Παρασκευή 24.10.2008

Γενικευμένες Συντεταγμένες σε Ολόνομα Συστήματα

Ένα σύνολο βαθμωτών ποσοτήτων αποτελεί σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων όταν το πλήθος τους είναι το ελάχιστο που απαιτείται για τον πλήρη προσδιορισμό της κατάστασής του υπό εξέταση δυναμικού συστήματος.

▶ Οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν εκφράζουν πάντα κ' κατ' ανάγκη μήκη.

Έχουμε ℓ ολόνομους ανεξάρτητους συνδέσμους:

$$f_\ell(u_1, u_2, \dots, u_{3n}; t) = a_\ell \quad , \quad \ell = 1, 2, \dots, L$$

Εισάγω έναν μετασχηματισμό

$$Q_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_{3n}, t)$$
$$Q_2 = \varphi_2(u_1, u_2, \dots, u_{3n}, t)$$
$$\vdots$$
$$Q_L = \varphi_L$$
$$\vdots$$
$$Q_{3n} = \varphi_{3n}(u_1, u_2, \dots, u_{3n}; t)$$

Όπου $\varphi_1, \varphi_2, \dots,$ αυθαίρετες συναρτήσεις οι οποίες είναι ανεξάρτητες, τουλάχιστον μια φορά παραγωγίσιμες κ' αντιστρέψιμες

Μπορώ να πω τότε $\varphi_i = f_i$ οπότε

$$Q_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_{3n}, t) = a_1$$
$$Q_2 = \varphi_2(u_1, u_2, \dots, u_{3n}, t) = a_2$$
$$\vdots$$
$$Q_L = \varphi_L(u_1, u_2, \dots, u_{3n}, t) = a_L$$

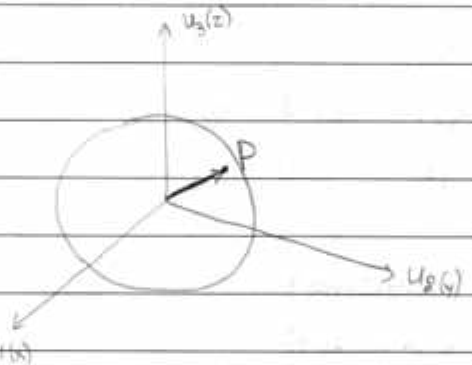
κ' επομένως αντιστρέφοντας έχω:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_1(q_1, q_2 \ldots q_L\, \overset{q_1}{Q_{L+1}}, \ldots, \overset{q_{3n-L}}{Q_{3n}}) \\
u_2 &= u_2(q_1, \ldots \qquad\qquad) \\
&\vdots \\
u_{3n} &= u_{3n}(\qquad\qquad)
\end{aligned}$$

$$q_j = Q_{L+j}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Με τις γενικευμένες συντεταγμένες πηγαίνω από ένα χώρο δεσμευμένης κίνησης σε ένα χώρο ελεύθερης κίνησης, απαλλάσσω σχ. από τους συνδέσμους. Οι γενικευμένες συντεταγμένες, τα δq_i, dq_i, οι ρυθμοί μεταβολής είναι ανεξάρτητα.

π.χ



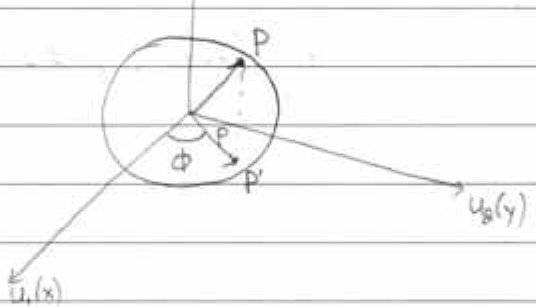
$$f = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = R^2$$

Βάζω
$$\begin{aligned}
Q_1 &= f = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = R^2 \\
Q_2 &= q_2(u_1, u_2, u_3) = x \\
Q_3 &= q_3(u_1, u_2, u_3) = y
\end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας:
$$\begin{aligned}
z &= u_3 = u_3(R, \overset{q_1}{Q_2}, \overset{q_2}{Q_3}) \\
x &= u_1 = u_1(\qquad) = q_1 \\
y &= u_2 = u_2(\qquad) = q_2
\end{aligned}$$

Ο χώρος (q_1, q_2) με διάσταση 2 είναι υπόχωρος του αρχικού.

