

ΘΕΜΑΤΑ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΙΙ

Θέμα 1. α) Δείξτε ότι οι διακριτές ιδιοτιμές της ενέργειας σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα δεν είναι εκφυλισμένες.

β) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα να δείξετε ότι μπορούμε να διαλέξουμε τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις (δέσμιες καταστάσεις) να είναι πραγματικές.

Θέμα 2. α) Σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα να δείξετε ότι ισχύει

$$\frac{d}{dt} \langle xp \rangle = 2 \langle T \rangle - \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

όπου $H = T + V$, και T η κινητική ενέργεια.

β) Δείξτε ότι εάν το σύστημα είναι σε μια δέσμια κατάσταση το αριστερό μέλος είναι μηδέν.

γ) Δείξτε ότι $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ για τις δέσμιες καταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

Θέμα 3. Σωματίδιο μάζας m κινείται μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού πλάτους a ($0 < x < a$).

α) Βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις Ψ_n και τις ιδιοτιμές της ενέργειας E_n του σωματιδίου.

β) Μία μικρή διαταραχή $V(x)$ προστίθεται στο σύστημα, $V(x) = -V_0$ για $0 < x < a/2$ και $V(x) = 0$ για $a/2 < x < a$, $V_0 > 0$. Να υπολογίσετε τις ενέργειες W_n του σωματιδίου σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών.

γ) Ομοίως όταν έχουμε $V(x) = -V_0$ για $0 < x < a/2$ και $V(x) = V_0$ για $a/2 < x < a$.

Θέμα 4. Σωματίδιο μάζας M κινείται στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας R . Υπολογίστε τις επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας, τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις και τον εκφυλισμό.

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Θέμα 5. Η κυματοσυνάρτηση του ατόμου του Υδρογόνου (υποθέτοντας άπειρη την μάζα του πυρήνα) είναι

$$\psi(r, \theta, \varphi) = c r e^{-\frac{r}{2a}} \cos \theta$$

Όπου c μια σταθερά κανονικοποίησης και $\alpha = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$.

α) Υπολογίστε την z -συνιστώσα της στροφορμής L_z και τον κβαντικό αριθμό ℓ της στροφορμής.

β) Υπολογίστε την μέση τιμή της κινητικής ενέργειας του ατόμου.

γ) Υπολογίστε την ολική ενέργεια.

$$\int_0^\infty r^k e^{-\frac{r}{\alpha}} dr = k! \alpha^{k+1}$$

Θέμα 6. (α) Να δείξετε ότι $\langle \Psi_n | [H, A] | \Psi_n \rangle = 0$ για κάθε ιδιοσυνάρτηση Ψ_n της Χαμιλτονιανής H και ενός οποιουδήποτε τελεστή A του φυσικού συστήματος.

(β) Εάν $H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(r)$ και χρησιμοποιώντας τον τελεστή $A = \vec{r} \cdot \vec{P}$ αποδείξτε ότι για κάθε ιδιοσυνάρτηση της Χαμιλτονιανής ισχύει $2\langle T \rangle = -\langle V \rangle$, όπου T ο τελεστής της κινητικής ενέργειας και $V(r)$ η δυναμική ενέργεια για το άτομο του υδρογόνου.

Θέμα 7. Η δυναμική ενέργεια σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα για ένα σωματίδιο μάζας m , είναι ανάλογη της συνάρτησης δέλτα του Dirac, $V(x) = -\lambda\delta(x)$, $\lambda > 0$.

(α) Για ποιές τιμές της ενέργειας έχουμε σκέδαση (δηλαδή συνεχές φάσμα), για ποιες τιμές έχουμε δέσμιες καταστάσεις (διακριτό φάσμα);

(β) Να βρεθούν οι δέσμιες καταστάσεις.

Θέμα 8. (α) Υπολογίστε τον μεταθέτη της κινητικής ενέργειας $\frac{\hat{p}^2}{2m}$ με τις

συνιστώσες \hat{L}_x , \hat{L}_y και \hat{L}_z της στροφορμής ($\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2$).

