

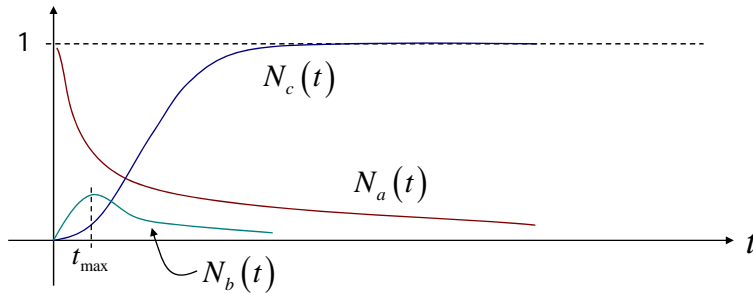
Αλυσίδες Ραδιενεργών Διασπάσεων

• Διαδοχικές διασπάσεις: $A \xrightarrow{\lambda_a} B \xrightarrow{\lambda_b} C$ (σταθερός πυρήνας)

$$\left. \begin{aligned} dN_a &= -\lambda_a N_a dt \\ dN_b &= \lambda_a N_a dt - \lambda_b N_b dt \\ dN_c &= \lambda_b N_b dt \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{η ενεργότητα} \\ \text{της πηγης b} \\ \text{δεν είναι } \lambda_b N_b \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} N_a(0) \\ \text{Αρχικές συνθήκες: } N_b(0) = 0 \\ N_c(0) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} N_a(t) &= N_a(0) e^{-\lambda_a t} \\ N_b(t) &= N_a(0) \frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a} (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}) \\ N_c(t) &= N_a(0) \left[1 + \frac{1}{\lambda_b - \lambda_a} (\lambda_a e^{-\lambda_b t} - \lambda_b e^{-\lambda_a t}) \right] \end{aligned} \right.$$

Γ. Τσιπολίτης



$$\frac{dN_b}{dt} = 0 \Rightarrow t_{\max} = \frac{\ln(\lambda_b / \lambda_a)}{\lambda_b - \lambda_a}$$

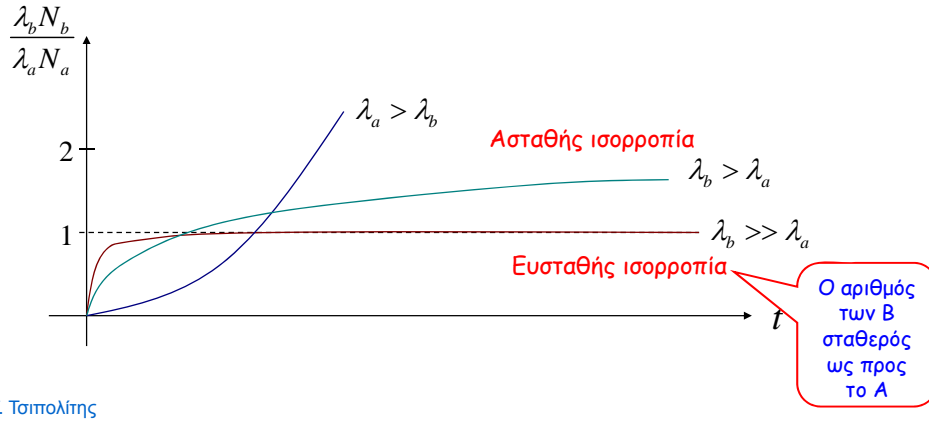
Για $t = t_{\max}$: $\lambda_a N_b(t_{\max}) = \lambda_b N_a(t_{\max})$
Ιδανική ισορροπία!

