Πέμπτη 9.10 Εισαγωγικά 9ος όροφος 913
Αίθουσα αρ. 1683

ΒΙΒΛΙΟ: ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 10.10.2008
ΒΙΒΛΙΟ: Κλασική Μηχανική Ιωάννου - Αποστολάτου Εκδ. Leader

<u>Βαθμοί ελευθερίας</u>: το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών που περιγράφουν την κίνηση

Ένα σώμα θεωρείται
<u>Υλικό σημείο</u> όταν η μεγαλύτερη του διάσταση τείνει στο μηδέν.

<u>Διαφορά Δρόμου - Τροχιάς</u>
Δρόμος: καμπύλη καθαρά γεωμετρική, ∄ η έννοια του χρόνου

Τροχιά: ο τρόπος που διανύονται τα διαστήματα στο χρόνο. Το σύνολο των μεταβολών που αλλάζουμε στο χρόνο, σημεία που εξαρτώνται από το χρόνο

Ελευθερία κίνησης: οι μεταβλητές μεταβάλλονται ανεξάρτητα η μια από την άλλη, ελεύθερα.

Αν όμως πούμε για π.χ ότι θέλουμε να κινείται παράλληλα στον x άξονα, τότε μόνο οι 2 κινούνται ελεύθερα.

Η σταθεροποίηση μιας από τις x, y, z ισοδυναμεί με τη χρήση μιας δεσμικής ράβδου. Αν έχω 3 δεσμικές ράβδους τότε ∃ ακινησία
Αν έχω 2 ράβδους → κίνηση σε ευθεία
Αν έχω 1 ράβδο → κίνηση σε επίπεδο
Αν δεν έχω ράβδο → κίνηση στο χώρο

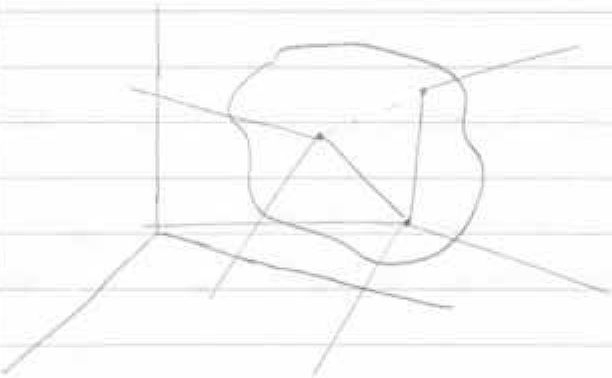
Το πλήθος των κατάλληλα τοποθετημένων δεσμικών ράβδων (να μην είναι συνεπίπεδες, συγκεκριμένα να είναι ορθογώνιες) ώστε ένα υλικό σημείο να ακινητοποιείται ονομάζονται ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ή ΒΑΘΜΟΙ ΚΙΝΗΤΟΤΗΤΑΣ.

Configuration → ο χώρος
Event → χώρος $\cup$ χρόνο
ένωση

Βαθμοί

ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ Μπορώ να μιλάω για ταχύτητα στερεού σώματος ΜΟΝΟ αν κάνει μεταφορική κίνηση.

Για να περιγράψω την κίνηση ενός στερεού σώματος μου αρκούν 3 σημεία που δεν είναι ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ.

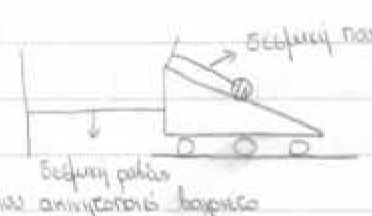


Στερεό σώμα: $\|r_i - r_j\| =$ σταθερό $\forall i,j$
Συνθήκη Στερεότητας

δεσμική ράβδος
ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ: 6 ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

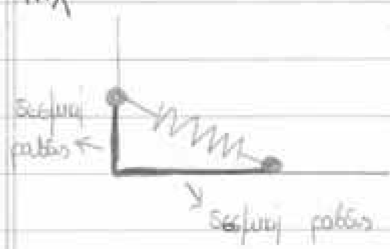
Για να βρούμε τους Βαθμούς Ελευθερίας είναι καλύτερα να βρίσκουμε τις ΔΕΣΜΙΚΕΣ ΡΑΒΔΟΥΣ

π.χ



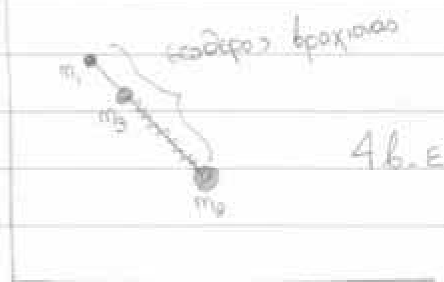
μεταφορική κίνηση → 1 βαθμό
χάντρα → 1 βαθμός