Κυλινδρικές Συντεταγμένες



$$Q_1 = \varphi_1(\quad) = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} = \sqrt{\rho^2+u_3^2} = R$$

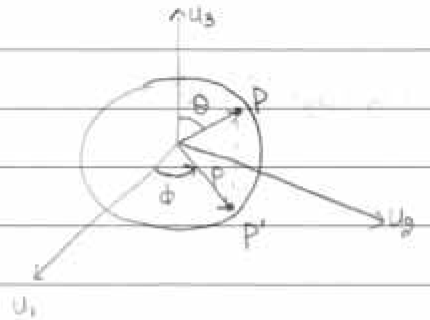
$$Q_2 = \varphi_2(\quad) = \sqrt{u_1^2+u_2^2} = \rho = q_1$$

$$Q_3 = \varphi_3(\quad) = \arctan\frac{u_2}{u_1} = \Phi = q_2$$

$$u_{1,2,3} = u_{1,2,3}(R, Q_2, Q_3) = u_{1,2,3}(R, q_1, q_2)$$

όπου
$$u_1 = \rho\cos\Phi = q_1\cos q_2$$
$$u_2 = \rho\sin\Phi = q_1\sin q_2$$
$$u_3 = u_3 = \sqrt{R^2 - q_1^2}$$

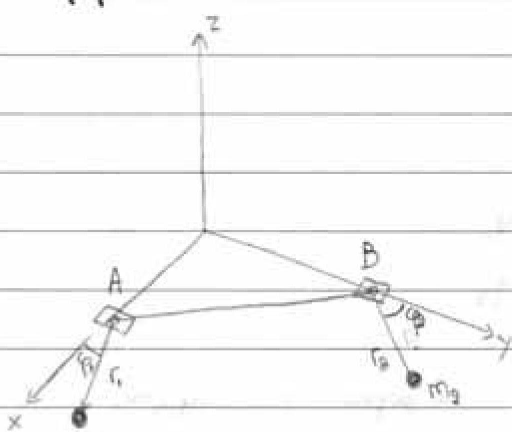
Σφαιρικές Συντεταγμένες



$$Q_1 = R$$
$$Q_2 = \varphi_2(\quad) = \Phi = q_1$$
$$Q_3 = \varphi_3 \quad = \Theta = q_2$$

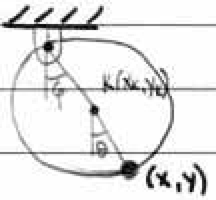
$$u_1 = R\sin\Theta\cos\Phi$$
$$u_2 = R\sin\Theta\sin\Phi$$
$$u_3 = R\cos\Theta$$

Άσκηση



$$r_1 + r_2 + AB = L$$
$$x_2 = 0$$
$$y_1 = 0$$

Στο χώρο $(r_1, \varphi_1, \varphi_2)$ ∄ σύνδεσμοι π.χ



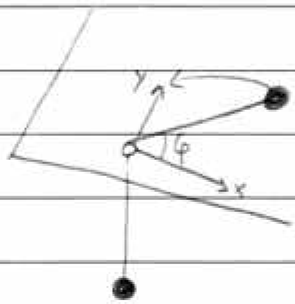
$x_κ^2 + y_κ^2 = R^2$ άρα 2 β.ε

$(x_κ - x)^2 + (y_κ - y)^2 = R^2$

Για γενικευμένες συντεταγμένες μπορώ να πάρω $(x_κ, y)$, $(φ, x)$, $(φ, y)$, $(θ, x_κ)$, $(θ, y_κ)$, $(φ, θ)$ κ.λ.π