∀ t, ο λόγος των ενεργοτήτων B/A:

$$\frac{\lambda_b N_b}{\lambda_a N_a} = \frac{\lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a} \cdot \left[1 - e^{-(\lambda_b - \lambda_a) \cdot t} \right]$$

Γ. Τσιπολίτης

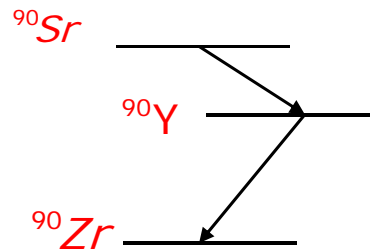
1. Αν $\lambda_a > \lambda_b \Rightarrow (B/A) \uparrow$
2. Αν $\lambda_b > \lambda_a \Rightarrow (B/A)$ σταθεροποιείται σε >1 για $t \gg 0$
(ασταθής ισορροπία)
3. Αν $\lambda_b \gg \lambda_a \Rightarrow (B/A) \rightarrow 1$ (ευσταθής ισορροπία: ο αριθμός των θυγατρικών πυρήνων παραμένει σταθερός σχετικά με τον αριθμό των πυρήνων A)



End-point energy για τα β^- :
0,546 MeV και 2,27 MeV

Ο αριθμός των πυρήνων του ${}^{90}\text{Y}$ είναι σταθερός καθώς αναγεννώνται από το ${}^{90}\text{Sr}$

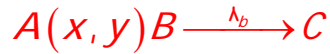
Οπότε ουσιαστικά έχουμε μία πηγή ${}^{90}\text{Y}$ με χρόνο ημιζωής 28 y αντί για 65 h.



Γ. Τσιπολίτης

Παραγωγή ραδιοϊσοτόπων με βομβαρδισμό

- Εφαρμογή των αλυσιδωτών ραδιενεργών διασπάσεων είναι η παραγωγή ραδιοϊσοτόπων από την πυρηνική αντίδραση:



Αν $\sigma(A \rightarrow B)$ είναι η ολική ενεργός διατομή,

F : η ροή σωματιδίων x και

N_a : ο αριθμός πυρήνων A

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_a}{dt} &= -F \cdot \sigma(A \rightarrow B) \cdot N_a = -\lambda_a N_a \\ \frac{dN_b}{dt} &= -\lambda_b N_b + \lambda_a N_a \\ \frac{dN_c}{dt} &= \lambda_b N_b \end{aligned} \right\}$$

Το πλήθος των πυρήνων B θα είναι μέγιστο σε χρόνο:

$$t_{\max} = \frac{\ln(\lambda_b / \lambda_a)}{\lambda_b - \lambda_a}$$

Γ. Τσιπολίτης

Παράδειγμα

- Cu αποτελείται από 69% ^{63}Cu και 31% ^{65}Cu . Όταν βομβαρδίζεται από θερμικά νετρόνια ενός αντιδραστήρα σχηματίζονται ^{64}Cu και ^{66}Cu . Οι χρόνοι ημιζωής των ισοτόπων είναι 12.7 h και 5.1 min αντίστοιχα. Ποια είναι η ενεργότητα κάθε ισοτόπου αν 1 gr Cu δεχτεί ροή 10^9 n/cm²·s για 15 min;

$$\sigma(^{63}\text{Cu} + n \rightarrow ^{64}\text{Cu}) = 4.4 \text{ b}$$

$$\sigma(^{65}\text{Cu} + n \rightarrow ^{66}\text{Cu}) = 2.2 \text{ b}$$

$$\lambda_a = F \cdot \sigma(A \rightarrow B) = \begin{cases} 10^9 \times (4.4 \times 10^{-24}) = 4.4 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1} & ^{64}\text{Cu} \\ 10^9 \times (2.2 \times 10^{-24}) = 2.2 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1} & ^{66}\text{Cu} \end{cases}$$

Γ. Τσιπολίτης

Ρυθμός διάσπασης:

$$\lambda_b = \frac{1}{\tau_m} = \begin{cases} \frac{\ln 2}{12.7} = 0.054 \text{ h}^{-1} \text{ } ^{64}\text{Cu} \\ \frac{\ln 2}{5.1} = 0.136 \text{ min}^{-1} \text{ } ^{66}\text{Cu} \end{cases}$$