(β) Να δείξετε ότι $[\hat{L}_x, \hat{H}] = 0$, $[\hat{L}_y, \hat{H}] = 0$ και $[\hat{L}_z, \hat{H}] = 0$ όταν το δυναμικό είναι

συνάρτηση του μέτρου $r = |\vec{r}|$ μόνο και $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r)$.

Θέμα 9. Σωματίο μάζας m κινείται σε πηγάδι δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x < -a/2 \\ 0 & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ V_0 & x > a/2 \end{cases}$$

Υπολογίστε το πλάτος a σαν συνάρτηση των m , V_0 και \hbar , ώστε να υπάρχει **μόνο μια δέσμια κατάσταση** με ενέργεια $E = V_0/2$, όπου $V_0 > 0$.

Θέμα 10. Σωματίο μάζας m κινείται σε «απειρόβαθο» πηγάδι, $0 \leq x \leq a$, και έχει αρχική κυματοσυνάρτηση που δίνεται από την σχέση $\Psi(x, t=0) = A \sin^3(\pi x/a)$

(α) Προσδιορίστε την σταθερά A και την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x, t)$ σαν συνάρτηση του χρόνου t .

(β) Υπολογίστε την αβεβαιότητα της ενέργειας ΔE ως συνάρτηση του χρόνου.

Υπόδειξη: $\sin^3(\theta) = \frac{1}{4}(3\sin(\theta) - \sin(3\theta))$

Θέμα 11. Δίνεται η κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(\theta, \phi) = N(Y_1^{-1} + Y_1^0 + 2Y_1^{+1})$$

όπου $Y_l^m \equiv Y_l^m(\theta, \phi)$ είναι η σφαιρική αρμονική.

(α) Να υπολογίσετε την σταθερά N .

(β) Να υπολογίσετε την αβεβαιότητα στα μεγέθη L_z και L^2 .

Θέμα 12. Δίνεται η χαμιλτονιανή ενός συστήματος σπιν με δύο ίδιο-καταστάσεις,

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad \text{όπου } E_1 \neq E_2 \in \mathbb{R} .$$

(α) Την χρονική στιγμή $t=0$ το σύστημα μετρήθηκε και το σπιν του βρέθηκε να είναι στην διεύθυνση $-y$. Γράψτε την κυματοσυνάρτηση που αντιστοιχεί.

(β) Γράψτε την κυματοσυνάρτηση του συστήματος για $t \neq 0$.

(γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα για κάθε ενδεχόμενο αποτέλεσμα της μέτρησης του σπιν στην διεύθυνση x ως συνάρτηση του χρόνου και να κάνετε τις γραφικές τους παραστάσεις.

Θέμα 13. α) Αποδείξτε την σχέση που δίνει την χρονική μεταβολή της μέσης τιμής

$$\text{ενός τελεστή } A: \quad \frac{d \langle A \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

β) Εάν H είναι η Χαμιλτονιανή ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή μάζας m

και συχνότητας ω , υπολογίστε τις ποσότητες $\frac{d \langle x \rangle}{dt}$, $\frac{d \langle p \rangle}{dt}$ και δείξτε ότι

$$\frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} = -\omega^2 \langle x \rangle$$

Θέμα 14. Ένα σωματίδιο μάζας m και ενέργειας $E=V_0$ προσπίπτει από αριστερά σε ένα ορθογώνιο φράγμα δυναμικού ύψους V_0 και πλάτους a . Βρείτε τον συντελεστή διέλευσης T .

Θέμα 15. Η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος δύο καταστάσεων είναι ένας ερμιτιανός

πίνακας $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a \end{pmatrix}$ με $a \in \mathbb{R}$. Εάν το σύστημα είναι αρχικά στην κατάσταση

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{βρείτε την κατάσταση του συστήματος για } t \neq 0.$$

Θέμα 16. α) Γράψτε τις σχέσεις μετάθεσης για τους τελεστές της στροφορμής.