π.χ



2 β.ε

π.χ



$m_1, m_2 \rightarrow$ στερεό σώμα

στο επίπεδο $\rightarrow$ 3 β.ε

(2 για κίνηση + 1 για περιστροφή
(πώς το βάζω) ΔΕΣ ΤΟ
αφαίρεση + κλίση
 2 $\qquad$ 1

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Έστω $x^2+y^2+z^2=R^2(t)$

Αν $F(x,y,z;t;R)=0$ Τότε ο σύνδεσμος λέγεται ΟΛΟΝΟΜΟΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ

ΟΛΟΝΟΜΟΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}=0 & \text{ΣΚΛΗΡΟΝΟΜΟΣ} \\ \frac{\partial F}{\partial t}\neq 0 & \text{ΡΕΟΝΟΜΟΣ} \end{cases}$

Ο σύνδεσμος είναι ένα τεχνικό μέσο για να περιορίσουμε την ελευθερία της κίνησης, δηλ. να αφαιρέσω βαθμούς ελευθερίας.

▶ Έστω ότι έχουμε σύστημα με n το πλήθος σημεία $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),\ldots$ (x_n,y_n,z_n)

...υμβολίζω τα ...με:

$x_1\ y_1\ z_1\ x_2\ y_2\ z_2\ x_3\ y_3\ z_3, \ldots \quad x_n\ y_n\ z_n$

$u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5\ u_6\ u_7\ u_8\ u_9 \quad u_{3n-2}\ u_{3n-1}\ u_{3n}$

Για τυχαία θέση: $u_{3i-2}, u_{3i-1}\ u_{3i}$, $i=1,2,\ldots,n$

Για σύστημα $\overset{\text{σημείων}}{\text{έχω}}$ $\overset{\text{ολονομο}}{\text{σύνδεσμο}}$ αν $F(u_1,u_2,\ldots,u_{3n};t)=0$

Πέμπτη 9.10 Εισαγωγικά 9η ώρα ΘΒ
Αίθουσα ?γρ. 1683

ΒΙΒΛΙΟ: ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΒΙΒΛΙΟ: Κλασική Μηχανική Ιωάννου-Αποστολάτου Εκδ. Leader

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 10.10.2008

Βαθμοί ελευθερίας: το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών που περιγράφουν την κίνηση

Ένα σώμα θεωρείται
Υλικό σημείο όταν η μεγαλύτερή του διάσταση τείνει στο μηδέν.

Διαφορές Δρόμου - Τροχιάς

Δρόμος: καμπύλη καθαρά γεωμετρική, ∄ η έννοια του χρόνου

Τροχιά: ο τρόπος που διανύονται τα διαστήματα στο χρόνο. Το σύνολο των μεταβολών που ανάγαμε στο χρόνο, σημεία που εξαρτώνται από το χρόν

Ελευθερία κίνησης: οι μεταβλητές μεταβάλλονται ανεξάρτητα η μια από την άλλη, ελεύθερα.

Αν όμως πούμε για π.χ ότι θέλουμε να κινείται παράλληλα στον x άξονα, τότε μόνο οι 2 κινούνται ελεύθερα.

Η σταθεροποίηση μιας από τις x, y, z ισοδυναμεί με τη χρήση μιας δεσμικής ράβδου. Αν έχω 3 δεσμικές ράβδους τότε ∃ ακινησία

Αν έχω 2 ράβδους → κίνηση σε ευθεία

Αν έχω 1 ράβδο → κίνηση σε επίπεδο

Αν δεν έχω ράβδο → κίνηση στο χώρο

Το πλήθος των κατάλληλα τοποθετημένων δεσμικών ράβδων (να μην είναι συνεπίπεδοι, δηλαδή να είναι ορθογώνιοι) ώστε ένα υλικό σημείο να ακινητοποιείται ονομάζονται ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ή ΒΑΘΜΟΙ ΚΙΝΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ.

Configuration → ο χώρος

Event → χώρος $\underset{\text{ένωση}}{\cup}$ χρόνο

Βαθμοί

Αν έχω L τέτοιους συνδέσμους, τότε θα πρέπει να δείξω 3n-L δεσμικά ράβδους για να ακινητοποιηθεί το (2).

Ο ολόνομος σύνδεσμος περιορίζει την κίνηση σε υπόχωρο του αρχικού χώρου

Ο ανολόνομος σύνδεσμος περιγράφεται από ανισοτική σχέση

* Η δυνατή γεωμετρική μετατόπιση συμβολίζεται με $\delta \underline{u}$ (έχω παγώσει το χρόνο) ενώ η πραγματική μετατόπιση συμβολίζεται με $d\underline{u}$

Άρα θέλουμε $\delta \underline{u}$ που είναι συμβιβαστά με τους συνδέσμους.