Ενεργότητα κάθε ισοτόπου μετά από χρόνο t είναι $\lambda_b N_b(t)$

Αφού $\lambda_a \ll \lambda_b$ τότε $\lambda_b N_b(t) = N_a(0) \lambda_a (1 - e^{-\lambda_a t})$

$$\text{για } N_a(0) = \left(\frac{6.023 \times 10^{23}}{A} \right) \times (\text{περιεκτικότητα}) \times (1\text{g})$$

Γ. Τσιπολίτης

$$\lambda_b N_b(15 \text{ min}) = \begin{cases} 3.86 \times 10^5 \text{ dps} = 10.43 \text{ } \mu\text{Ci} & ^{64}\text{Cu} \\ 5.62 \times 10^6 \text{ dps} = 152 \text{ } \mu\text{Ci} & ^{66}\text{Cu} \end{cases}$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο υπολογισμός του t_{\max}

$$t_{\max} = \frac{\ln(\lambda_b / \lambda_a)}{\lambda_b - \lambda_a}$$
$$t_{\max} = \begin{cases} 16,8 \text{ d} & \text{για } ^{64}\text{Cu} \\ 3,4 \text{ h} & \text{για } ^{66}\text{Cu} \end{cases}$$

Γ. Τσιπολίτης

Ασκήσεις - Παραδείγματα

Γ. Τσιπολίτης

Κινητική Ενέργεια:

$$K = \int F dx = \int \frac{dp}{dt} dx = \int dp \cdot u = \int (dm \cdot u + m \cdot du) \cdot u = \int u^2 dm + \int m u du$$

$$\text{Όμως } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Rightarrow m^2 c^2 - m^2 u^2 = m_0^2 c^2 \quad (1)$$

$$\text{Το διαφορικό της (1) είναι: } \cancel{2} m dm \cdot c^2 - \cancel{2} m dm \cdot u^2 - m^2 \cdot \cancel{2} u du = 0 \\ \Rightarrow u^2 dm + m u du = c^2 dm$$

Επομένως η έκφραση για την κινητική ενέργεια γίνεται:

$$K = \int c^2 dm = mc^2 - m_0 c^2 = E - E_0 \Rightarrow \boxed{E = K + E_0}$$

$$\text{Επίσης (1) } \Rightarrow m^2 c^2 = m_0^2 c^2 + m^2 u^2 \Rightarrow m^2 c^4 = m_0^2 c^4 + m^2 u^2 c^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \Rightarrow E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$\text{Επομένως } \boxed{(K + m_0 c^2)^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

Γ. Τσιπολίτης

Παράδειγμα 1: Ποια είναι η ταχύτητα ενός e^- με $K=2$ MeV;

$$K = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0c^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{K + m_0c^2}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Rightarrow 1 - \frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{m_0c^2}{K + m_0c^2} \right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{u^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0c^2}{K + m_0c^2} \right)^2 \Rightarrow u = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{K + m_0c^2} \right)^2}$$

Άρα

$$u = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.511}{2 + 0.511} \right)^2} = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.5}{2.5} \right)^2} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{c\sqrt{24}}{5} \Rightarrow$$
$$u \approx 0.98c$$

Γ. Τσιπολίτης

Παράδειγμα 2: Ποιά είναι η ισοδύναμη μάζα φωτονίου 5000 \AA ;
($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$)

$$mc^2 = E = h\nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \Rightarrow m = \frac{h\nu}{c^2}$$
$$\Rightarrow m = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{(5 \times 10^3 \times 10^{-10} \text{ m}) \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s})} \approx 4.42 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

Γ. Τσιπολίτης

Για μικρές ταχύτητες ($u/c \ll 1$):

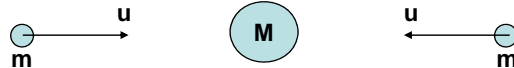
$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2} + \dots$$