β) Αν $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ να δείξετε ότι $[L^2, L_k] = 0$ όπου $k=x,y,z$.

γ) Σύστημα περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή $H = \frac{L^2}{2I} + gL_z$, I και g θετικές

σταθερές με κατάλληλες μονάδες. Να βρείτε το ενεργειακό του φάσμα. Ποια πρέπει να είναι η σχέση των I και g έτσι ώστε η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας να είναι διπλά εκφυλισμένη.

Θέμα 17. Η συνάρτηση $\psi(\vec{r}) = cre^{-\frac{r}{2a}} \cos \theta$ είναι η κυματοσυνάρτηση μιας στάσιμης κατάστασης ενός φυσικού συστήματος μάζας m το οποίο έχει δυναμική ενέργεια

$V(r) = \frac{\gamma}{r}$ και ορισμένη στροφορμή ℓ , όπου γ και a σταθερές. Να υπολογίσετε:

α) Την στροφορμή ℓ του συστήματος.

β) Την ενέργεια E του συστήματος.

γ) Την σταθερά γ .

Θέμα 18. Οι τελεστές a και a^\dagger ορίζονται ως εξής:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

για έναν αρμονικό ταλαντωτή μάζας m και συχνότητας ω . Υπενθυμίζουμε τις ιδιότητες $a\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1}$, $a^\dagger\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}$ των τελεστών a και a^\dagger , όπου Ψ_n είναι ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

(α) Βρείτε την δράση των τελεστών x και p_x στην Ψ_n .

(β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή του τελεστή $(xp_x + p_x x)$ ως προς την κυματοσυνάρτηση Ψ_n ενός αρμονικού ταλαντωτή.

Θέμα 19. Σωματίδιο μάζας m κινείται κατά τον άξονα x με ιδιοσυνάρτηση βασικής κατάστασης $\Psi(x) = \frac{A}{\cosh(\lambda x)}$ όπου A, λ θετικές σταθερές.

Αν η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $V(x)$ μηδενίζεται για $|x| \rightarrow \infty$: (α) Βρείτε την τιμή της ενέργειας της βασικής στάθμης και (β) βρείτε την μορφή της δυναμικής ενέργειας. Δίνεται ότι:

$$(\cosh \lambda x)' = \lambda \sinh \lambda x, \quad (\sinh \lambda x)' = \lambda \cosh \lambda x, \quad \cosh^2 \lambda x - \sinh^2 \lambda x = 1$$

Θέμα 20. Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται την χρονική στιγμή $t=0$ από την κυματοσυνάρτηση: $\Psi = N(\psi_{100} - \psi_{211} + \psi_{32,-1})$, όπου ψ_{100} , ψ_{211} και $\psi_{32,-1}$ κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις του ατόμου του υδρογόνου. (α) Υπολογίστε τον συντελεστή κανονικοποίησης N και την χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου. (β) Υπολογίστε τις μέσες τιμές $\langle l^2 \rangle$, $\langle l_z \rangle$ και $\langle E \rangle$, καθώς και την αβεβαιότητα Δl^2 .

Θέμα 21. Η αλληλεπίδραση ενός ηλεκτρονίου με ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο

περιγράφεται από την χαμιλτονιανή
$$H = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(α) Υπολογίστε τις ενεργειακές στάθμες του ηλεκτρονίου. (β) Την χρονική στιγμή $t=0$ το σύστημα μετρήθηκε και το σπιν του βρέθηκε στην κατεύθυνση $-z$. Γράψτε την κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου. (γ) Βρείτε την κατάσταση του συστήματος για $t>0$ και υπολογίστε την πιθανότητα να μετρήσουμε το σπιν στην κατεύθυνση z .

Θέμα 22. Κβαντομηχανικό σύστημα περιγράφεται από την χαμιλτονιανή

$$H = H_0 + V.$$

Υποθέτουμε ότι λύνουμε για την χαμιλτονιανή H_0 και ξέρουμε τις ιδιοσυναρτήσεις της $\Psi^{(0)}_n$ και τις ιδιοενέργειες $E^{(0)}_n$, $H_0 \Psi^{(0)}_n = E^{(0)}_n \Psi^{(0)}_n$.