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\delta u_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_{3n}}\delta u_{3n} = 0 \qquad \text{κ.λ.π}$$

Αν έχω ρεόνομο σύνδεσμο τότε αν έχω δυνατές μετατοπίσεις (δηλ. έχω παγώσει το χρόνο) δεν χρειάζεται να βάλω τον όρο $\frac{\partial f_1}{\partial t}\delta t$ ενώ αν έχω πραγματικές μετατοπίσεις βάζω $\frac{\partial f_1}{\partial t}dt$.

* Παίρνοντας $\delta \underline{u}$, τότε από τα $u_1\ u_2\ u_3 \dots\ u_{3n}$

με μετατόπιση έχουμε $u_1+\delta u_1,\ u_2+\delta u_2 \dots\ u_{3n}+\delta u_{3n}$

κ' ισχύει $f(u_1+\delta u_1, u_2+\delta u_2, \dots u_{3n}+\delta u_{3n}) = 0$ διότι θέλω να είναι πάνω στην επιφάνεια. Παίρνοντας τη γραμμική (1ης τάξεως) προσέγγιση την Taylor βγάζαμε τη σχέση $\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\delta u_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_{3n}}\delta u_{3n} = 0$

ΔΕΣ! $f(u+\delta u) = \overset{0}{f(\underline{u})} + \sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\delta u_i$ πρώτης τάξεως προσέγγιση Taylor

$f(u_1, u_2, \ldots, u_{3n}; t) = 0$

Μπορεί να γραφεί ως

$$A_1 \delta u_1 + A_2 \delta u_2 + \ldots + A_{3n} \delta u_{3n} + A_t \delta t = 0 \quad \text{Μορφή Pfaff}$$

$$A_1 \dot{u}_1 + A_2 \dot{u}_2 + \ldots + A_{3n} \dot{u}_{3n} + A_t = 0 \quad \text{I}$$

Οι ανολόνομοι σύνδεσμοι είναι ΜΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΙ ως προς την διαφορική τους μορφή (I)

Αν εξ αρχής δίνονται στη μορφή $f(u_1, u_2, \ldots, u_{3n}; t) = 0$ (ολοκλήρωμα) τότε ΑΜΕΣΩΣ γνωρίζω ότι είναι ΟΛΟΝΟΜΟΙ σύνδεσμοι

- Πώς διαπιστώνω ότι οι εξισώσεις των συνδέσμων που έχω φτιάξει είναι ανεξάρτητες; (οι σύνδεσμοι είναι ανεξάρτητοι, οι εξισώσεις τους όμως είναι;)

Έστω L σύνδεσμοι

$$f_\ell(u_1, u_2, \ldots, u_{3n}; t) = 0, \quad \ell = 1, 2, \ldots, L$$

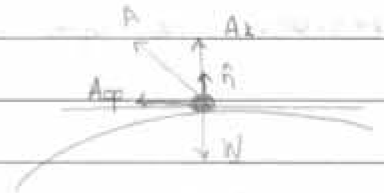
ή

$$A_{11}\delta u_1 + A_{12}\delta u_2 + \ldots + A_{1,3n}\delta u_{3n} = 0$$
$$A_{2,1}\delta u_1 + A_{2,2}\delta u_2 + \ldots + A_{2,3n}\delta u_{3n} = 0$$
$$\vdots$$
$$A_{L,1}\delta u_1 + A_{L,2}\delta u_2 + \ldots + A_{L,3n}\delta u_{3n} = 0$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,3n} \\ A_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{L,1} & A_{L,2} & \cdots & A_{L,3n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ \vdots \\ du_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αν ο βαθμός του πίνακα είναι L, τότε είναι ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΙ. Αν όχι ο βαθμός του πίνακα, τότε αυτά το πλήθος είναι ανεξάρτητα.

Οι σύνδεσμοι εκπροσωπούνται δυναμικά από μια δύναμη. Όταν ένας σύνδεσμος εισάγεται, περιορίζει την κίνηση. Η κίνηση προκαλείται από ένα αίτιο (δύναμη), οπότε για να εμποδίσω την κίνηση θα πρέπει να ασκήσω κατάλληλη δύναμη.