ΔΕΣ ΤΟ

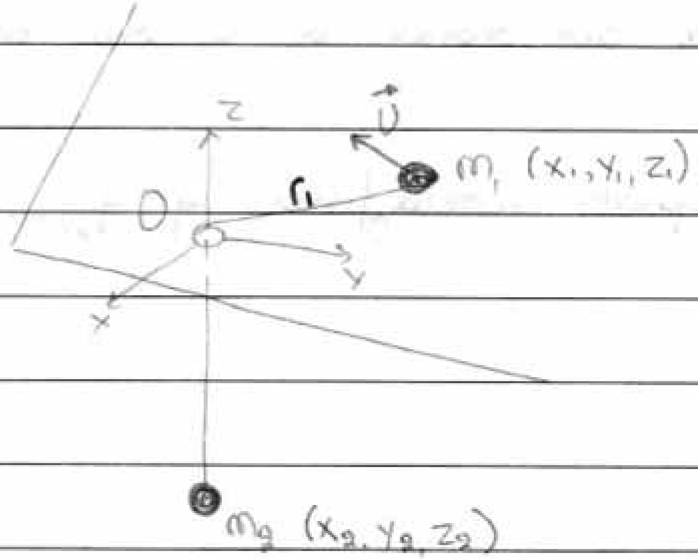
π.χ



2 β.ε

(x, z), (y, z), $(φ, z)$

Π.χ



Σύνδεσμοι

1. $z_1 = 0$
2. $x_2 = 0$
3. $y_2 = 0$
4. $OP_1 + OP_2 = \ell$

$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + z_2 = \ell$

Επιλέγω ως γενικευμένη συντεταγμένη τις (z_2, x_1)

$x_1 = x_1$

$y_1 = \sqrt{r_1^2 - x_1^2}$

$z_1 = 0$

$x_2 = 0$

$y_2 = 0$

$z_2 = \ell - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

(r_1, φ) :

$x_1 = r_1 \cos\varphi$

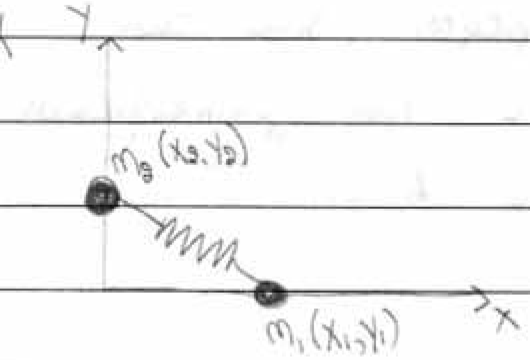
$y_1 = r_1 \sin\varphi$

$z_1 = 0$

$x_2 = 0$

$y_2 = 0$

$z_2 = \ell - r_1$



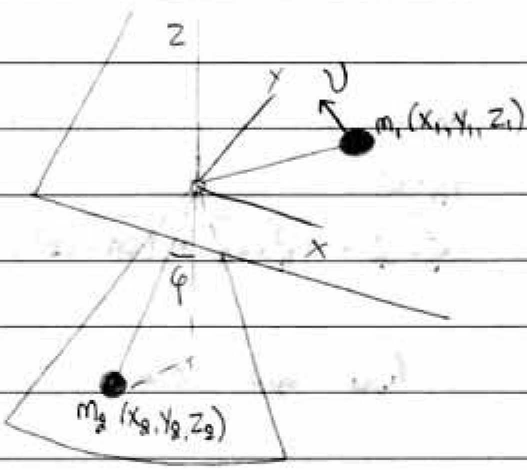
$y_1 = 0$

$x_2 = 0$

γ.σ (x_1, y_2), ...

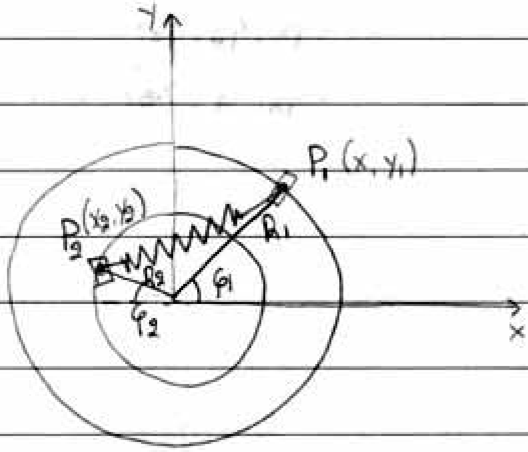
Πέμπτη 30.10.2008

π.χ



$z_1=0$

π.χ



$x_1^2+y_1^2=R_1^2$

$x_2^2+y_2^2=R_2^2$

γ.υ (x_1,x_2) (x_1,y_2) (y_1,x_2) (y_1,y_2)