Εάν θεωρήσουμε τον όρο V σαν διαταραχή βρείτε την διόρθωση στην ενέργεια σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών. Προσοχή, κάντε όλους τους απαιτούμενους ενδιάμεσους υπολογισμούς. Υποθέστε ότι το δεν έχουμε εκφυλισμό.

Θέμα 23. Θεωρήστε δύο ορθοκανονικά διανύσματα ψ_1 και ψ_2 και υποθέστε ότι αποτελούν βάση σε ένα χώρο δύο διαστάσεων. Θεωρήστε επίσης ένα τελεστή A που ορίζεται στο χώρο αυτό και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$A\psi_1 = 2\psi_1 + \psi_2, \quad A\psi_2 = \psi_1 + 2\psi_2$$

Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή A .

Θέμα 24: Σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $F=-kx$, $k>0$ και η κατάσταση του σε μια ορισμένη στιγμή περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = Nxe^{-\lambda x^2/2}$$

- (α) Έχει το σωματίδιο απόλυτα καθορισμένη ενέργεια; Υπάρχει κατάλληλη τιμή του λ για την οποία η απάντηση είναι καταφατική;
 (β) Για οιοδήποτε λ υπολογίστε την μέση τιμή της ενέργειας του σωματιδίου και σχεδιάστε πρόχειρα την εξάρτησή της από το λ . Τι παρατηρείτε, ποία η σχέση με το ερώτημα (α);

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{(2n)!}{n!(4\alpha)^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Θέμα 25: Σωματίο μάζας m κινείται σε τρισδιάστατο πηγάδι δυναμικού που δίνεται από την σχέση

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ V_0 & r > a \end{cases}$$

όπου V_0 θετική σταθερά.

Προσδιορίστε το V_0 ώστε το σύστημα να έχει για $l=0$ μόνο δύο δέσμιες καταστάσεις.

Θέμα 26: Ένα μονοδιάστατο πρόβλημα χαρακτηρίζεται από δέσμιες καταστάσεις με ενέργειες E_n και ορθοκανονικό σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $\psi_n(x)$ με n ακέραιο και ομοτιμία (parity) $(-1)^n$. Δίνεται η κυματοσυνάρτηση του συστήματος $\Psi(x,t)$ για $t=0$

$$\Psi(x,t=0) = \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{-i}{\sqrt{3}}\psi_3(x) + C\psi_5(x)$$

- (α) Υπολογίστε τον συντελεστή C έτσι ώστε αυτή να είναι κανονικοποιημένη στην μονάδα και γράψτε την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)$ σε χρόνο t .
 (β) Βρείτε την πιθανότητα μια μέτρηση της ενέργειας στο χρόνο t να σας δώσει την τιμή E_5 .
 (γ) Οι μέσες τιμές θέσης, ορμής και ενέργειας, $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ και $\langle H \rangle$ μεταβάλλονται με τον χρόνο; Εξηγήστε.

Θέμα 27: Το ηλεκτρόνιο σε άτομο υδρογόνου είναι στην κατάσταση

$$\psi(t=0) = R_{21} \left(\sqrt{2/3} Y_1^0 \chi_+ + \sqrt{1/3} Y_1^1 \chi_- \right)$$

όπου χ_{\pm} είναι οι καταστάσεις σπίν.

- (α) Εάν μετρήσετε τα L^2 , L_z , S^2 και S_z ποιες είναι οι πιθανές τιμές και με τι πιθανότητα έκαστη;
 (β) Έστω $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$ η ολική στροφορμή. Υπολογίστε τα $\langle \mathbf{J}^2 \rangle$ και $\langle J_z \rangle$.