Άρα

$$\begin{aligned} K = E - E_0 &= mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0c^2 = \\ &= m_0c^2 \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right] = m_0c^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2} + \dots\right) - 1 \right] \approx \frac{1}{2} m_0u^2 \end{aligned}$$

Γ. Τσιπολίτης

Δύο όμοια σώματα με μάζα ηρεμίας m_0 κινούνται με ταχύτητες ίσου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς



$$E_f = E_i \Rightarrow Mc^2 = 2mc^2 = 2 \cdot \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow M = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Γ. Τσιπολίτης

Παράδειγμα 3: Πόσες διασπάσεις ανά sec προέρχονται από υλικό ενεργότητας 2 μCi ;

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ dps}$$

$$N = 2 \times 10^{-6} \times 3.7 \times 10^{10} \text{ dps} \Rightarrow N = 7.4 \times 10^4 \text{ dps}$$

Παράδειγμα 4: Η σταθερά διάσπασης του ^{226}Ra είναι:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0.69}{1500 \text{ yrs}} = \frac{0.69}{1500 \times 365 \times 864000 \text{ sec}} \Rightarrow$$

$$\lambda = 1.46 \times 10^{-11} \text{ sec}^{-1}$$

Γ. Τσιπολίτης

Παράδειγμα 5: Πόση είναι η ενεργότητα 1 gr ^{226}Ra ;

Η ενεργότητα υπολογίζεται από τη σχέση $-\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$

Όπου $\lambda = 1.46 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ (βλ. παράδειγμα 4)

Αν A gr Ra έχουν $R_o = 6.023 \times 10^{23}$ πυρήνες
τα $m=1$ gr θα έχουν έστω N πυρήνες } $\Rightarrow N = R_o \cdot \frac{m}{A}$

Επομένως:

$$\lambda \cdot N = (1.46 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}) \cdot (6.023 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}) \cdot \frac{1 \text{ gr}}{226} = 3.9 \times 10^{10} \text{ dps}$$

Γ. Τσιπολίτης

Παράδειγμα 6:

Συμπληρώστε την πυρηνική αντίδραση: ${}^2_1\text{d} + {}^{16}_8\text{O} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^A_Z\text{X}$

Θα είναι: $Z=7$ και $A=14$, δηλαδή ${}^{14}_7\text{X} \equiv {}^{14}_7\text{N}$

Παράδειγμα 7: Μετά από πόσο χρονικό διάστημα από 5 mg ${}^{22}\text{Na}$ ($T_{1/2}=2.6$ y) θα έχει μείνει 1 mg;

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda t} = m_0 \cdot e^{-t/\tau_m}, \quad T_{1/2} = \tau_m \cdot \ln 2$$

$$\Rightarrow m = m_0 \cdot e^{-t \cdot \frac{\ln 2}{T_{1/2}}} \Rightarrow t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) \Rightarrow t = \frac{2.6 \text{ y}}{0.69} \cdot \ln\left(\frac{5}{1}\right)$$

$$\Rightarrow t = 6.04 \text{ y}$$

Γ. Τσιπολίτης

Αλληλεπιδράσεις

Γ. Τσιπολίτης

Φορτισμένα Σωματίδια

- Σωματίδιο μάζας m_0 , ταχύτητας $u = \beta c$ "συγκρούεται" με ένα από τα ηλεκτρόνια. Η μέγιστη μεταφερόμενη ενέργεια είναι:

$$E_{\max}^{\text{kin}} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{m_0} + \left(\frac{m_e}{m_0}\right)^2} = \frac{2m_e p^2}{m_0^2 + m_e^2 + 2m_e E / c^2}, \quad \text{όπου } E = m_0 \gamma c^2$$

για $m_0 \gg m_e$ και $2\gamma m_e / m_0 \ll 1 \Rightarrow E_{\max}^{\text{kin}} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$