(x_1,φ_2) (y_1,φ_2) (x_2,φ_1) (y_2,φ_1)

(φ_1,φ_2)

$q_1\ q_2$

(x_1,x_2) :

$x_1=x_1$ (ταυτοτικό)

$y_1=\sqrt{R_1^2-x_1^2} = f(x_1,x_2)$ ανεξάρτητα από το x_2 $\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$

$x_2=x_2$ (ταυτοτικό)

$y_2=\sqrt{R_2^2-x_2^2} = g(x_1,x_2)$

$q_1\ q_2$

(φ_1,φ_2)

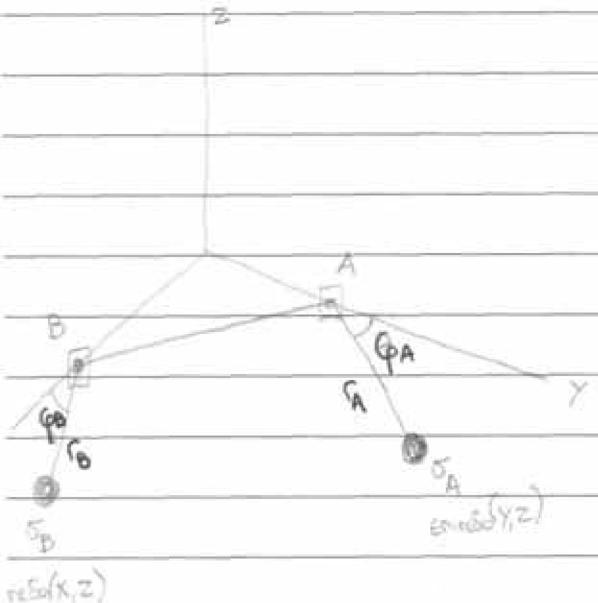
$x_1=R_1\cos\varphi_1=R_1\cos q_1$ $Q_1=a_1$ $u_1=u_1(a,a_2,$

$y_1=R_1\sin\varphi_1=R_1\sin q_1$ $Q_2=a_2$

$x_2=R_2\cos\varphi_2=R_2\cos q_2$ $Q_3=\varphi_3(u_1,u_2,u_3,u_4)$

$y_2=R_2\sin\varphi_2=R_2\sin q_2$ $Q_4=\varphi_4(u_1,u_2,u_3,u_4)$

π.χ.



$x_A = 0$

$y_B = 0$

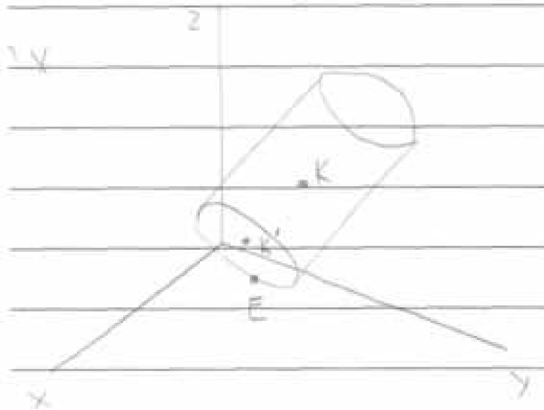
$\sqrt{x_B^2 + z_B^2} + \sqrt{y_A^2 + z_A} + \sqrt{OA^2 + OB^2} = l$

Άρα έχω 3 β.ε

γ.σ $(\varphi_A, \varphi_B, r_A)$

$(\varphi_A, \varphi_B, r_B)$

(φ_A, r_A, x_B) ......



ΔΕΞ Πρόβλημα κυλίσματος

∄ ανολόνομοι σύνδεσμοι ?

όρος σύνδεσμος