Θέμα 28: Υπολογίστε την σχετικιστική διόρθωση πρώτης τάξης για την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του ατόμου του Υδρογόνου. Η διόρθωση δίνεται κλασικά από την σχέση

$$\Delta E = \sqrt{c^4 m^2 + c^2 p^2} - mc^2 - \frac{p^2}{2m}$$

Θεωρώντας ότι η ορμή είναι πολύ μικρότερη της «μάζας», σύμφωνα με τη σχέση $p \ll mc$, αναπτύσσοντας κατά Taylor και κρατώντας τον πρώτο όρο.

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\varepsilon^2 + \dots$$

$$\alpha = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}, \quad E_1 = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}, \quad \psi_{100} = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}$$

Θέμα 29: Δέσμιο ηλεκτρόνιο του ατόμου του υδρογόνου βρίσκεται υπό την επίρεια του ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$ (αγνοείστε το σπίν του ηλεκτρονίου). Η χαμιλτονιανή του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$H = H_0 - \omega L_z$$

Όπου $\omega = eB/2m_e c$.

Οι ιδιοκαταστάσεις ψ_{nlm} και οι ιδιοτιμές της ενέργειας $E_{nlm}^{(0)}$ της χαμιλτονιανής H_0 , θεωρούνται γνωστές. Υποθέτουμε ότι το σύστημα βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{21-1} + \psi_{211})$$

Ποια είναι η πιθανότητα ως συνάρτηση του χρόνου να βρεθεί το σύστημα στις παρακάτω καταστάσεις

$$(a) |2p_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{21-1} - \psi_{211}) \quad (b) |2p_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{21-1} + \psi_{211})$$

$$(c) |2p_z\rangle = \psi_{210}$$

Θέμα 30: Ηλεκτρόνιο, ακίνητο, ευρίσκεται σε εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο που δίνεται από την σχέση $\vec{B}(t) = B_0 \sin(\omega t) \hat{z}$. Για $t=0$ το ηλεκτρόνιο ευρίσκεται στην ιδιοκατάσταση του τελεστή S_n με ιδιοτιμή $+\hbar/2$, όπου

$S_n = \vec{S} \cdot \vec{n}$, $\vec{n} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. (α) Υπολογίστε σαν συνάρτηση του χρόνου την πιθανότητα μέτρησης της τιμής $-\hbar/2$ για το *spin* στη κατεύθυνση x . (β) Ποία είναι η πιθανότητα μέτρησης της τιμής $\hbar/2$ για το *spin* στην κατεύθυνση z ;

Θέμα 31: Το ηλεκτρόνιο σε ένα άτομο υδρογόνου την χρονική στιγμή $t=0$ είναι στην κατάσταση $\Psi(\vec{r}, t=0) = N\Psi_{211}\chi_+$

όπου χ_{\pm} είναι οι καταστάσεις σπίν και ψ_{nlm} οι ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του υδρογόνου με συγκεκριμένη ενέργεια. Το ηλεκτρόνιο βρίσκεται υπό την επίρεια ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = B_0\hat{z}$ για $t>0$, $H=H_0+H_B$.

(α) Βρείτε την κατάσταση του συστήματος για $t>0$.

(β) Εάν μετρήσουμε το σπιν του ηλεκτρονίου στον άξονα z τι τιμές θα πάρουμε και με τι πιθανότητα;

(γ) Έστω $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$ η ολική στροφορμή. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής για αυτό το σύστημα?

(γ) Υπολογίστε τα $J_z\Psi$ και $\mathbf{J}^2\Psi$. Σε ποια τιμή της ολικής στροφορμής αντιστοιχεί η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου;

$$s_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, s_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mu}_s = -g \frac{e}{2m} \vec{S}$$

$$c_+(j, m) = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}, \quad c_-(j, m) = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}, \quad J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$$

Θέμα 32: Σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση δυναμικού

$V(x, y) = V_1(x) + V_2(y)$ στις δύο διαστάσεις. Όπου:

$$V_1(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < a \\ V_0, & x > a \end{cases} \quad \text{και} \quad V_2(y) = \begin{cases} \infty, & y < 0 \\ 0, & 0 \leq y < b \\ \infty, & y > b \end{cases}$$

Βρείτε τις δέσμιες ιδιοκαταστάσεις του συστήματος όταν $\frac{\pi}{2} \leq \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}} < \frac{3\pi}{2}$.