Για σχετικιστικό σωματίδιο ($E^{\text{kin}} \sim E \sim pc$):

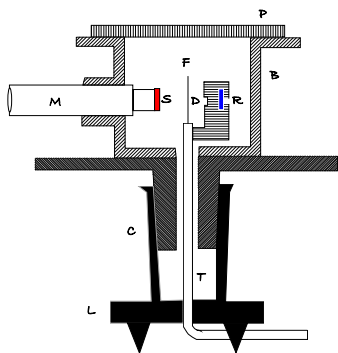
$$E_{\max}^{\text{kin}} = \frac{E^2}{E + m_0 c^2 / 2m_e}$$

- $\mu - e$: $E_{\max}^{\text{kin}} = \frac{E^2}{E + 11} \quad (E \text{ σε GeV})$

- $e - e$: $E_{\max}^{\text{kin}} = \frac{p^2}{E/c^2 + m_e} = \frac{E^2 - m_e^2 c^4}{E + m_e c^2} = E - m_e c^2$

Γ. Τσιπολίτης

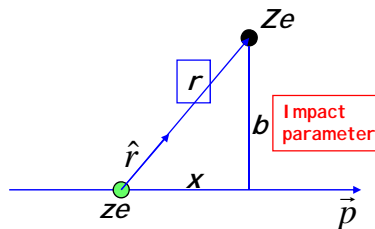
Σκέδαση Rutherford



M	microscope
S	scintillation screen
F	scattering foil
D	diaphragm
R	radioactive source
B	vacuum chamber body



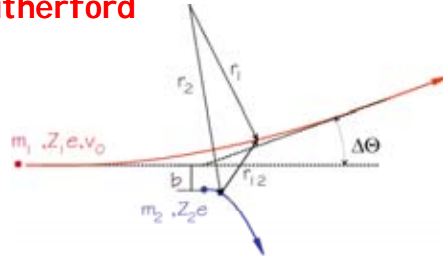
Γ. Τσιπολίτης



$$\vec{F} = \frac{zeZe}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Σκέδαση Rutherford

- Μεταφερόμενη ορμή στο Z_2e



$$p_b = \int_{-\infty}^{+\infty} F_b dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r^2} \frac{b dx}{r \beta c}$$

$$p_b = \int_{-\infty}^{+\infty} F_b dt = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\beta c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dx}{(\sqrt{x^2 + b^2})^3} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\beta c b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x/b)}{(1 + (x/b)^2)^3}$$

$$p_b = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{\beta c b} = \frac{2r_e m_e c}{\beta c b} Z_1 Z_2$$

με $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$

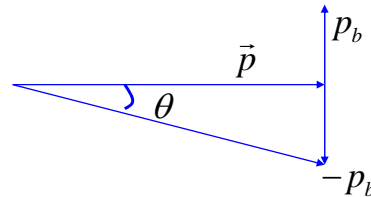
Κλασσική ακτίνα e

Γ. Τσιπολίτης

Σκέδαση Rutherford

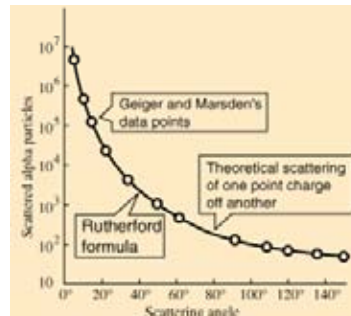
- Γωνία σκέδασης

$$\theta = \frac{p_b}{p} = \frac{2zZe^2}{bc\beta} \frac{1}{p}$$



$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{N_0}{256\pi^2 \epsilon_0^2} [nt] Z_1^2 Z_2^2 e^4 \frac{1}{(\frac{1}{2} m_1 v_0^2)^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta_{CM}}{2}}$$

N_0 number of beam particles
 n target material in atoms/volume
 t target thickness
 and b is the impact parameter



Γ. Τσιπολίτης