \\ V_x + 2V_y - 4V_z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

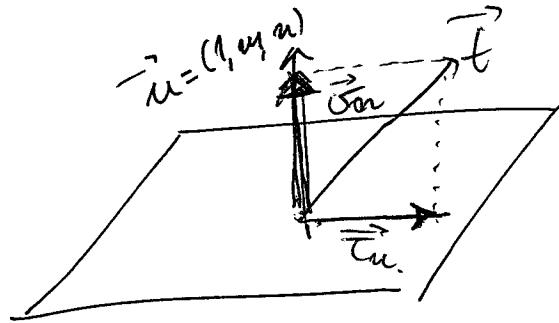
$$V_y = V_z \rightarrow V_x = 2V_z \quad V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = 1 \rightarrow 4V_z^2 + V_z^2 + V_z^2 = 1$$

$$V_z = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} = V_y \quad V_x = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \left[ V^{\text{III}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \vec{i} + \frac{\sqrt{6}}{6} \vec{j} + \frac{\sqrt{6}}{6} \vec{k} \right]$$

Options for two answers ...

(7)

$$@ \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



$$\vec{n} = (1, m, n) = \vec{c} + m\vec{j} + n\vec{k}, \quad \vec{t} = t_x \vec{i} + t_y \vec{j} + t_z \vec{k}.$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_{xx} + m\sigma_{xy} + n\sigma_{xz} &= t_x \\ \sigma_{yx} + m\sigma_{yy} + n\sigma_{yz} &= t_y \\ \sigma_{zx} + m\sigma_{zy} + n\sigma_{zz} &= t_z. \end{aligned}$$

~~del~~

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = |\vec{n}| = (\sigma_{xx} + m\sigma_{xy} + n\sigma_{xz}) \cdot 1 + (\sigma_{yx} + m\sigma_{yy} + n\sigma_{yz}) \cdot m + (\sigma_{zx} + m\sigma_{zy} + n\sigma_{zz}) \cdot n$$

$$= \sigma_{xx} + m\sigma_{xy} + n\sigma_{xz} + m\sigma_{yx} + m^2\sigma_{yy} + mn\sigma_{yz} + n\sigma_{zx} + mn\sigma_{zy} + n^2\sigma_{zz}$$

$$|\vec{n}| = \sigma_{xx} + m^2\sigma_{yy} + n^2\sigma_{zz} + 2m\sigma_{xy} + 2n\sigma_{xz} + 2mn\sigma_{yz}.$$

↑ Mezero operip̄cais.

$$\vec{\sigma}_N = |\vec{n}| \vec{c} + |\vec{n}| m \vec{j} + |\vec{n}| n \vec{k}.$$

$$\vec{t} - \vec{\sigma}_N = \vec{t} - (|\vec{n}| \vec{c} + |\vec{n}| m \vec{j} + |\vec{n}| n \vec{k})$$

$$\vec{t} - \vec{\sigma}_N = \vec{t} - \vec{\sigma}_N \Leftrightarrow \vec{\sigma}_N = \vec{t} - \vec{t}.$$

$$\vec{\sigma}_N = (t_x - |\vec{n}|) \vec{i} + (t_y - |\vec{n}| m) \vec{j} + (t_z - |\vec{n}| n) \vec{k}$$

$$\text{Zum f} \ddot{\text{u}} \text{rwa kareiduvous} \rightarrow a = \frac{t_x - |\vec{n}|}{|\vec{n}|}, \quad b = \frac{t_y - |\vec{n}| m}{|\vec{n}|}$$

$$c = \frac{t_z - |\vec{n}| n}{|\vec{n}|}$$

(11)

(B)

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 4 \\ 8 & 16 & -10 \\ 4 & -10 & 24 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$2x - 3y + 4z = 3$$

$$\phi = 2x - 3y + 4z - 3$$

$$\text{grad } \phi = \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla}(2x - 3y + 4z - 3) =$$

$$\vec{r}_\phi = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \rightarrow \vec{u}_\phi = \frac{2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{4+9+16}} = 0.37\vec{i} - 0.56\vec{j} + 0.74\vec{k}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 4 \\ 8 & 16 & -10 \\ 4 & -10 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.37 \\ -0.56 \\ 0.74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{Nx} \\ t_{Ny} \\ t_{Nz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = (2\phi + 24)\vec{i} + (16 - 4\phi - 40)\vec{j} + (8\phi + 30 + 24)\vec{k}$$

$$\vec{t}_\phi = 12\vec{i} + 22\vec{j} + 134\vec{k} \text{ MPa.}$$

$$|\vec{t}_\phi| = \vec{t}_\phi \cdot \vec{u}_\phi = 12\vec{i} \cdot \vec{u}_\phi = 12 \cdot 0.37 + 22 \cdot (-0.56) + 134 \cdot 0.74 = 776 \text{ MPa.}$$

$$\vec{t}_f = (3.7 - 4.48 + 2.96)\vec{i} + (2.96 - 8.96 - 2.4)\vec{j} + (1.48 + 5.6 + 17.76)\vec{k}$$

$$\vec{t}_f = 2.18\vec{i} - 13.4\vec{j} + 24.84\vec{k}$$

$$|\vec{t}_f| = \vec{t}_f \cdot \vec{u}_f = 2.18 \cdot 0.37 + 13.4 \cdot 0.56 + 24.84 \cdot 0.74$$

$$|\vec{t}_f| = 26.69 \text{ MPa.}$$

$$\vec{\sigma}_N = |\vec{t}_N| \vec{u}_f = 9.87\vec{i} - 14.95\vec{j} + 19.75\vec{k}$$

$$\vec{T}_N = \vec{t}_f - \vec{\sigma}_N = (2.18 - 9.87)\vec{i} + (-13.4 + 14.95)\vec{j} + (24.84 - 19.75)\vec{k}$$

$$\vec{T}_N = -7.69\vec{i} + 1.55\vec{j} + 5.09\vec{k}$$

$$|\vec{T}_N| = \sqrt{7.69^2 + 1.55^2 + 5.09^2} \rightarrow |\vec{T}_N| = 9.35 \text{ MPa}$$

(12)

# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη

Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Τηλέφωνα Γραφείου: 210-7721313, 210-7721263,

Τηλέφωνα Εργαστηρίων: Εμβομπχανικής 210-7724235, 210-7721317,

Φυσικών Δομικών Λίθων: 210-7724025, Οπτικών Μεθόδων: 210-7721318

Τηλεομοιότυπο: 210-7721302

Διεύθυνση τηλετρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr



## ΜΗΧΑΝΙΚΗ II (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ)

### 8<sup>η</sup> Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

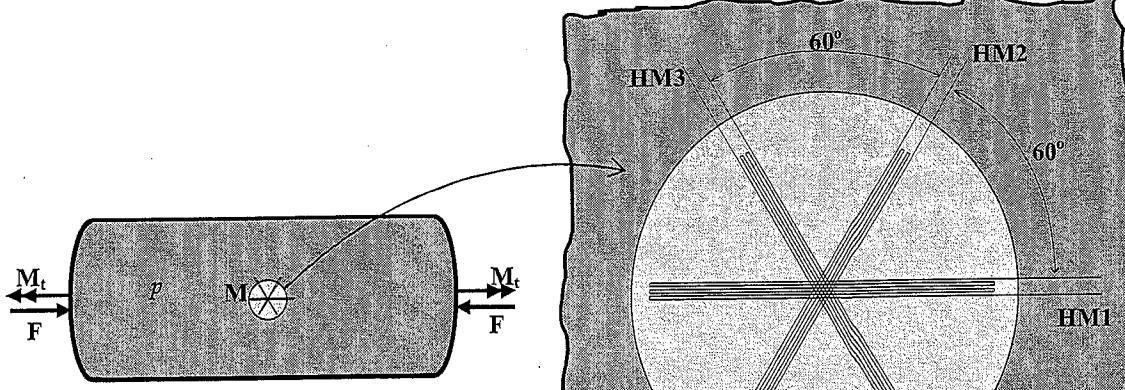
#### Διαξονικές εντατικές και παραμορφωσιακές καταστάσεις: Εφαρμογές σε λεπτότοιχα δοχεία πίεσης

##### Άσκηση 1<sup>η</sup>

Για τη μέτρηση των ανηγμένων παραμορφώσεων σε σημείο M λεπτότοιχου κυλινδρικού λέβητα (πάχος ελάσματος  $t=2mm$ ) μήκους  $L=2m$  και διαμέτρου  $D=0.5m$  (Σχ.1α) χρησιμοποιήθηκαν τρία ηλεκτρομηχανισμούμετρα (HM). Το HM1 είναι παράλληλο με τον άξονα του λέβητα τα δε HM2, HM3 διατάχθηκαν όπως στο Σχ.1β. Το υλικό του λέβητα είναι όλκιμο, γραμμικώς ελαστικό, με μέτρο ελαστικότητας  $E=200GPa$ , και λόγο Poisson  $\nu=0.3$ . Ο λέβητας φορτίζεται με εσωτερική υδραυλική πίεση  $p$ , αξονική δύναμη  $F$  και υπερτίθεται ομογενής διατμητική τάση  $\tau$ . Για δεδομένο συνδυασμό των  $p$ ,  $F$ ,  $\tau$  οι ενδείξεις των ηλεκτρομηχανισμούμετρων είναι:

$$\varepsilon_{HM1}=2\times10^{-4}, \varepsilon_{HM2}=4\times10^{-4} \text{ και } \varepsilon_{HM3}=12\times10^{-4}$$

- α. Να ευρεθεί ο τανυστής των παραμορφώσεων.
- β. Να ευρεθεί αναλυτικά ο τανυστής των κυρίων τάσεων και ο προσανατολισμός του.
- γ. Να εκτιμηθούν γραφικά οι μέγιστες διατμητικές τάσεις και η κατεύθυνση στην οποία εμφανίζονται.
- δ. Να ευρεθούν οι τιμές των  $p$ ,  $F$ .

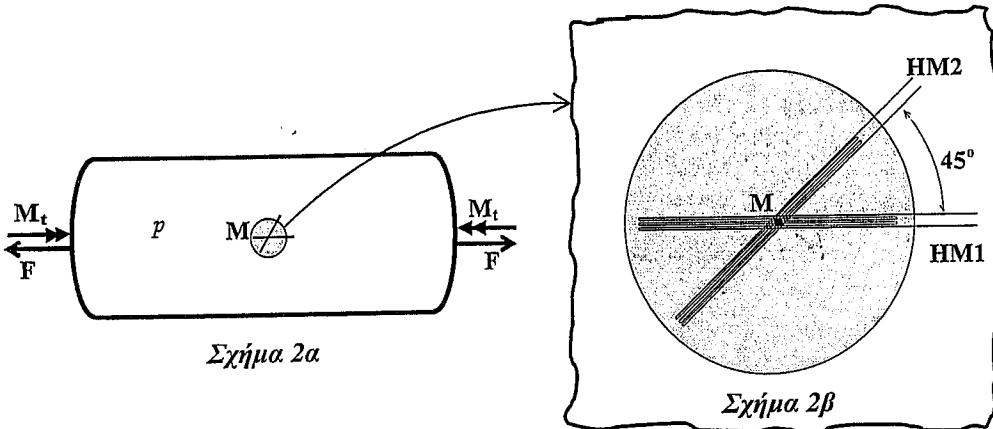


##### Άσκηση 2<sup>η</sup>

Λεπτότοιχος κυλινδρικός λέβητας (πάχος ελάσματος  $t=3mm$ , διάμετρος  $D=0.6 m$ ) από όλκιμο, γραμμικά ελαστικό υλικό, με μέτρο ελαστικότητας  $E=200GPa$ , λόγο Poisson  $\nu=0.3$  και τάση διαρροής  $\sigma_d=150MPa$  φορτίζεται με εσωτερική πίεση  $p$ , αξονική δύναμη  $F$  και ομογενή διατμητική τάση  $\tau=70 MPa$ . Για κάποιο συνδυασμό των  $p$  και  $F$  οι ενδείξεις δύο ηλεκτρομηχανισμούμετρων (HM1 κατά μήκος του άξονα του λέβητα, HM2 υπό γωνία 45°), είναι:

$$\varepsilon_{HM1}=1.9 \times 10^{-4}, \varepsilon_{HM2}=7.25 \times 10^{-4}$$

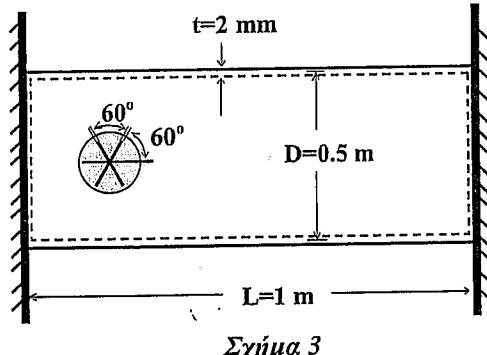
- a. Να κατασκευαστεί ο κύκλος του Mohr των τάσεων, να ευρεθούν οι κύριες τάσεις και οι κύριες διευθύνσεις σε σχέση με τον άξονα του λέβητα καθώς και οι μέγιστες διατμητικές τάσεις και οι διευθύνσεις τους.
- β. Να ευρεθεί η αξονική δύναμη  $F$  και η εσωτερική πίεση  $p$ .
- γ. Αν για την ασφάλεια του λέβητα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3\sigma_1 \leq \sigma_d^2$ , να ευρεθεί το διάστημα τιμών που μπορεί να πάρει η  $F$  ώστε να μη διαρρεύσει το υλικό του ελάσματος.