Θέμα 33: Ένας διδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής περιγράφεται από την

$$\text{Χαμιλτονιανή: } H_0 = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2).$$

(α) Να δοθεί μία γενική έκφραση για τις ενεργειακές στάθμες της H_0 , και να βρείτε τον εκφυλισμό τους.

(β) Να εκφράσετε την κυματοσυνάρτηση του συστήματος για την θεμελιώδη στάθμη και την πρώτη διεγερμένη σαν συνάρτηση των κυματοσυναρτήσεων ψ_k του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή.

(γ) Εάν το σύστημα περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση:

$$\psi = Nxe^{-br^2} e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

όπου N θετική σταθερά. Να προσδιοριστούν οι σταθερές E και b .

(δ) Εάν το σύστημα έχει ενέργεια $E = 2\hbar\omega$ και προστεθεί μία ασθενής διαταραχή της μορφής $V(x) = ax^4$, $a > 0$, ο εκφυλισμός αίρεται. Να βρείτε τις νέες ενεργειακές στάθμες του συστήματος.

Υπόδειξη, να τις εκφράσετε σαν συνάρτηση των ποσοτήτων:

$$V_0 = \int dq \psi_0^*(q) q^4 \psi_0(q) \quad \text{και} \quad V_1 = \int dq \psi_1^*(q) q^4 \psi_1(q)$$

χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

Θέμα 34. Σωματίδιο μάζας m κινείται ελεύθερα στο χώρο ανάμεσα σε δύο αδιαπέραστες σφαιρικές επιφάνειες με ακτίνες $r=a$ και $r=b$, $a < b$.

α) Γράψτε την Χαμιλτονιανή του σωματιδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες και ξεχωρίστε τον όρο της στροφορμής.

β) Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του σωματιδίου για στροφορμή l ίση με το μηδέν.

Θέμα 35: Δύο σωματίδια με spin $S_1=3/2$ και $S_2=1$ αλληλεπιδρούν τοπικά και η Χαμιλτονιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση είναι: $H=gS_1S_2$, όπου g μια σταθερά με τις κατάλληλες μονάδες.

- α) Υπολογίστε τις δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής S των δύο σωματιδίων και τον εκφυλισμό σε κάθε περίπτωση.
β) Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές του συστήματος.

Θέμα 36: Για την πυκνότητα πιθανότητας P και το ρεύμα πιθανότητας J ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}$$

Αποδείξτε αυτή τη σχέση στην Κβαντομηχανική ορίζοντας το κατάλληλο J δεδομένου ότι $P = \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$.

Θέμα 37: Σωματίδιο μάζας m κινείται σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού μεταξύ των θέσεων $-a$ και a .

- α) Βρείτε την ενέργεια και την κυματοσυνάρτηση για την θεμελιώδη και για την πρώτη διεγερμένη στάθμη.
β) Μία μικρή διαταραχή $V(x) = \varepsilon|x|/a$ προστίθεται στο σύστημα. Χρησιμοποιήστε θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης για να υπολογίσετε την μεταβολή στην ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης.
γ) Υπολογίστε την πιθανότητα μετάβασης από τη θεμελιώδη στάθμη στην πρώτη διεγερμένη στάθμη (του αδιατάραχτου προβλήματος) εάν η διαταραχή $V(x) = \varepsilon|x|/a$ διαρκεί χρόνο T .

Θέμα 38: Σωματίο με μάζα m κινείται σε μια διάσταση υπό την επίδραση του δυναμικού $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ και βρίσκεται στην θεμελιώδη κατάσταση.