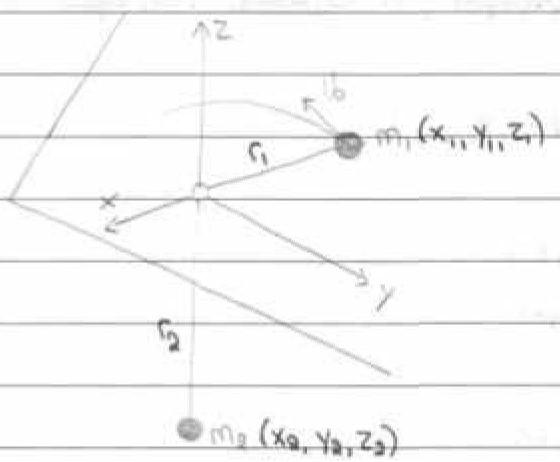


$F = x^2 + y^2 + z^2 - R = 0$

$\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \hat{n}$ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΤΙΔΡΑΣΗΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΥ

Το σύστημα των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι οι W, A_{φ}. Την A_{φ} την καθορίζουμε εμείς, ανάλογα με το υλικό που θα φτιάξουμε την επιφάνεια.

π.χ



Η m_1 ακινητοποιείται με 2 δεσμικά ράβδου, οπότε έτσι ακινητοποιείται κ' η m_2. Άρα έχω 2 β.ε

Οπότε έχω 4 συνδέσμους

$x_2 = 0$

$y_2 = 0$

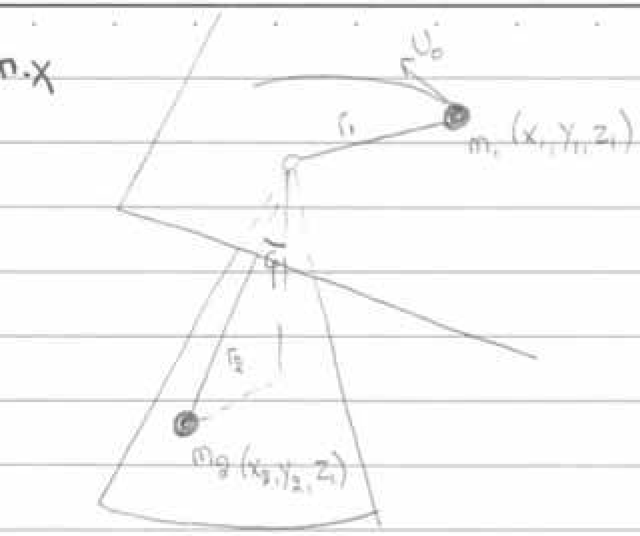
$z_1 = 0$

$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + z_2 = L$ διότι $r_1 + r_2 = L$

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ενός στερεού σώματος όταν ένα πλήθος σημείων (περισσοτέρων των 2) που βρίσκονται σε μια ευθεία παραμένουν ακίνητα κ' όλα τα υπόλοιπα περιστρέφονται γύρω από αυτή την ευθεία που ονομάζουμε άξονα

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 17.10.2008

π.χ



Σύνδεσμοι:

$z_1=0$

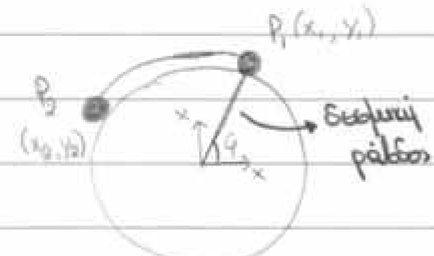
$r_1+r_2=L$ ή $\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\dfrac{z_2}{\cos\varphi}=L$

$\dfrac{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{z_2}=$ σταθ.

Άρα θέλω 3 δεσμικές ράβδους → 3 β.ε

Είναι εμφανές ότι είναι ανεξάρτητες οι ~~εναρεί~~ εξισώσεις, οπότε δεν χρειάζεται να παραγωγίσω για να βρω τον βαθμό του πίνακα κ.λ.π

π.χ



Σύνδεσμοι:

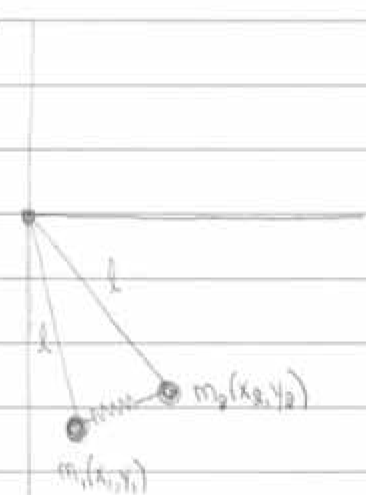
$x_1^2+y_1^2=R^2$

$x_2^2+y_2^2=R^2$

$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=$ σταθ.

Άρα έχω 3 συνδέσμους οπότε θέλω 1 δεσμική ράβδο, δηλ 1 β.ε

π.χ



Σύνδεσμοι:

$x_1^2+y_1^2=l^2$

$x_2^2+y_2^2=l^2$

Άρα έχω 2 συνδέσμους, οπότε θέλω 2 δεσμικές ράβδους, δηλ. 2 β.ε

▶ ΕΝΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟ ΠΟΤΕ ΔΕΝ ΜΠΑΙΝΕΙ ΩΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