### Άσκηση 3<sup>η</sup>

Ο κυλινδρικός λέβητας του Σχ.3 ευρίσκεται παγιδευμένος μεταξύ δύο απολύτων ανενδότων τοιχωμάτων με τα οποία μόλις εφάπτεται όταν δεν υπάρχει πίεση στο εσωτερικό του. Ο λέβητας είναι κατασκευασμένος από όλκιμο μεταλλικό υλικό μέτρου ελαστικότητας  $E=120 \text{ GPa}$ , λόγου Poisson  $\nu=0.32$  και τάσης διαρροής  $\sigma_y=80 \text{ MPa}$ . Ο λέβητας πληρούται με αέριο υπό πίεση  $p$ . Αγνοώντας το βάρος του λέβητα και του αερίου:

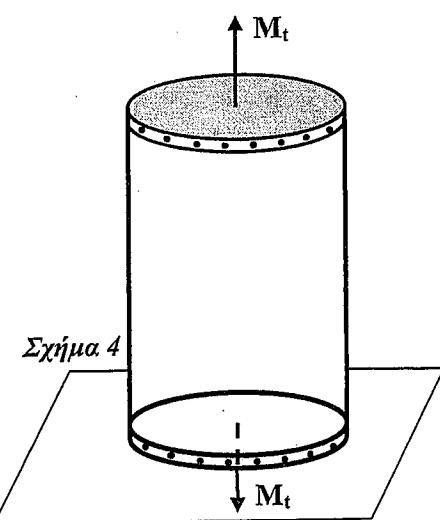
- α. Να ευρεθεί η δύναμη που ασκείται στα ανένδοτα τοιχώματα συναρτήσει της πίεσης  $p$ .
- β. Να ευρεθεί η τιμή της διαμέτρου του λέβητα όταν η πίεση λαμβάνει τιμή  $p=0.5 \text{ MPa}$ .
- γ. Να ευρεθούν οι ενδείξεις τριών ηλεκτρομηχανισμάτων επικολλημένων στην επιφάνεια του λέβητα όπως φαίνεται στο Σχ.3 (το ένα παράλληλα με τον άξονα του λέβητα και τα άλλα δύο υπό γωνίες  $60^\circ$  και  $120^\circ$ ) τη στιγμή που  $p=p_{\max}$ .



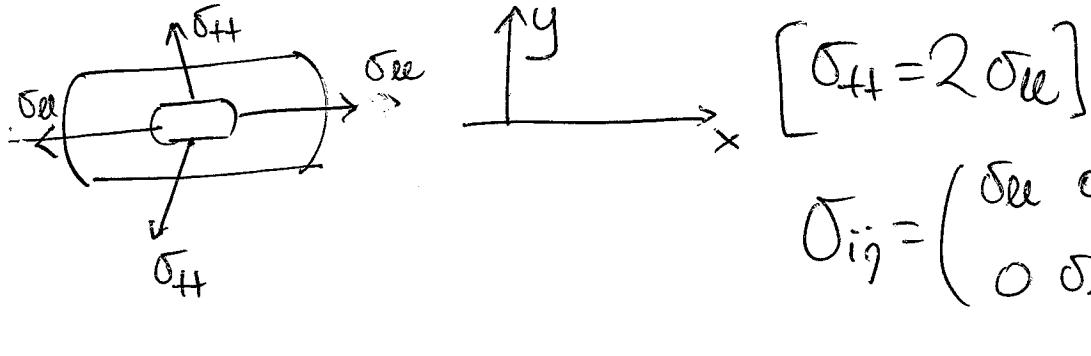
### Άσκηση 4<sup>η</sup>

Λεπτότοιχος κυλινδρικός λέβητας ακτίνας  $r=25 \text{ cm}$ , πάχονς  $\delta=1 \text{ mm}$  και ύψους  $L=2 \text{ m}$  τοποθετείται κατακόρυφα (Σχ.4). Το υλικό του λέβητα είναι όλκιμο με ειδικό βάρος  $80 \text{ kN/m}^3$  και τάση διαρροής  $\sigma_d=150 \text{ MPa}$ . Εκτός από το βάρος του ο λέβητας φορτίζεται επί πλέον με εσωτερική υδραυλική πίεση  $p=500 \text{ kPa}$  και ομογενή διατμητική τάση  $\tau_{xy}$ . Αγνοώντας το βάρος των πωμάτων και κάθε παρασιτική τάση στη στήριξη και στις ραφές των πωμάτων:

- α. Να εντοπισθούν τα πλέον επικίνδυνα να αστοχήσουν σημεία του λέβητα.
- β. Αν για την ασφάλεια του λέβητα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη  $\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xy}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2 \leq \sigma_d^2$ , να υπολογισθεί η μέγιστη επιτρεπτή τιμή της  $\tau_{xy}$  ώστε να μην αστοχεί ο λέβητας.
- γ. Να ευρεθεί ο τανυστής των τάσεων στη βάση του λέβητα.



## Πολύ Σειριακό - Τετράγωνης Οδυγίας



Ενα δενιζόντων δοχείο μετατρέπει τις ριζικές σε επιφερετικές μεταβολές, για να αποδώσει στο κύριο σύστημα εφεδροστοιχίες τάσεων κατά ταν Χ και Υ οπού δείχνει το σχήμα.

⇒ Τια να υπάρχουν διατηγυτικές τάσεις στο κύριο σύστημα πρέπει ο λέβυτας να υποστηρίζεται σε στρέμμα για να είναι είναι ανεξάργετη για την εργασία της μετατροπής.

Πρακτικά, αν στρέμματε το κύριο σύστημα, θα εφαρμόζεται στον διατηγυτικό τάσεις οι οποίες θα τεμπλωνούνται σε γωνία  $45^\circ$  από το κύριο σύστημα. Αυτές θα υπάρχουν, λόγω του ότι οι δύο αποτελεστικές κατανομήσεις

→ Κατά τα αλλά, οι λογικοί επαγγελμάτοι θέλουν ότι η έγχεια της γραφής να έχει τάση στα περισσότερα

(i)

(ii)

# Мүнгөвікій II - Даралдауда

8ын Зерттең Академик

(2013)

Артиллерийская Дорога Тиес  
Легенды

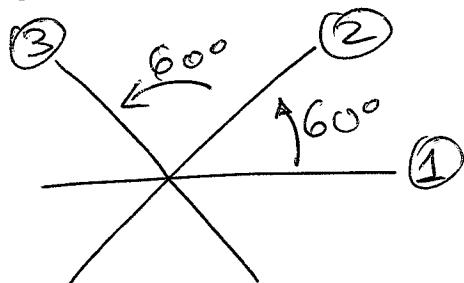
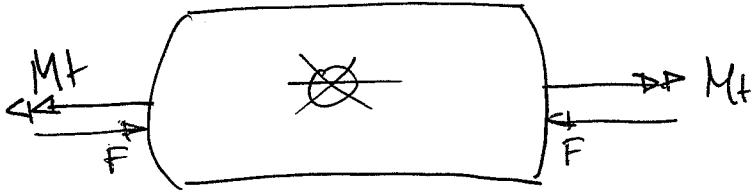
$$\textcircled{1} \quad L = 2 \text{ м}$$

$$t = 2 \times 10^{-3} \text{ м}$$

$$D = 0.5 \text{ м} = 2R$$

$$E = 200 \text{ ГПа}$$

$$\nu = 0.3$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= 2 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_{22} &= 4 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_{33} &= 12 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \varepsilon_{11} = 2 \times 10^{-4} \rightarrow \text{Діагональ } 60^\circ \rightarrow \varepsilon_{11}' = 4 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{11}' = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}}{2} + \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \varepsilon_{11} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned}8 \times 10^{-4} &= 2 \times 10^{-4} + \varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \times 10^{-4} + \frac{\varepsilon_{11}}{2} + \varepsilon_{11} \sqrt{3} \\ \left(\cancel{2} \times 10^{-4} = \frac{3}{2} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{11} \sqrt{3}\right) \textcircled{1}. &\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{11} = 2 \times 10^{-4} \rightarrow \text{Діагональ } 120^\circ \rightarrow \varepsilon_{11}' = 12 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{11}' = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}}{2} + \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \varepsilon_{11}$$

$$24 \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-4} + \varepsilon_{11} - 1 \times 10^{-4} + \frac{\varepsilon_{11}}{2} - \sqrt{3} \varepsilon_{11}$$

$$23 \times 10^{-4} + \frac{3}{2} \varepsilon_{11} - \sqrt{3} \varepsilon_{11} \xrightarrow{+ \textcircled{1}} 30 \times 10^{-4} = 3 \varepsilon_{11} \rightarrow \varepsilon_{11} = 10 \times 10^{-4} \xrightarrow{\textcircled{1}}$$

$$7 \times 10^{-4} = 15 \times 10^{-4} + \sqrt{3} \varepsilon_{11} \rightarrow \varepsilon_{11} = -4.62 \times 10^{-4}$$

\textcircled{1}

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -4.62 \\ -4.62 & 10 \end{pmatrix} \times 10^{-4}$$

(B)  $\sigma_{ij} = \frac{E}{1+v} \varepsilon_{ij} + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \operatorname{tr}(\varepsilon_{ij}) \delta_{ij}$

$$\begin{aligned} \frac{E}{1+v} &= \frac{200 \times 10^9}{1.3} = 154 \times 10^9 \\ \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \operatorname{tr}(\varepsilon_{ij}) &= \frac{200 \times 10^9 \times 0.3}{(1.3)(0.4)} \times 12 \times 10^{-4} \\ &= 1384.6 \times 10^5 \end{aligned}$$

$$\sigma_{ij} = 154 \times 10^9 \varepsilon_{ij} + 1384.6 \times 10^5 \delta_{ij}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} = 154 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4} + 1384.6 \times 10^5 \\ \sigma_{yy} = 154 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-4} + 1384.6 \times 10^5 \\ \sigma_{xy} = 154 \times 10^9 \times (-4.62) \times 10^{-4} \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 169 & -71 \\ -71 & 292 \end{pmatrix} \text{ MPa.}$$

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = \frac{169 + 292}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{169 - 292}{2}\right)^2 + 71^2}$$

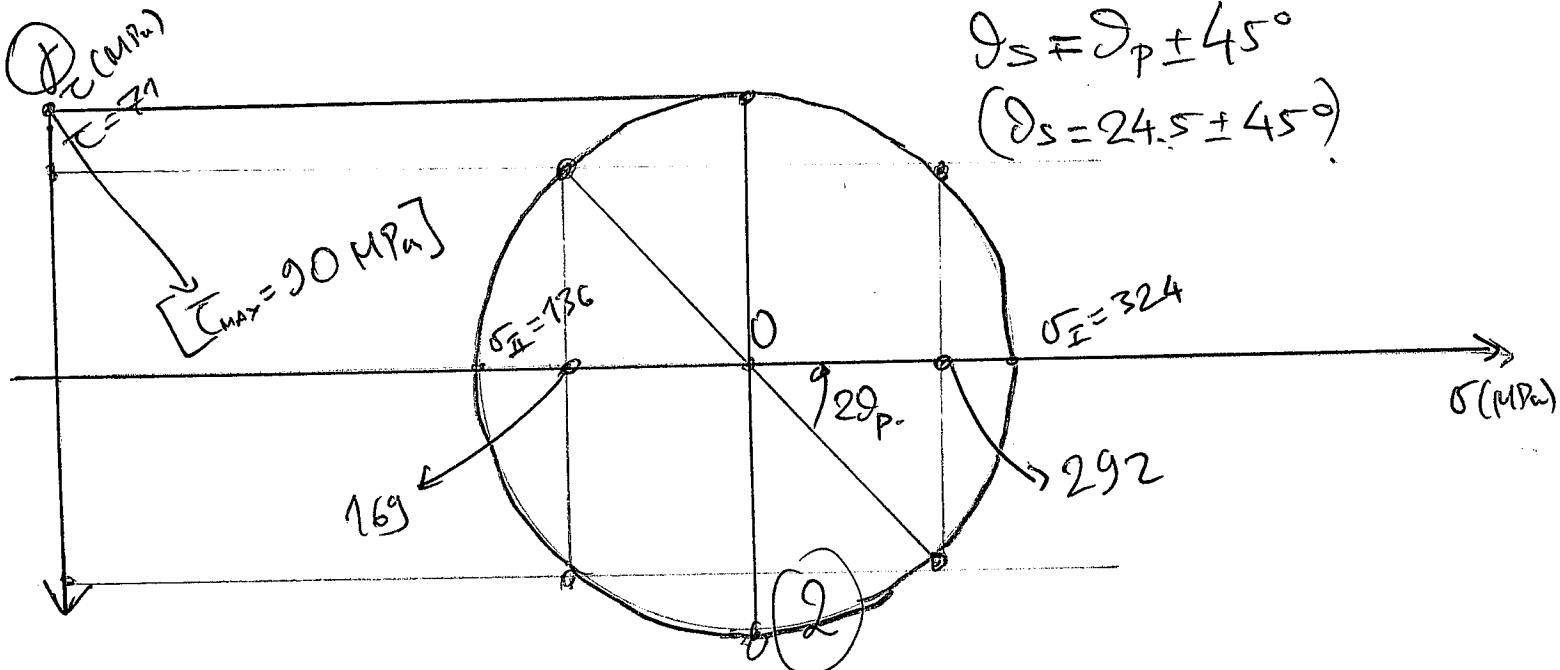
$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_I = 324 \text{ MPa} \\ \sigma_{II} = 136 \text{ MPa.} \end{array} \right]$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2 \times (-71)}{169 - 292} = 1.154 \Rightarrow$$

$$[\theta_p = 24.5^\circ]$$

$$\theta_s = \theta_p \pm 45^\circ$$

$$(\theta_s = 24.5 \pm 45^\circ)$$



⑤ Vnějšek:

$$M_f \xrightarrow{\text{mono}} \tau \rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 169 & -71 \\ -71 & 292 \end{pmatrix} \quad \tau = \frac{M_f R}{I_p} \Rightarrow M_f = \frac{\tau I_p}{R}$$

$$M_f = \frac{\frac{\tau R^4}{2}}{I_p} \cdot z$$

$$M_f = \frac{\frac{\tau R^3}{2}}{I_p} z \rightarrow M_f = \frac{3.14 \times 6.25^3}{2} \times z_1 \rightarrow (M_f = 1.74 \text{ MNm})$$

$$\phi \rightarrow \sigma_{ij}^P = \begin{pmatrix} \frac{P R}{2\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{P R}{\epsilon} \end{pmatrix}$$

$\sigma_{tt}$  +  $\sigma_{zz}$  ani níco.  $\phi \rightarrow \sigma_{tt}^P = \frac{P R}{\epsilon} \rightarrow$

$$\boxed{P = \frac{\epsilon \sigma_{tt}}{R}} \rightarrow \phi = \frac{10^3 \times 292 \times 10^6}{0.25} = \boxed{1.17 \text{ MPa.}}$$

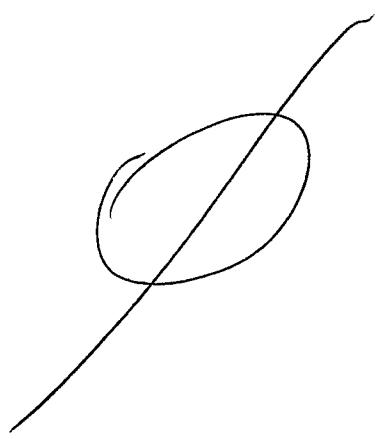
$$|\sigma_{xx} = \frac{P R}{2\epsilon} = \frac{1.17 \times 10^6 \times 0.25}{2 \times 10^3} = 146 \text{ MPa.}$$

Zde je důležitý závod, že  $\sigma_{xx} = 169 \text{ MPa}$  neplatí třeba ani ani výšky výroby ani ani výrobce výrobce výroby ani ani výrobce výrobce.

$$\sigma_F = 169 - 146 = 23 \text{ MPa} \rightarrow F = \sigma A \rightarrow F = 23 \times 10^6 \times 3.14 \times (0.25)^2$$

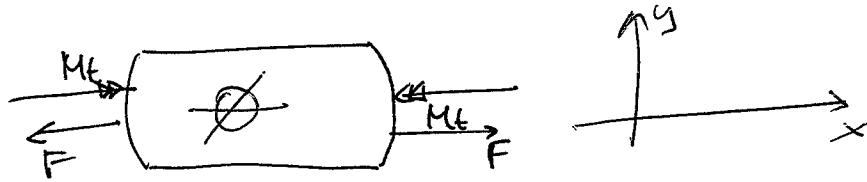
$$[F = 4.59 \text{ MN}]$$

③



(4)

$$\textcircled{2} \quad \left[ \begin{array}{l} t = 3 \times 10^3 \text{ m} \\ R = 0.3 \text{ m} \\ E = 200 \text{ GPa} \\ \nu = 0.3 \\ \tau = 70 \text{ MPa} \end{array} \right] \quad \sigma_y = 150 \text{ MPa.}$$



$\textcircled{2}$        $\textcircled{1}$        $\epsilon_x = 1.9 \times 10^{-4}, \quad \epsilon_z = 7.25 \times 10^{-4}$

$$(a) \quad \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr}(\sigma_{ij}) \delta_{ij} \rightarrow \epsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \quad \begin{aligned} \nu &= 0.3 \\ E &= 200 \text{ GPa} \\ \sigma_{xy} &\equiv \tau = 70 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1.3}{200} \times 70 \times 10^{-3} \rightarrow \underline{\epsilon_{xy} = 4.55 \times 10^{-4}}$$

$$\epsilon_x = 1.9 \times 10^{-4} \rightarrow \text{At } 45^\circ \quad \epsilon_x \equiv \epsilon_z = 7.25 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon'_e = \frac{\epsilon_a + \epsilon_{et}}{2} + \frac{\epsilon_a - \epsilon_{et}}{2} \cos(90^\circ) + \epsilon_{et} \sin 90^\circ \rightarrow 2\epsilon'_e = \epsilon_a + \epsilon_{et} + 2\epsilon_{et}$$

$$2 \times 7.25 \times 10^{-4} = 1.9 \times 10^{-4} + \epsilon_{et} + 2 \times 4.55 \times 10^{-4} \rightarrow \underline{\epsilon_{et} = 3.5 \times 10^{-4}}$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1.9 & 4.55 \\ 4.55 & 3.5 \end{pmatrix} \times 10^{-4}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{ij} + \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{tr}(\epsilon_{ij}) \delta_{ij}$$

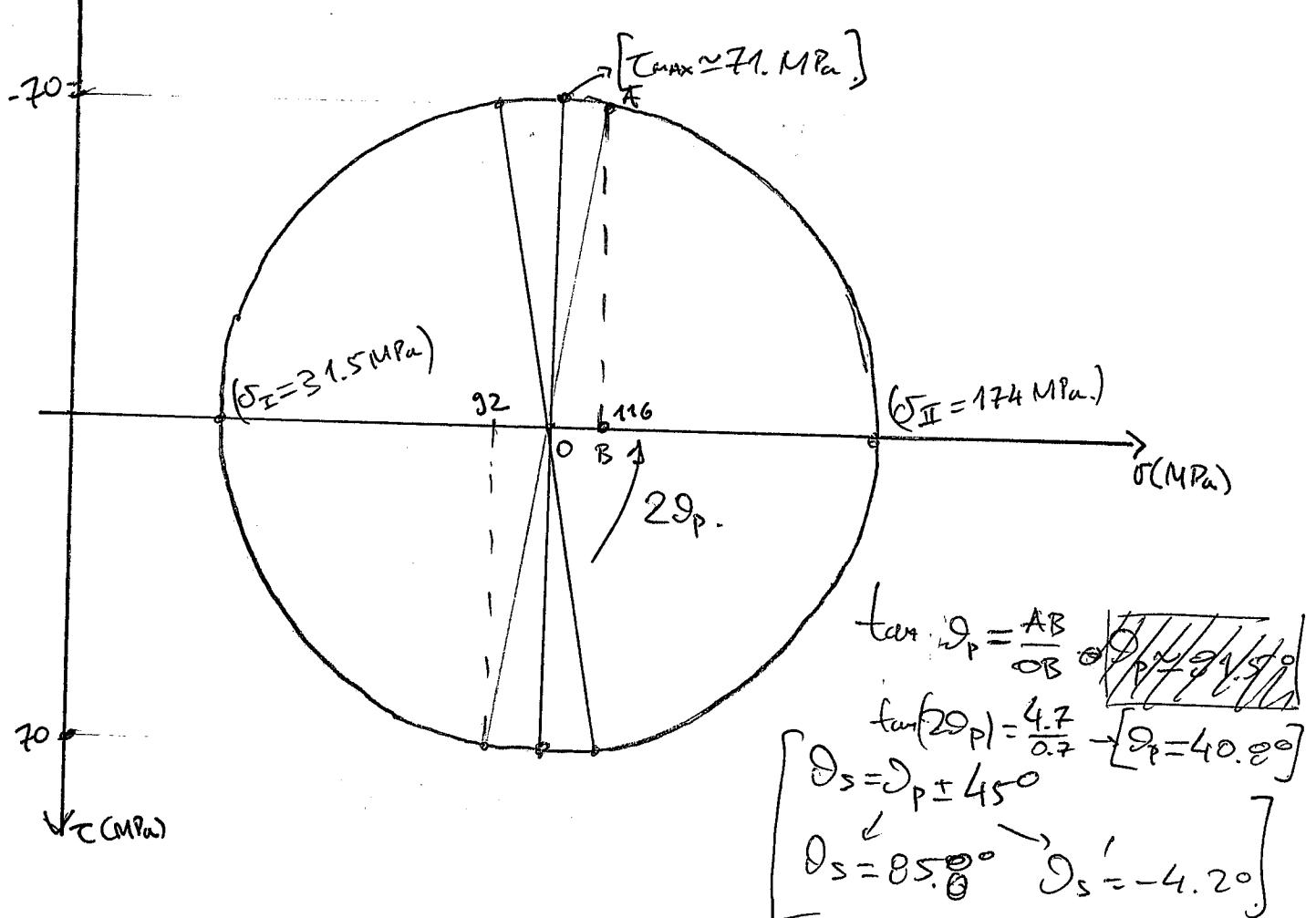
$$\begin{cases} \frac{E}{1+\nu} = \frac{200}{1.3} \times 10^9 = 154 \times 10^9 \\ \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{tr}(\epsilon_{ij}) = \frac{200 \times 10^9 \times 0.3}{(1.3)(0.4)} \times 5.4 \times 10^{-4} \\ = 623 \times 10^5 \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = 154 \times 10^9 \epsilon_{ij} + 623 \times 10^5 \delta_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 154 \times 10^9 \times 1.9 \times 10^{-4} + 623 \times 10^5 \\ \sigma_{yy} &= 154 \times 10^9 \times 3.5 \times 10^{-4} + 623 \times 10^5 \\ \sigma_{xy} &= 154 \times 10^9 \times 4.55 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 92 & 70 \\ 70 & 116 \end{pmatrix} \text{ MPa.}$$

(5)



③  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 92 & 70 \\ 70 & 116 \end{pmatrix} \text{ MPa.}$   $\sigma_{eff} \rightarrow$  ιποκατείρωση φέντε ανά  $\phi.$

$$\sigma_{ij}^P = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & \sigma_{eff} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho R}{2t} & 0 \\ 0 & \frac{\rho R}{t} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\rho R}{t} = \sigma_{eff} = 116 \times 10^6 \rightarrow \rho = \frac{116 \times 10^6 \times 3 \times 10^{-3}}{0.3}$$

$$F = 116 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{\rho R}{2t} = \frac{116 \times 10^6 \times 0.3}{2 \times 3 \times 10^{-3}} = 58 \text{ MPa} = \frac{\sigma_{eff}}{2}$$

$$\sigma_{xx} = 92 \text{ MPa} = \sigma_{ll}^P + \sigma_{xx}^F \rightarrow \sigma_{xx}^F = 92 - 58 = 34 \text{ MPa} \rightarrow F = 34 \times 10^6 \times 3.14 \times (0.8)^2$$

$$[F = 9.61 \text{ MN}]$$

⑥

$$\textcircled{1} \quad \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II} \leq \sigma_y^2.$$

→ Da unbelastete Ausdehnung der Volumen auf die Räume  
Kann die Druck auf die Elastizitätsmoduln führen zu einer  
Kürzung des Volumens.

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = \frac{92+116}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{92-116}{2}\right)^2 + 70^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_I &= 175 \text{ MPa} \\ \sigma_{II} &= 33 \text{ MPa} \end{aligned} \quad \tan 2\varphi_p = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2 \times 70}{92 - 116} \rightarrow \varphi_p = -39.74^\circ.$$

$$\sigma_{II,I} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi_p \pm \sigma_{xy} \sin 2\varphi_p \xrightarrow{\sigma_{xy} = 70 \text{ MPa}, \varphi_p = -39.74^\circ} \sigma_{II,I} = 116 \text{ MPa.}$$

$$2\sigma_{II} = \sigma_{xx} + 116 + 0.182\sigma_{xx} - 0.182 \times 116 + 2 \times 70 \times (-0.983)$$

$$2\sigma_{II} = 1.182\sigma_{xx} - 42.73 \Rightarrow \boxed{\sigma_{II} = \frac{1.182\sigma_{xx} - 42.73}{2}} \quad \begin{array}{l} (\text{Eigenschaften: } \sigma_{xx} = 92 \text{ MPa}) \\ (\sigma_{II} \approx 33 \text{ MPa}) \end{array}$$

$$2\sigma_I = \sigma_{xx} + 116 - 0.182\sigma_{xx} + 0.182 \times 116 + 2 \times 70 \times (0.983)$$

$$2\sigma_I = 0.818\sigma_{xx} + 274.73 \rightarrow \boxed{\sigma_I = \frac{0.818\sigma_{xx} + 274.73}{2}} \quad \begin{array}{l} (\text{Eigenschaften: } \sigma_{xx} = 92 \text{ MPa}) \\ (\sigma_I \approx 175 \text{ MPa}) \end{array}$$

$$\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II} \leq \sigma_y^2 \rightarrow$$

$$\frac{(1.182\sigma_{xx} - 42.73)^2 + (0.818\sigma_{xx} + 274.73)^2 - (1.182\sigma_{xx} - 42.73)(0.818\sigma_{xx} + 274.73)}{4} \leq \sigma_y^2$$

4

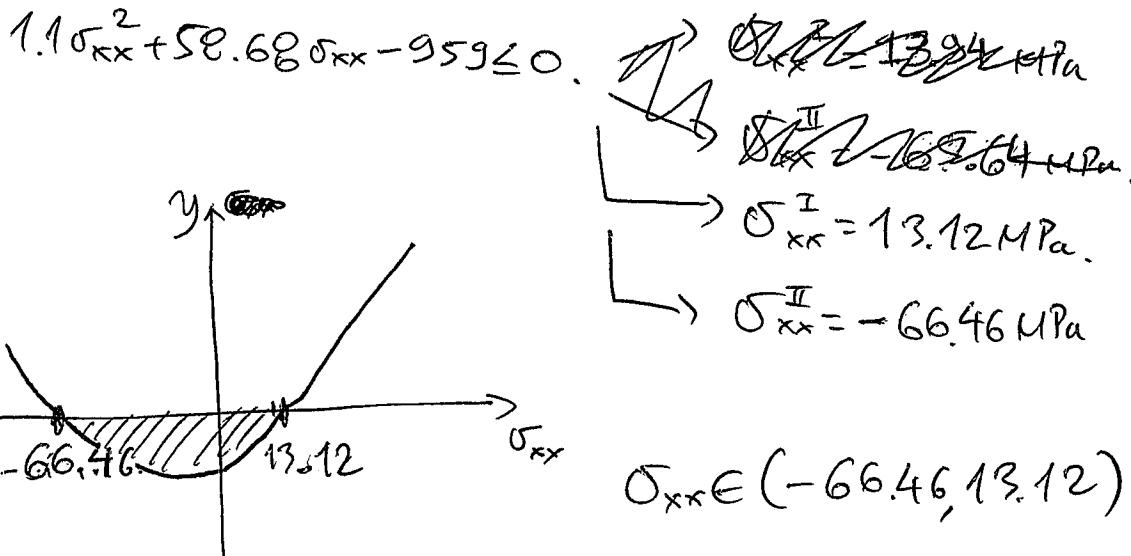
(7)

$$1.397\sigma_{xx}^2 - 1010\sigma_{xx} + 1825.35 + 0.669\sigma_{xx}^2 + 449.46\sigma_{xx} + 75476.57$$

$$-(1.182\sigma_{xx} - 42.73)(0.818\sigma_{xx} + 274.73) - 4\sigma_y^2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$2.066\sigma_{xx}^2 + 348.46\sigma_{xx} + 77302 - 0.966\sigma_{xx}^2 - 324.73\sigma_{xx} + 3495 + 11739 - 4\sigma_y^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 1.1\sigma_{xx}^2 + 23.73\sigma_{xx} \Rightarrow 1.1\sigma_{xx}^2 + 58.68\sigma_{xx} + 89041 - 4(150)^2 \leq 0.$$



$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^F + \sigma_{yy}^P = \sigma_{xx}^F + \frac{PR}{2t} = \sigma_{xx}^F + 58.$$

$$\sigma_{xx} > -66.46 \Rightarrow \sigma_{xx}^F > -66.46 - 58 \Rightarrow F_z > (-124.46) \times 3.14 \times (0.3)^2$$

$$[F > -35.17 \text{ MN}]$$

$$\sigma = F/A$$

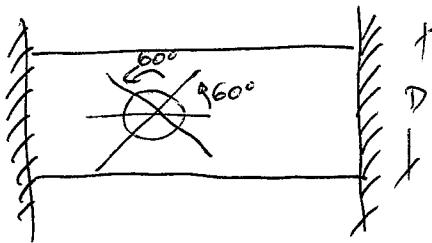
$$\sigma_{xx} < 13.12 \Rightarrow \sigma_{xx}^F < 13.12 - 58 \Rightarrow F < -44.88 \times 3.14 \times (0.3)^2$$

$$[F < -12.68 \text{ MN}] \quad [F \in (-35.17, -12.68) \text{ MN}]$$

Apa npietai va derfejse fid džinti kaj aforku ŝuafy

oxi fegadutej dño 35.17 MN kaj oxi fegadutej dño 12.68 MN

(3)



$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_y = 80 \text{ MPa} \\ E = 120 \text{ GPa} \\ \nu = 0.32 \\ t = 2 \times 10^{-3} \text{ m} \\ R = 0.25 \text{ m} \end{array} \right]$$

(a)

$$A^{\text{ring}} = A^{\text{out}} - A^{\text{in}} = n (R^{\text{out}} - R^{\text{in}}) = n (R_{\text{out}} + R_{\text{in}}) (R_{\text{out}} - R_{\text{in}})$$

$A = 2n\pi R$

$$\Delta \epsilon_a^F = \frac{FL}{AE} \rightarrow \epsilon_a^F = \frac{F}{AE}$$

$$\epsilon_a^F = \frac{1}{E} (\epsilon_{ll} - \nu \sigma_{tt}) = \frac{\sigma_{ll}}{E} = \frac{1}{E} (\epsilon_{ll} - 2\nu \epsilon_{tt}) = \frac{\sigma_{ll}}{E} (1 - 2\nu) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_{ll} = \epsilon_{ll} E \\ \epsilon_{ll} = \epsilon_a^F \end{array} \right\} \Rightarrow \epsilon_a^F = \epsilon_{ll} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F}{AE} = \frac{\sigma_{ll}}{E} (1 - 2\nu) \Rightarrow F = 2\pi R \times \frac{\sigma_{ll}}{2\pi} (1 - 2\nu) \Rightarrow F = 3.14 \left(\frac{1}{4}\right)^2 (1 - 0.64) P.$$

$$[F = 0.071 P]$$

~~$$\epsilon_{ll} = \frac{1}{E} (8(1 - 10\nu) \times 18 + 2\pi R) / 2\pi R$$~~

~~$$\epsilon_{ll} = \frac{1}{E} (10.56 \times 10^6 + 9.25) / 2 \times 2 \times 10^7$$~~

$$(3) \epsilon_{ll} = 0 \rightarrow \sigma_{ll} = \nu \sigma_{tt} \rightarrow \sigma_{tt} = \begin{pmatrix} \nu \sigma_{tt} & 0 \\ 0 & \sigma_{tt} \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_{tt} = \nu \begin{pmatrix} \frac{\nu^2 R}{E} & 0 \\ 0 & \frac{P R}{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.32 \times 10^6 \\ 62.5 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_{tt} = \frac{1}{E} (\sigma_{tt} - \nu^2 \sigma_{tt}) = \frac{1}{120} \times 10^9 \times (62.5 - 0.32^2 \times 62.5) \times 10^6 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{tt} = 0.47 \times 10^{-3} \rightarrow \epsilon_{tt} = \frac{\Delta D}{D} \rightarrow \Delta D = 0.47 \times 10^{-3} \times 0.5 \rightarrow \Delta D = 0.235 \text{ mm}$$

$$D' = 0.5 \text{ m} + 0.235 \text{ mm}$$

(g)

$$[D' = 0.5 \text{ m} + 0.235 \text{ mm}]$$

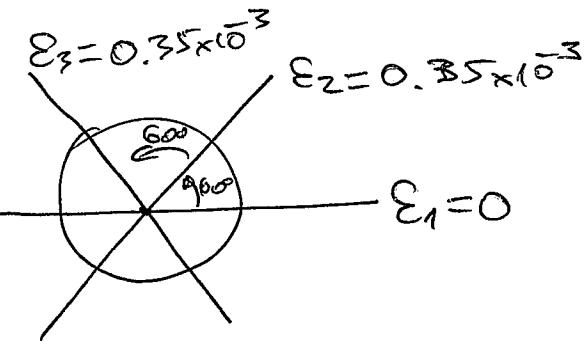
$$\textcircled{1} \quad \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.47 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

Ζελ (χαρακτήρα)  
 Ζετ (είναι γέφυρας)

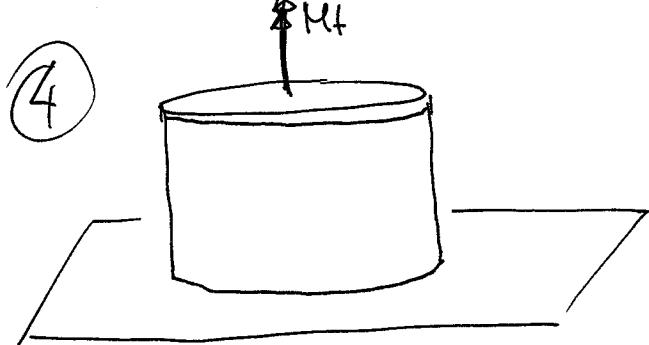
$$\epsilon_{xx}' \quad \epsilon_{ll}' = \frac{\epsilon_{ll} + \epsilon_{tt}}{2} + \frac{\epsilon_{ll} - \epsilon_{tt}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{lt} \sin 2\theta$$

$$\theta \xrightarrow{60^\circ} \epsilon_{ll}' = \frac{0.47 \times 10^{-3}}{2} + \frac{1}{4} \epsilon_{tt}^{0.47 \times 10^{-3}} \rightarrow \epsilon_{ll}' = 0.35 \times 10^{-3}$$

$$\theta \xrightarrow{120^\circ} \epsilon_{ll}'' = \frac{0.47 \times 10^{-3}}{2} + \frac{1}{4} \times 0.47 \times 10^{-3} \rightarrow \epsilon_{ll}'' = 0.35 \times 10^{-3}$$



10



$$R = 0.25 \text{ m}$$

$$t = 10^{-3} \text{ m}$$

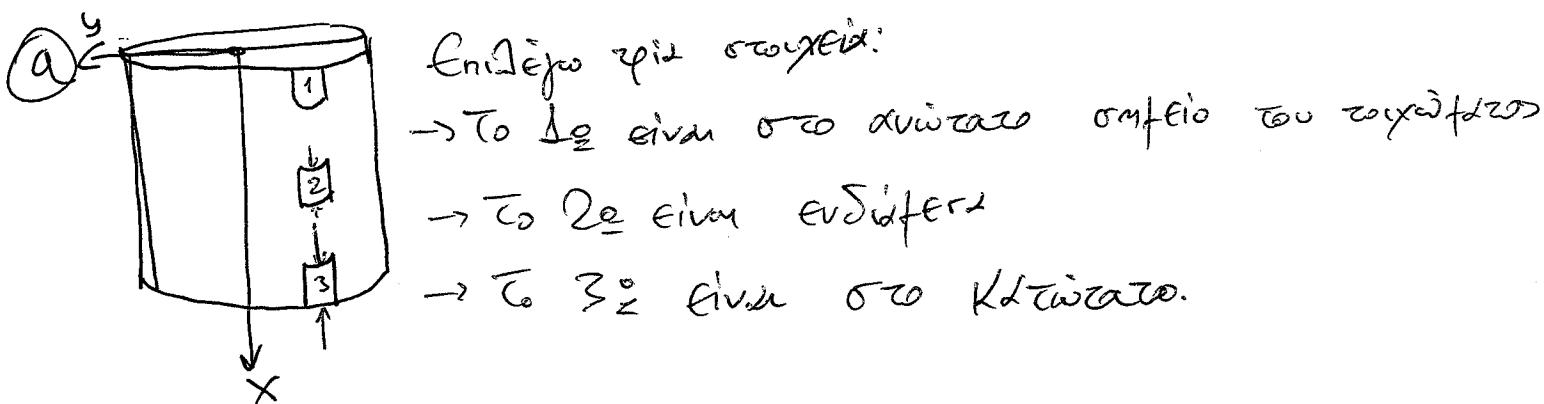
$$\gamma = 80 \text{ kN/m}^3$$

$$L = 2 \text{ m.}$$

$$\sigma_y = 150 \text{ MPa}$$

$$\dot{P} = 500 \text{ kPa}$$

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$



Το πάγος συγκεκίνησης διανύει σε κάθε συγκέντρωση.

$$\sigma_c = -\frac{W(x)}{A} = -\frac{W(x)}{2\pi R t} = -\frac{A x f}{2\pi R t} = -\gamma x = \boxed{\gamma x}$$

Επονέυσε ότι  $x_1 = 0 \rightarrow \sigma_{c1} = 0$

$$x_2 = l \rightarrow \sigma_{c2} = -\gamma l$$

$$x_3 = L \rightarrow \sigma_{c3} = -\gamma L$$

Όλως η σύρραγση πίστη του γέβημα συγκεκίνηση διανύει σαροτορόφα κατανεύστερη.

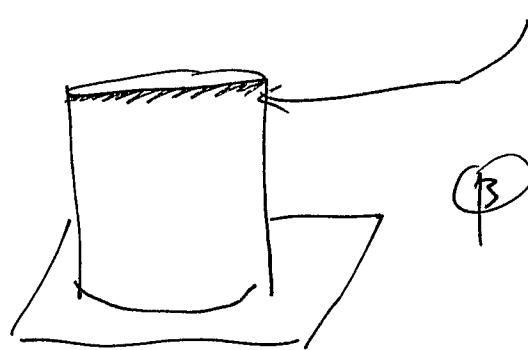
$$\sigma_{ij}^p = \begin{pmatrix} \frac{P R}{2t} & \\ & \frac{P R}{t} \end{pmatrix}$$

Τέλος η σημερινή πίστη του γέβημα συγκεκίνησης είναι φελευθερώς.

$$\text{Μάλιστα } \tau = \frac{M t R}{I_p} = \frac{M t R}{\frac{\pi R^4}{2}} = \frac{M t}{\pi R^3}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{P}{2t} & 0 \\ 0 & \frac{P}{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & M/t/R^3 \\ M/t/R^3 & 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Αφού το πάτος εστει διατηγμένη δύναμη και μη πίεση στην ι, το πάτος "δυνατή" τα στοιχεία του λεζύτα ⇒ το σωρός 1, αν πρέπεται στου εφωρευτικού τανδύα κινδυνεις περισσότερα  
↑ Ιαρέψη.



(B)

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{P}{2t} & 0 \\ 0 & \frac{P}{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & M/t/R^3 \\ M/t/R^3 & 0 \end{pmatrix}$$

A πάτος  
στο χώρο  
διατηγμό.

$$\sigma_{tt} = \frac{P}{2t} = \frac{500 \times 10^6 \times 0.25}{2 \times 10^{-3}} \rightarrow \sigma_{tt} = 62.5 \text{ MPa.} \rightarrow \sigma_{ff} = 125 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_{tt}^2 + \sigma_{ff}^2 - \sigma_{tt}\sigma_{ff} + 3\tau_{xy}^2 - (\tau_y)^2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$(62.5)^2 + (125)^2 - 62.5 \times 125 + 3\tau^2 - (150)^2 \rightarrow 3\tau^2 \leq 10781.25$$

$$[\tau_{max} \approx 60 \text{ MPa}] \rightarrow M_f^{MAX} = \frac{60 \times 10^6 \times (6.25)^3}{3.14} \rightarrow M_f^{MAX} = 298 \text{ kNm.}$$

$$\textcircled{1} \quad \sigma_{ij}^r = \begin{pmatrix} -\gamma x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{L=2m}{=} \begin{pmatrix} -80 \times 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -160 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ij}^b = \begin{pmatrix} 62.5 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -160 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 60 \\ 60 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[ \sigma_{ij}^{base} = \begin{pmatrix} -97.5 & 60 \\ 60 & 125 \end{pmatrix} \text{ MPa} \right]$$

12

# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη

Πολυτεχνειόπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Τηλέφωνα Γραφείου: 210-7721313, 210-7721263,

Τηλέφωνα Εργαστηρίων: Εμβιομηχανικής 210-7724235, 210-7721317, Φυσικών Δομικών Λίθων:

210-7724025. Οπτικών Μεδόδων: 210-7721318

Τηλεομοιότυπο: 2107721302

Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stalkour@central.ntua.gr



## ΜΗΧΑΝΙΚΗ II (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ)

### 15<sup>η</sup> Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

#### Ασκήσεις επί των κριτηρίων αστοχίας ολκίμων υλικών (Mises-Tresca)

##### Ασκηση 1<sup>η</sup>

Συμπαγής κύλινδρος από όλκιμο υλικό διαμέτρου 4 cm υφίσταται παράπλευρη πίεση  $p=650 \text{ MPa}$ . Η τάση διαρροής σε στρέψη του υλικού του κυλίνδρου είναι  $0.9 \text{ GPa}$ . Να υπολογισθεί κατά Mises και κατά Tresca η μέγιστη τιμή της αξονικής δύναμης που μπορεί να ασκηθεί στον κύλινδρο.

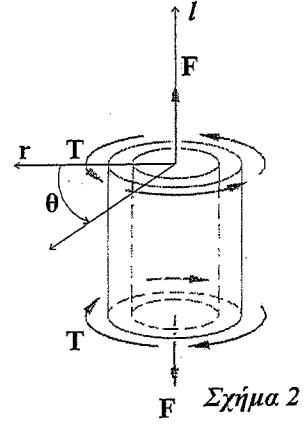
##### Ασκηση 2<sup>η</sup>

Δεπτότοιχος σωλήνας (Εξωτερική ακτίνα  $R=205 \text{ mm}$ , εσωτερική ακτίνα  $r=200 \text{ mm}$ ) από υλικό με τάση διαρροής σε μονοαξονικό εφελκυσμό  $\sigma_y=250 \text{ MPa}$  υποβάλλεται ταυτοχρόνως σε στρέψη και εφελκυσμό.

Γνωρίζοντας ότι η στρέψη δημιουργεί διατμητικές τάσεις  $\tau_{\theta}$  να υπολογισθεί η μέγιστη επιτρεπτή τιμή των  $T$  και  $F$  αν οι απόλυτες τιμές των  $F$  και  $T$  (σε μονάδες SI) συνδέονται μέσω της σχέσεως  $F=3T$ .

Η άσκηση να επιλυθεί υιοθετώντας τόσον το κριτήριο Mises όσον και το κριτήριο Tresca και να συγκριθούν τα αποτελέσματα.

Οι διατμητικές τάσεις λόγω στρέψεως δίνονται από τη σχέση:  $\tau=(M/I_p)r$ .  $I_p$  η πολική ροτή 2<sup>nd</sup> τάξης της διατομής.



##### Ασκηση 3<sup>η</sup>

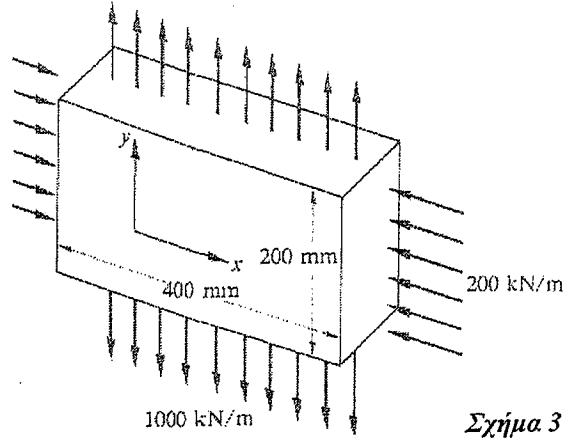
Σε επίπεδη πλάκα πάχους  $t=20 \text{ mm}$  ασκούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες δυνάμεις (όπως φαίνεται στο Σχ.3). Η πλάκα δεν υπόκειται σε κανένα περιορισμό στην κατεύθυνση z.

Γνωρίζοντας ότι η τάση διαρροής του υλικού της πλάκας σε μονοαξονικό εφελκυσμό είναι  $300 \text{ MPa}$  να υπολογισθεί:

- Πόση επί πλέον δύναμη μπορεί να δεχθεί η πλάκα κατά την διεύθυνση του άξονα x;
- Πόση επί πλέον δύναμη μπορεί να δεχθεί η πλάκα κατά την διεύθυνση του άξονα y;
- Αν αμφότερες οι δυνάμεις αυξάνονται αναλογικά ποιες οι μέγιστες επιτρεπτές τιμές τους πριν επέλθει αστοχία;

Η άσκηση να λυθεί υιοθετώντας τόσον το κριτήριο Mises όσον και το κριτήριο Tresca.

Δίνεται  $E=70 \text{ GPa}$ , και  $v=0.33$



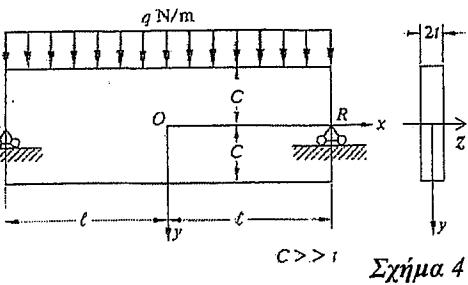
##### Ασκηση 4<sup>η</sup>

Δοκός διαστάσεων  $(2\ell) \times (2C) \times (2t)$  στηρίζεται σε δύο κυλίσεις και φορτίζεται με ομοιόμορφο φορτίο q N/m κατά μήκος της άνω έδρας (Σχ.4). Με ειδικό μηχανισμό επιβάλλεται μηδενισμός της οριζόντιας κίνησης του κεντρικού σημείου ο της δοκού. Το πεδίο μετατοπίσεων ( $u, v$ ) κατά  $(x, y)$  για την ιδεατή αυτή διάταξη δίνεται από τις σχέσεις (Timoshenko & Goodier, Theory of Elasticity, Mc Graw Hill, 3<sup>rd</sup> edition, New York, 1970):

$$u = \frac{q}{2EI} \left[ \left( \ell^2 x - \frac{x^2}{3} \right) y + x \left( \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} C^2 y \right) + v x \left( \frac{1}{3} y^3 - C^2 y + \frac{2}{3} C^3 \right) \right]$$

$$v = \frac{-q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{C^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} C^3 y + v \left[ \left( \ell^2 - x^2 \right) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} C^2 y^2 \right] \right\} -$$

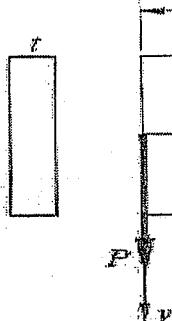
$$\frac{-q}{2EI} \left[ \frac{\ell^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{C^2 x^2}{5} + \left( 1 + \frac{v}{2} \right) C^2 x^2 \right] + \frac{5}{24} \frac{q \ell^4}{EI} \left[ 1 + \frac{12}{5} \frac{C^2}{\ell^2} \left( \frac{4}{5} + \frac{v}{2} \right) \right]$$



όπου  $I$  η επιφανειακή ροπή δευτέρας τάξεως της εγκάρσιας διατομής της δοκού ως προς τον άξονα  $z$ , Ε το μέτρο ελαστικότητας και  $v$  ο λόγος Poisson. Να προσδιορισθεί συναρτήσει των γεωμετρικών στοιχείων της δοκού η μέγιστη επιτρεπτή τιμή του εξωτερικού φορτίου  $q$  αν γνωρίζετε ότι η τάση διαρροής του υλικού της δοκού σε μονοαξονικό εφελκυσμό είναι συ, και θεωρώντας ότι πλέον επικίνδυνη για αστοχία είναι η κεντρική διατομή.

### Άσκηση 5<sup>η</sup>

Η μονόπακτη δοκός του Σχ.5 φορτίζεται με κατακόρυφη δύναμη  $P=50$  kN στο ελεύθερο άκρο της. Για τη συγκεκριμένη διάταξη το πεδίο μεταποίσεων ( $u, v$ ) κατά ( $x, y$ ) δίνεται από τις σχέσεις (Timoshenko & Goodier, Theory of Elasticity, McGraw Hill, 3<sup>rd</sup> edition, New York, 1970):



*Σχήμα 5.*

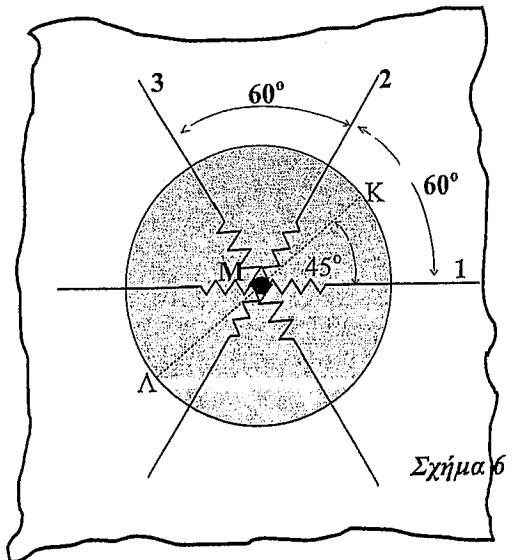
$$u = \frac{P}{EI} \left[ -\frac{x^2 y}{2} - \frac{\nu y^3}{6} + \frac{(1+\nu)y^3}{3} + \frac{\ell^2 y}{2} - \frac{(1+\nu)C^2 y}{1} \right], \quad v = \frac{P}{EI} \left[ \frac{\nu x y^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{\ell^2 x}{2} + \frac{\ell^3}{3} \right]$$

όπου  $I$  η επιφανειακή ροπή δευτέρας τάξεως της εγκάρσιας διατομής της δοκού ως προς τον άξονα  $z$ , Ε το μέτρο ελαστικότητας και  $v$  ο λόγος Poisson. Γνωρίζοντας ότι η τάση διαρροής του υλικού της δοκού σε μονοαξονικό εφελκυσμό είναι  $\sigma_y=300$  MPa και ότι  $\ell=4C=10t$  να ευρεθούν οι ελάχιστες επιτρεπτές διαστάσεις της δοκού ώστε να φέρει με ασφάλεια και συντελεστή ασφαλείας 2 τη δεδομένη φόρτιση, θεωρώντας ότι πλέον επικίνδυνη για αστοχία είναι η διατομή πακτώσεως.

### Άσκηση 6<sup>η</sup>

Σε σημείο M λεπτού επιπέδου μεταλλικού ελάσματος επικολλήθηκε ροζέτα τριών ηλεκτρομηχανισμέτρων (Σχ.6). Τη στιγμή της αστοχίας του ελάσματος οι ενδείξεις των ηλεκτρομηχανισμέτρων είναι:  $\varepsilon_1=8 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_2=4 \times 10^{-4}$  και  $\varepsilon_3$ . Το υλικό του ελάσματος θεωρείται όλκιμο και γραμμικός ελαστικό με μέτρο ελαστικότητας  $E=200$  GPa, λόγο Poisson  $v=0.3$  και τάση διαρροής σε στρέψη  $\sigma_{y,tor}=120$  MPa.

- Να ευρεθεί η ένδειξη  $\varepsilon_3$  υιοθετώντας τόσον το κριτήριο Mises όσον και το κριτήριο Tresca.
- Θεωρώντας τα πεδία ομογενή να ευρεθεί η μεταβολή του μήκους ευθυγράμμου τμήματος KΛ το οποίο είχε αρχικό μήκος 2 cm.



## 15<sub>y</sub> Σειρά - Τετράς Οδηγίες

Άν σε ένα σώμα γυρείσουτε την εναλλακτική του κατάσταση, προσθίτε υπό δυνητικές αντιστάσεις έτσι ώστε να μην προσβαλλεται το σύστημα. Έτσι θα επιτύχετε την οριτήρια της Tresca και της Mises.

$$\underline{\text{Mises}}: \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2 \leq \sigma_y^2 \\ \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II} \leq \sigma_y^2 \end{array} \right\} \quad \text{2-D.}$$

Άν λογίσεις η συνοικίτης, τότε το σώμα είναι σταθερός και δεν λογογίζει. Ο γύρος είναι η τάση δραστηριάς του υλικού σε κατεύθυνση ταναφορικής επελεύθερης.

$$\underline{\text{Tresca}}: \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \leq \tau_y^{\max} \right) \quad \begin{aligned} \tau_y^{\max} & \text{ είναι η τέρμη} \\ & \text{επιτρεπτής διατήγματος} \\ & \text{κατά Tresca, η οποία} \\ & \text{είναι Ιδιότητα του υλικού} \\ & \text{σε επελεύθερη.} \end{aligned}$$

⇒ Άν σε ένα σώμα ισχύει το Τρέσκα το  $\sigma_y$ ,  
 $\Rightarrow \left[ \tau_y^{\max} = \frac{\sigma_y}{2} \right] \text{Tresca}$ , άνω αν δέσουτε υπό επελεύθερης Mises, μηδουμούτε το  $\sigma_y$  ως έξει.

⇒ Άν το Τρέσκα το  $\tau_y^{\max}$ , πεντάσαι συμβίπει υπό μηδουμούτε το κριτήριο της Tresca, αν οπως δέσουτε υπό

(c)

εφαρμόσουτε το κριτήριο του Mises, τότε το  $\sigma_{max}$   
& Σαν όλες είναι το διάδοχο του  $\tau_g^{max}$ .

⇒ Σε αυτή την περίπτωση  $[\sigma_{max}^g = \sqrt{3} \tau_g^{max}]$  Mises.

Τερικά τα δύο κριτήρια δεν δινουν τα ίδια αποτελέσματα. Συνήθως εφαρμόζετε όποια τας συνθέτετε.

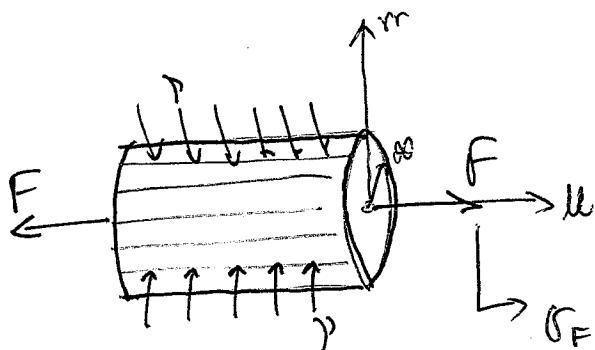
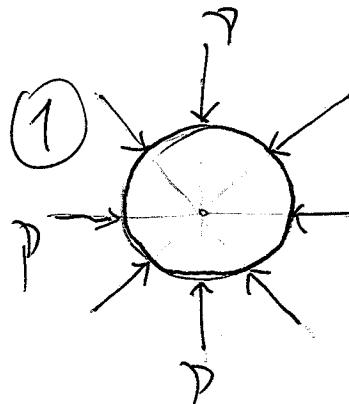
Οι λογικοί του φυλλαδίου είναι αντίστοιχοι των νων.

# Μηχανική II - Παραλογισμός

15η Σειρά Ασκήσεων

Κριτήρια Ασφαλείας Mises-Tresca

(2013)



$$R = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$A = 1.256 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\sigma_F = F/A$$

→ Τέλο συστήμα που ανεκφρίζεται, οι βαριότερις  $\sigma$  και  $F/A$ .  
δεν συστέρονται αν διατηρούνται τα  $\sigma$ . Επομένως  
 $\sigma_I = P$ ,  $\sigma_{II} = F/A$ .

$$\sigma_I = -650 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = \frac{F}{1.256} \times 10^3 \rightarrow \sigma_{II} = 796 \text{ F.}$$

$$\rightarrow \text{Mises: } \sigma_y^{\max} = \frac{\sigma_I^{\max}}{\sqrt{3}} \rightarrow \sigma_y^{\max} = \sigma_I^{\max} \sqrt{3} \rightarrow \sigma_y^{\max} = 900 \times 10^6 \sqrt{3}.$$

$$\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II} = \sigma_y^2 \rightarrow (650)^2 \times 10^{12} + 0.634 \times 10^6 F^2 + 0.517 \times 10^{12} F = (900)^2 \times 10^{12}$$

$$0.634 \times 10^6 F^2 + 0.517 \times 10^{12} F - 2007500 = 0,$$

$$0.634 \times 10^6 F^2 + 0.517 \times 10^{12} F - 2 \times 10^6 = 0$$

$$0.634 F^2 + 0.517 \times 10^6 F - 2 = 0 \rightarrow F^2 + 0.815 \times 10^6 F - 3.15 = 0$$

$$\rightarrow [F \approx 815 \text{ KN}] \text{ Mises Θεωρία Δουφή}$$

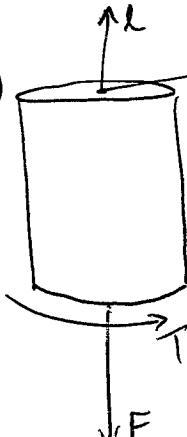
(1)

$$\rightarrow \text{Tresca. } \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = \tau_y^{\text{MAX}} \rightarrow -650 \times 10^6 - 796 F = 1800 \times 10^6$$

$$-796 F = 2450 \times 10^6 \rightarrow [F \approx 3078 \text{ KN}] \text{ Tresca } \Theta \rightarrow \text{intirij.}$$

②

②



$$\begin{bmatrix} t = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \\ R = 0.205 \text{ m} \\ \sigma_g = 250 \text{ MPa} \end{bmatrix}$$

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} \rightarrow \bar{c} = \frac{T}{I_p} R$$

$$\Rightarrow \bar{c} = \frac{\frac{TR}{\bar{c}}}{\frac{\pi R^4}{2}} \rightarrow \bar{c} = \frac{2TR}{\pi R^4} \rightarrow \bar{c} = \frac{2T}{\pi R^3} \Rightarrow T = \frac{2\bar{c}}{\frac{2T}{3.14 \times 8.61 \times 10^{-3}}} \rightarrow \boxed{T = 74 \text{ T}}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{6.44 \times 10^{-3}} \rightarrow \sigma = 155 \text{ F} \quad \hookrightarrow F = 3T \rightarrow \sigma = 465 \text{ T.}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 155 \text{ F} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 74 \text{ T} \\ 74 \text{ T} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 465 \text{ T} & 74 \text{ T} \\ 74 \text{ T} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = \frac{465 \text{ T}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{465 \text{ T}}{2}\right)^2 + (74 \text{ T})^2}$$

$$\sigma_{I,II} = 232.5 \text{ T} \pm 244 \quad \hookrightarrow \sigma_I = 477 \text{ T} \quad \hookrightarrow \sigma_{II} = -12 \text{ T}$$

$$\rightarrow \text{Mises} \rightarrow \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II} = \sigma_g^2 \rightarrow (477 \text{ T})^2 + (-12 \text{ T})^2 + 477 \times 12 \times \text{T}^2 = (250)^2$$

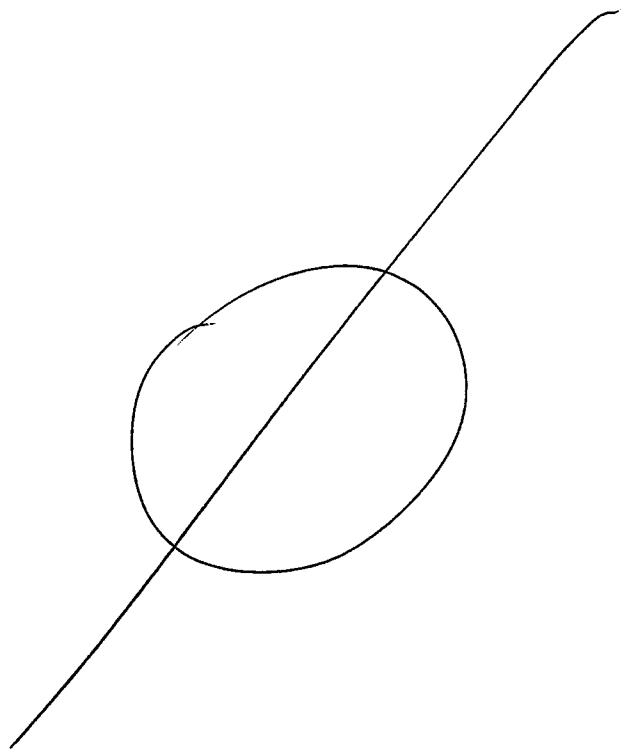
$$227529 \text{ T}^2 + 144 \text{ T}^2 + 5724 \text{ T}^2 = 62500 \times 10^{12} \rightarrow 233397 \text{ T}^2 = 62500 \times 10^{12}$$

$$[\text{T} \approx 26.8 \text{ GPa}] \rightarrow F = 804 \text{ GN} \text{ Mises.}$$

$$\rightarrow \text{Tresca} \rightarrow \bar{c}_y = \frac{\sigma_y}{2} = \frac{250}{2} = 125 \text{ MPa.} \quad \bar{c}^{\text{MAX}} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = \left(\frac{477 + 12}{2}\right) \text{ T} \quad \bar{c}^{\text{MAX}} = 244.5 \text{ T}$$

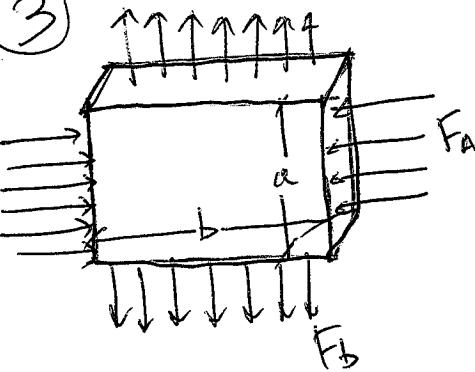
$$\rightarrow 244.5 \text{ T} = 125 \times 10^6 \rightarrow [\text{T} = 511 \text{ GPa} \rightarrow F = 1533 \text{ GN.m}] \text{ Tresca}$$

③



(4)

(3)



$$\left[ \begin{array}{l} t = 20 \times 10^{-3} \text{ m} \\ a = 0.2 \text{ m} \\ b = 0.4 \text{ m} \\ \sigma_y = 300 \text{ MPa} \end{array} \right]$$

$$F_A = 40 \text{ kN}$$

$$F_B = 400 \text{ kN}$$

$$A_A = 0.2 \times 20 \times 10^{-3} = 4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_B = 0.4 \times 20 \times 10^{-3} = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{F_A}{A_A} = -\frac{40 \times 10^3}{4 \times 10^{-3}} = -10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{F_B}{A_B} = \frac{400 \times 10^3}{8 \times 10^{-3}} = 50 \text{ MPa}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} = -10 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} = 50 \text{ MPa} \end{array} \right\} \rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} \text{ MPa.}$$

Επειδή  $\sigma_{xx}$  τίμη τελικά την αύξοντας της  $F_A$ . Το διατυπώσαμε, ενοφένως το συστηματικά είναι κρίσιμο  $\sigma_{xx} = \sigma_I$ ,  $\sigma_{yy} = \sigma_{II}$

$$\rightarrow \text{Mises: } \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II} = \sigma_y^2 \rightarrow \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} = \sigma_y^2 \rightarrow$$

$$\sigma_{xx}^2 + (50)^2 \times 10^{12} - \sigma_{xx} \times 50 \times 10^{12} = 10000 \times 10^{12} \rightarrow$$

$$\sigma_{xx}^2 - 50 \sigma_{xx} - 87500 = 0. \rightarrow \sigma_{xx,1} = 322 \text{ MPa.} \leftarrow \text{Εθελοντικό. Αναγεννέσιμο}$$

$$\sigma_{xx,2} = -272 \text{ MPa}$$

$$\text{Ενοφένως } |\sigma_{xx}^{\max}| = 272 \text{ MPa} \rightarrow \text{Ενοφένως } \sigma_{add,c}^{\max} = 272 - 10 = 262 \text{ MPa.}$$

$$\boxed{F_{MAX}^{\text{add}} = 262 \times 10^6 \times 4 \times 10^{-3} = 786 \text{ kN}}$$

Mises

Κλειστή Αύξοντας Θεωρητικής Δύναμης ×

$$\rightarrow \text{Tresca} \rightarrow \tau_y^{\max} = \frac{\sigma_y^{\max}}{2} = 150 \text{ MPa.} \quad \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = \tau_y^{\max} \rightarrow \frac{150 - 50}{2} = 150$$

$$\sigma_{xx}^{\max} = 350 \text{ MPa.} \rightarrow |\sigma_{add}| = 340 \text{ MPa.}$$

$$\boxed{F_{MAX}^{\text{add}} = 340 \times 10^6 \times 4 \times 10^{-3} \rightarrow [F_{MAX}^{\text{add}} = 1360 \text{ kN}]} \text{ Tresca.}$$

(5)

$$\textcircled{B} \quad \text{Oft wird } \sigma_{xx} = -10 \text{ MPa} = \sigma_I \\ \sigma_{yy} = \sigma_{II}$$

$$\rightarrow \text{Mises} \rightarrow \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} = \sigma_y^2 \rightarrow 10^2 + \sigma_{yy}^2 + 10\sigma_{yy} \cdot 10 = 90000 \times 10^2 \\ \sigma_y^2 + 10\sigma_{yy} - 89000 = 0 \rightarrow \sigma_{yy,1} = 295 \text{ MPa} \\ \rightarrow \sigma_{yy,2} = -305 \text{ MPa.} \leftarrow \Theta > \text{int. Anwendung}$$

$$\sigma_{max}^{add} = 295 - 50 = 245 \text{ MPa.}$$

$$F_{max}^{add} = 245 \times 10^6 \times 8 \times 10^3 \rightarrow [F_{max}^{add} = 1960 \text{ kN.}] \text{ Mises-Auftragssache y.}$$

$$\rightarrow \text{Tresca.} \rightarrow \frac{|\sigma_{xx} - \sigma_{yy}|}{2} = 150 \rightarrow \cancel{\sigma_{yy} = 890 + 10 \cdot 200 = 200 \text{ MPa.}}$$

$$\rightarrow \frac{|10 - \sigma_{yy}|}{2} = 150 \rightarrow \sigma_{yy} = 310 \text{ MPa.} \rightarrow F_{max}^{add} = 310 \times 10^6 \times 8 \times 10^3 \\ [F_{max}^{add} = 2480 \text{ kN}] \text{ Tresca-Auftragssache y.}$$

~~$$\textcircled{1} \quad \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} = \sigma_y^2 \quad \text{---} \quad \textcircled{1}$$~~

~~$$\frac{|\sigma_{xx} - \sigma_{yy}|}{2} = \sigma_y \rightarrow |\sigma_{xx} - \sigma_{yy}| = 2\sigma_y \rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx} = 300 + \sigma_{yy} \\ \sigma_{xx} = -300 + \sigma_{yy} \end{cases}$$~~

~~$$\textcircled{1} \rightarrow (300 + \sigma_{yy})^2 + \sigma_{yy}^2 - (300 + \sigma_{yy})\sigma_{yy} = (300)^2 \rightarrow 90000 + 600\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{yy}^2 - 300\sigma_{yy} - \sigma_{yy}^2 - 90000 = 0.$$~~

~~$$\sigma_{yy}^2 + 300\sigma_{yy} = 0 \rightarrow \sigma_{yy}(\sigma_{yy} + 300) = 0 \rightarrow \sigma_{yy} = 0 \rightarrow \sigma_{xx} = 300 \text{ MPa.} \\ \sigma_{yy} = -300 \text{ MPa.} \rightarrow \sigma_{xx} = 0.$$~~

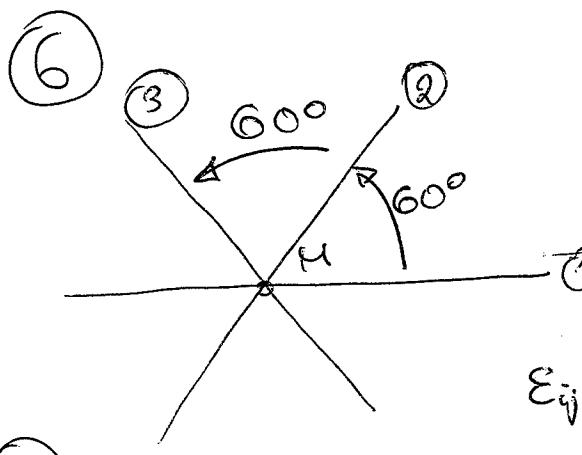
~~$$\rightarrow (\sigma_{yy} - 300)^2 + \sigma_{yy}^2 - (\sigma_{yy} - 300)\sigma_{yy} - (300)^2 = 0.$$~~

~~$$\sigma_{yy}^2 - 600\sigma_{yy} + (300)^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{yy}^2 + 300\sigma_{yy} - (300)^2 = 0.$$~~

~~$$\sigma_{yy}(\sigma_{yy} - 300) = 0 \rightarrow \sigma_{yy}$$~~

6

2



$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 8 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_2 = 4 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_3 = ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = 200 \text{ GPa} \\ v = 0.3 \\ \sigma_y^{\text{tor}} = 120 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \times 10^{-4}$$

⑥

$$2\pi r_0 \phi y \cdot 60^\circ \rightarrow \varepsilon'_{xx} = \varepsilon_2 = 4 \times 10^{-4} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} \cos(120) + \varepsilon_{xy} \sin(120)}{2}$$

$$8 \times 10^{-4} = 4 \times 10^{-4} + \frac{4 \times 10^{-4}}{2} + \sqrt{3} \varepsilon_{xy} \\ 4 \times 10^{-4} = 8 \varepsilon_{yy} + 2\sqrt{3} \varepsilon_{xy} / -\varepsilon_{yy} / , \cancel{4 \times 10^{-4} - 2\sqrt{3} \varepsilon_{xy}}$$

$$\rightarrow 8 \times 10^{-4} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})(-\frac{1}{2}) + \sqrt{3} \varepsilon_{xy}$$

$$8 \times 10^{-4} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} - \frac{\varepsilon_{xx}}{2} + \frac{\varepsilon_{yy}}{2} + \sqrt{3} \varepsilon_{xy} \rightarrow$$

$$16 \times 10^{-4} = 2\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + 2\sqrt{3} \varepsilon_{xy} \rightarrow 16 \times 10^{-4} = \varepsilon_{xx} + 3\varepsilon_{yy} + 2\sqrt{3} \varepsilon_{xy} \rightarrow$$

$$8 \times 10^{-4} = 3\varepsilon_{yy} + 2\sqrt{3} \varepsilon_{xy} \rightarrow \left[ \varepsilon_{yy} = \frac{8 \times 10^{-4} + 2\sqrt{3} \varepsilon_{xy}}{3} \right]$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+v} \varepsilon_{ij} + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \text{tr}(\varepsilon_{ij}) \delta_{ij} \quad \left( \begin{array}{l} \frac{E}{1+v} = 154 \times 10^9 \\ \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} = 115 \times 10^9 \end{array} \right)$$

$$\sigma_{ij} = 154 \varepsilon_{ij} + 115 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \delta_{ij} \rightarrow \sigma_{xx} = (154 \varepsilon_{xx} + 115 \varepsilon_{xx} + 115 \varepsilon_{yy}) \times 10^9$$

$$\sigma_{xx} = (2152 + 115 \left( \frac{8 + 2\sqrt{3} \varepsilon_{xy}}{3} \right)) \times 10^5 \rightarrow \cancel{\sigma_{xx} = (18017 + 115 \varepsilon_{xy}) \times 10^5}$$

$$\rightarrow [\sigma_{xx} = (2459 + 133 \varepsilon_{xy}) \times 10^5]$$

$$\rightarrow \sigma_{yy} = (154 \varepsilon_{yy} + 115 \varepsilon_{xx} + 115 \varepsilon_{yy}) \times 10^9 \rightarrow \sigma_{yy} = (269 \varepsilon_{yy} + 115 \varepsilon_{xx}) \times 10^9$$

$$\sigma_{yy} = \left( \frac{269}{3} (8 + 2\sqrt{3} \varepsilon_{xy}) + 920 \right) \times 10^5 \rightarrow [\sigma_{yy} = (1637.3 + 311 \varepsilon_{xy}) \times 10^5]$$

⑦

$$\rightarrow \sigma_{xy} = 154 \varepsilon_{xy} \times 10^5$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 133\varepsilon_{xy} + 2459 & 154\varepsilon_{xy} \\ 154\varepsilon_{xy} & 311\varepsilon_{xy} + 1637 \end{pmatrix} \times 10^5 \text{ Pa.}$$

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \rightarrow$$

$$\sigma_{I,II} = \frac{133\varepsilon_{xy} + 2459 + 311\varepsilon_{xy} + 1637}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{133\varepsilon_{xy} + 2459 - 311\varepsilon_{xy} - 1637}{2}\right)^2 + 154^2\varepsilon_{xy}^2}$$

$$\sigma_{I,II} = 222\varepsilon_{xy} + 2048 \pm \sqrt{(411 - 89\varepsilon_{xy})^2 + 154^2\varepsilon_{xy}^2} \leftarrow ?$$

$$\rightarrow \underline{\text{flüss.}} \rightarrow \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \rightarrow \sigma_y = \sqrt{3} \times 120 \times 10^6 \rightarrow \boxed{\sigma_y \approx 208 \text{ MPa.}}$$

$$\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2 = \sigma_y^2 \rightarrow (133\varepsilon_{xy} + 2459)^2 + (311\varepsilon_{xy} + 1637)^2 - (133\varepsilon_{xy} + 2459) \times (311\varepsilon_{xy} + 1637) + 3 \times (154)^2\varepsilon_{xy}^2 = 2080^2$$

$$\rightarrow 17689\varepsilon_{xy}^2 + 6046681 + 654094\varepsilon_{xy} + 96721\varepsilon_{xy}^2 + 2679769 + 1018214\varepsilon_{xy} - 41363\varepsilon_{xy}^2 - 217721\varepsilon_{xy} - 764749\varepsilon_{xy} - 4025383 + 71148\varepsilon_{xy}^2 - 4326400 = 0.$$

$$-17689\varepsilon_{xy}^2 + 6046681 + 654094\varepsilon_{xy} + 96721\varepsilon_{xy}^2 + 2679769 + 1018214\varepsilon_{xy} - 41363\varepsilon_{xy}^2 - 217721\varepsilon_{xy} - 764749\varepsilon_{xy} - 4025383 + 71148\varepsilon_{xy}^2 - 4326400 = 0.$$

$$\varepsilon_{xy}^2 + 363.26\varepsilon_{xy} + 197.3 = 0.$$

$$\varepsilon_{xy} \approx 364 \quad \text{in } \varepsilon_{xy} = -0.54$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2307.7 & -83.16 \\ -83.16 & 1469.06 \end{pmatrix} \times 10^5 \text{ Pa.} \rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 230 & -83 \\ -83 & 147 \end{pmatrix} \text{ MPa.}$$

(2)

$$\rightarrow 144195 \varepsilon_{xy}^2 + 689838 \varepsilon_{xy} + 374667 = 0 \rightarrow \varepsilon_{xy}^2 + 4.784 \varepsilon_{xy} + 2.598 = 0$$

~~$\varepsilon_{xy} = -4.16$~~   $\Rightarrow \varepsilon_{xy} = -4.16 \times 10^{-4}$   
 ~~$\varepsilon_{xy} = -0.625$~~   $\Rightarrow \varepsilon_{xy} = -0.625 \times 10^{-4}$

$$\rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 100 & -64 \\ -64 & 34 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad \text{or} \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 238 & -9.62 \\ -9.62 & 144 \end{pmatrix} \text{ MPa.}$$

$$\rightarrow \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & -4.16 \\ -4.16 & -2.14 \end{pmatrix} \times 10^{-4} \quad \text{or} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & -0.625 \\ -0.625 & 1.95 \end{pmatrix} \times 10^{-4}.$$

$$\varepsilon_{xx}' = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos(2 \times 120^\circ) + \varepsilon_{xy} \sin(2 \times 120^\circ).$$

$$\rightarrow \varepsilon_{xx}' = \frac{8 - 2.14}{2} + \frac{8 + 2.14}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \cancel{(-2.14)} \times (-4.16).$$

$$[\varepsilon_{xx}' = 3.455 \times 10^{-4} \equiv \varepsilon_3] \quad \text{or} \quad \downarrow$$

$$\rightarrow \varepsilon_{xx}' = \frac{8 + 1.95}{2} + \frac{8 - 1.95}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-0.625)$$

$$[\varepsilon_{xx}' = 4 \times 10^{-4} \equiv \varepsilon_3]$$

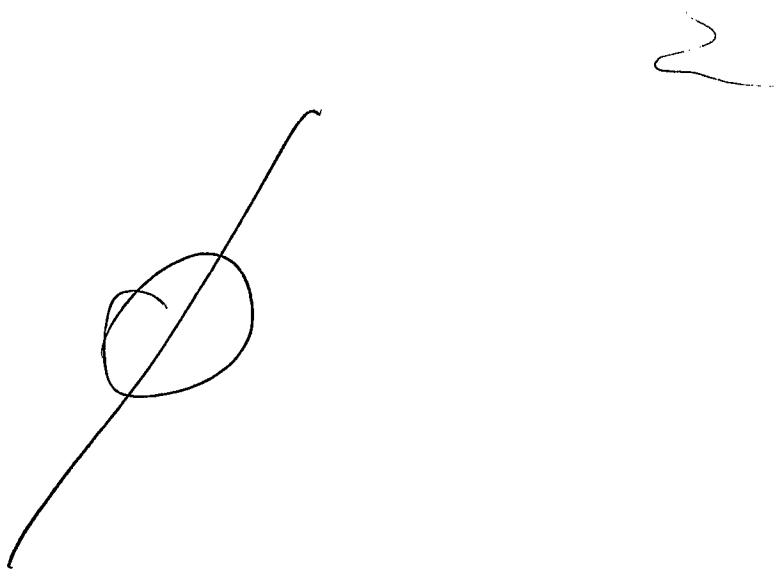
$\Phi \rightarrow \text{Isopoly } 45^\circ \rightarrow$

$$\varepsilon_{xx}' = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos(90^\circ) + \varepsilon_{xy} \sin(90^\circ)$$

$$\varepsilon_{xx}' = \frac{8 + 1.95}{2} - 0.625 \rightarrow \varepsilon_{xx}' = 4.35 \times 10^{-4} \rightarrow \Delta L_N = L \varepsilon_{xx}'$$

$$\Delta L = 2 \times 10^2 \times 4.35 \times 10^{-4}$$

$$[\Delta L = 8.7 \mu\text{m en 1 m}]$$



(16)

## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Μ-ΙΙ

$$\left[ \sigma = \frac{F}{A} \right] \left[ \epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \right] \left[ \sigma = \epsilon E \right] \left[ \epsilon_{tr} = \frac{\Delta L}{L_0} \right] \epsilon_{tr} = \frac{\Delta D}{D_0} \quad v = -\frac{\epsilon_{tr}}{\epsilon_{tr}}$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{FL}{AE}} \quad \text{Hooke.} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} > \frac{\epsilon_{1y}}{\epsilon_{2y}} \rightarrow \cancel{\text{σ}} + 1 \propto \cancel{\epsilon_x} \cancel{\epsilon_y} \quad \rightarrow \epsilon_{1y} \propto \epsilon_{2y}, \text{ and } 2 \propto \cancel{\epsilon_x} \cancel{\epsilon_y}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma = \alpha(\Delta T) E \\ \Delta L = \alpha L_0 (\Delta T) \end{array} \right] \text{Θερμοπροσαρτή.$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}; \\ \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji};$$

$$\left( G = \frac{E}{2(1+v)} \right) \left[ \epsilon_{ij} = \frac{1+v}{E} \sigma_{ij} - \frac{v}{E} \text{tr}(\sigma_{ij}) \delta_{ij} \right] \quad \sum_{x \in \text{σεις}} \sigma - \epsilon$$

$\hookrightarrow \epsilon_{xx} = \frac{1+v}{E} \sigma_{xx} - \frac{v}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$   
 $\hookrightarrow \epsilon_{yy} = \frac{1+v}{E} \sigma_{yy} - \frac{v}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$   
 $\epsilon_{xy} = \frac{1+v}{E} \epsilon_{xy}$

2-D

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+v} \epsilon_{ij} + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \text{tr}(\epsilon_{ij}) \delta_{ij}$$

$\hookrightarrow \sigma_{xx} = \frac{E}{1+v} \epsilon_{xx} + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})$   
 $\hookrightarrow \sigma_{yy} = \frac{E}{1+v} \epsilon_{yy} + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})$   
 $\hookrightarrow \sigma_{xy} = \frac{E}{1+v} \epsilon_{xy}$

$$\left[ \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] \sum_{x \in \text{σεις}} u - \epsilon$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \right] \text{Compatibility} \quad \sum_{x \in \text{σεις}} \frac{2-D}{\text{σ. νευραλ.}}$$

(1)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{for isotropic materials} \\ \text{Navier (3-D)} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{ix} \\ \tau_{iy} \\ \tau_{iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{iz} \end{pmatrix} \quad \sum_i \tau_{ij} n_i = f_i \quad (3-D)$$

Tensionis Mouvement Diavote Travaux

$\vec{f}_{\text{ext}} = |f_o|$   
 $\vec{f}_c - \vec{f}_o = \vec{f}_c$

$$\left( \begin{array}{l} \Sigma_{x0\theta y1} \\ 2 \rightarrow \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \sigma'_{xx} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma'_{yy} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta - \sigma_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma'_{xy} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{xy} \cos 2\theta \end{array} \right\} \text{Opious f'd E.}$$

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad [ \tan 2\theta_p = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} ]$$

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \quad [ \tau_{MAX} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad [ \theta_s = \theta_p \pm 45^\circ ] ]$$

Kipres rāsēs, tīpk erinedā ↑

$$\text{Mises: } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2 \leq \sigma_y^2 \\ \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II} \leq \sigma_y^2 \end{array} \right\}$$

( $\frac{\sigma_f}{\sigma_{II}}$  kuples tareis)

$$\text{Tresca} \quad \left\{ \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \leq \bar{\tau}_y^{\text{MAX}} \right\}$$

$$\left( \frac{C_y}{C_x} = \frac{\sigma_y}{2} \right) \text{Tresca}$$

$$\text{Mises} \left( \sigma_y = \sqrt{3} \tau_y^{\max} \right)$$

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_{tt} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \sigma_{ee} = \frac{pR}{4\pi f} \quad \left. \right\} \lambda \in B^H \cap E \subseteq$$

$$C = \frac{M_t}{I_p} \quad \boxed{\Sigma P_{\text{ext}}}$$

$$I_p^{\text{circular}} = \frac{\pi R^4}{2}$$