- (α) Αν $\Psi(x, t) = N e^{-bx^2} e^{-iat/\hbar}$ είναι κανονικοποιημένη λύση της χρόνο-εξαρτώμενης εξίσωσης Schrödinger για την θεμελιώδη στάθμη να υπολογίσετε τις σταθερές b, a .
(β) Σε δεδομένη χρονική στιγμή επέρχεται απότομη σύλληψη ενός άλλου σωματίου με αποτέλεσμα το νέο σύνθετο σωματίο να έχει μάζα $m' = 2m$. Ποιά είναι η πιθανότητα το νέο σύνθετο σωματίο να παραμείνει στην θεμελιώδη κατάσταση;

Θέμα 39: Σωματίο μάζας m σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με πλάτος a ($-a/2 < x < a/2$) βρίσκεται στην κατάσταση $\psi_2(x)$ ($n=2$). Αίφνης το πλάτος του πηγαδιού διπλασιάζεται ($-a < x < a$).

- (α) Γράψτε τις καινούργιες ίδιο-συναρτήσεις και ίδιο-ενέργειες.
(β) Υπολογίστε την πιθανότητα σε μέτρηση της ενέργειας του σωματίου, αυτή να βρεθεί ίση με τιμή που είχε πριν τον διπλασιασμό του πλάτους του πηγαδιού.
(γ) Δώστε την έκφραση για την πυκνότητα πιθανότητας στο $x=0$ για $t > 0$.
Υπόδειξη: Κατά τον διπλασιασμό του πλάτους το σωματίο στιγμιαία παραμένει περιορισμένο στο διάστημα $-a/2 < x < a/2$, δηλαδή

$$\psi(x, t=0) = \begin{cases} \psi_2(x) & -a/2 < x < a/2 \\ 0 & -a < x < -a/2 \quad a/2 < x < a \end{cases}$$

Θέμα 40: Σωματίο μάζας m κινείται στο δυναμικό $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < -a \\ 0 & -a < x < -b \\ V_0 & -b < x < b \\ 0 & b < x < a \\ \infty & x > a \end{cases} \quad \text{όπου } a, b \text{ θετικές σταθερές, } V_0 > 0.$$

Ζητείται να υπολογισθεί η ενέργεια E και το V_0 , έτσι ώστε η ιδιοσυνάρτηση $\psi(x)$ της Χαμιλτονιανής να ικανοποιεί την συνθήκη $\frac{d\psi}{dx} = 0$ για $-b < x < b$.

Θέμα 41: Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης για έναν τρισδιάστατο ταλαντωτή μάζας m με δυναμική ενέργεια: $V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \lambda r^4$.

Δίνονται: Η κυματοσυνάρτηση του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή στην θεμελιώδη στάθμη $\Psi_0(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-ax^2/2)$, $a = m\omega/\hbar$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp(-ax^2) dx = \frac{(2n)!}{n!(4a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Θέμα 42: (α) Γράψτε τις σχέσεις μετάθεσης για τους τελεστές της στροφορμής.

(β) Αν $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ να δείξετε ότι $[L^2, L_k] = 0$ και $[L^2, L_k^2] = 0$ όπου $k=x, y, z$.

(γ) Αν η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος είναι $H = g(L_x^2 + L_y^2)$ να βρείτε τις ιδιοτιμές της ενέργειας και τον εκφυλισμό κάθε στάθμης.

Θέμα 43: Η κυματοσυνάρτηση του *spin* ενός ηλεκτρονίου είναι $\psi = c\chi_- + 3c\chi_+$

όπου οι συναρτήσεις χ_+ και χ_- είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της z συνιστώσας του *spin* και c μία σταθερά κανονικοποίησης. Έστω ότι μετράμε το *spin* του σωματιδίου στην κατεύθυνση ενός άξονα n που αντιστοιχεί ο τελεστής

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}s_x + s_y), \quad \text{όπου } s_x \text{ και } s_y \text{ οι τελεστές του } \textit{spin} \text{ στις διευθύνσεις } x, y$$

αντίστοιχα.

(α) Τι τιμές θα βρούμε για το *spin* του σωματιδίου σε αυτή την κατεύθυνση;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα να βρούμε κάθε μία από τις τιμές αυτές;

(γ) Δώστε τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις.