ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ-ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σημειώσεις για το μάθημα

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΙΙ

Θεοδόσης Δημητράκος

E-mail: dimitheo@aegean.gr

Σάμος 2007

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι έννοιες του «τυχαίου» και του «πιθανού» είναι, σήμερα, λίγο-πολύ γνωστές και εξηγούνται με τη διαίσθηση και την κοινή λογική. Ο μεγάλος Γάλλος μαθηματικός Laplace έγραψε ότι οι Πιθανότητες δεν είναι τίποτε άλλο παρά «η μετατροπή της κοινής λογικής σε μαθηματικές εκφράσεις». Η Θεωρία Πιθανοτήτων είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που μελετά τα τυχαία (ή στοχαστικά) φαινόμενα, δηλαδή εκείνα τα φαινόμενα που εξελίσσονται σε συνθήκες αβεβαιότητας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τυχαίου φαινομένου είναι η ρίψη ενός νομίσματος. Αν ρίξουμε ένα νόμισμα 1000 φορές οι εμφανίσεις γραμμάτων και κεφαλής εναλλάσσονται με έναν ακανόνιστο και απρόβλεπτο τρόπο.

Οι Πιθανότητες χρησιμοποιούνται σε πολλές επιστήμες και σε πολλές δραστηριότητες της καθημερινής μας ζωής. Αποτελέσματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων χρησιμοποιούνται στη Στατιστική, στην Επιχειρησιακή Έρευνα, στην Αναλογιστική Επιστήμη, στην Οικονομετρία, στη Φυσική, στη Βιολογία, στην Ιατρική και αλλού. Τα στοιχήματα στηρίζονται στη λογική των Πιθανοτήτων. Το ίδιο συμβαίνει και με τους μηχανισμούς που προσπαθούν να αξιολογήσουν την ικανότητα των μαθητών μέσω tests.

Ιστορικά, η αυστηρή εφαρμογή της Θεωρίας των Πιθανοτήτων έγινε αρχικά σε παιχνίδια τύχης. Οι Αιγύπτιοι από το 3000 π.Χ. χρησιμοποιούσαν τον «αστράγαλο», ένα κόκκαλο ζώου με τέσσερις πλευρές, για να παίζουν παιχνίδια τύχης. Ο «αστράγαλος» αποτέλεσε τον πρόγονο του γνωστού ζαριού το οποίο εμφανίστηκε για πρώτη φορά γύρω στα 1600 π.Χ. Στην Κίνα μεταξύ του 7^{ου} και του 10^{ου} αιώνα μ.Χ. εμφανίστηκαν τυχερά παιχνίδια που βασίζονταν σε κάρτες (τραπουλόχαρτα). Μέσα από τα τυχερά παιχνίδια άρχισε να αναπτύσσεται η ιδέα της συχνότητας εμφάνισης ορισμένων αποτελεσμάτων και επομένως της πιθανότητας. Η ουσιαστική ανάπτυξη της Θεωρίας Πιθανοτήτων ξεκίνησε από τις επιστολές των Pascal (1623-1662) και Fermat (1601-1665) γύρω στα 1650 μ.Χ. οι οποίες περιείχαν τον υπολογισμό πιθανοτήτων σε αρκετά παραδείγματα από τυχερά παιγνίδια. Ένα από τα προβλήματα που απασχόλησαν τους Pascal και Fermat ήταν το περίφημο πρόβλημα του Chevalier de Mere. Ένα ζάρι ρίχνεται τέσσερις φορές και δύο ζάρια ρίχνονται είκοσι τέσσερις φορές. Το ερώτημα είναι αν η πιθανότητα εμφάνισης ενός άσσου τουλάχιστον μία φορά στις τέσσερις ρίψεις του ενός ζαριού ισούται με την πιθανότητα εμφάνισης ενός ζεύγους άσσων τουλάχιστον μία φορά στις είκοσι τέσσερις ρίψεις των δύο ζαριών. Η απάντηση στο ερώτημα είναι αρνητική. Το πρώτο βιβλίο Πιθανοτήτων με τίτλο On calculations in Games of Chance γράφτηκε από τον Γερμανό Christian Huyghens (1629-1695). Εξέχουσα θέση στη ραγδαία ανάπτυξη και στην εξέλιξη της Θεωρίας Πιθανοτήτων στη πορεία του χρόνου κατέχουν πολλοί διάσημοι Μαθηματικοί αλλά και άλλοι επιστήμονες όπως, μεταξύ άλλων, οι James Bernoulli (1654-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), Pierre Simon Laplace (1749-1827), Simeon Denis Poisson (1781-1840) και Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Μεταγενέστεροι είναι οι Pafnuty Chebyshev (1821-1894), Andrei Markov (1856-1922), Richard Von Mises (1883-1953) και Andrei Kolmogorov (1903-1987).

Στις σημειώσεις αυτές θα αναλύσουμε τις σημαντικότερες έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Στα δύο πρώτα κεφάλαια υπενθυμίζουμε τις βασικές έννοιες του εισαγωγικού μαθήματος της Θεωρίας Πιθανοτήτων Ι. Στο Κεφάλαιο 3 μελετούμε τις πιθανογεννήτριες, τις ροπογεννήτριες και τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε τη θεωρία των διανυσματικών τυχαίων μεταβλητών. Στο Κεφάλαιο 5 αναπτύσσουμε τη θεωρία των δεσμευμένων κατανομών. Ο Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 6. Η εισαγωγή κάθε καινούργιας έννοιας διανθίζεται με κατάλληλα σχετικά παραδείγματα.

Ως βιβλία για παραπάνω μελέτη προτείνουμε, μεταξύ άλλων, τα βιβλία των:

(α) Γ. Ρούσσα, Θεωρία Πιθανοτήτων, Μετάφραση: Δημήτριος Ιωαννίδης, Εκδόσεις Ζήτη, 1994.

(β) S. M. Ross, A First Course in Probability, Second Edition, Macmillan Publishing Company, 1984.

(γ) P. Hoel, S. Port, C. Stone, Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων, Μετάφραση: Απόστολος Γιαννόπουλος, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2002.

(δ) Μ. Κούτρα, Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές, Δεύτερη Έκδοση, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλη, Μέρος Ι, 2004, Μέρος ΙΙ, 2005.

(ε) G. Roussas, A Course in Mathematical Statistics, Second Edition, Academic Press, 1997.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

1.1 Πείραμα τύχης, δειγματικός χώρος, στοιχεία θεωρίας συνόλων

Έστω ένα πείραμα το αποτέλεσμα του οποίου επηρεάζεται από την τύχη. Ένα τέτοιο πείραμα καλείται **πείραμα τύχης** (random experiment). Το χαρακτηριστικό ενός πειράματος τύχης είναι ότι, σε μία εκτέλεσή του, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα που θα εμφανιστεί. Απλά παραδείγματα πειραμάτων τύχης είναι η ρίψη ενός νομίσματος, το πέταγμα ενός ζαριού, το τράβηγμα ενός παιγνιόχαρτου από τα πενήντα δύο παιγνιόχαρτα μιας τράπουλας και η καταγραφή των τηλεφωνημάτων που εξυπηρετούνται από ένα τηλεφωνικό κέντρο εντός δοθέντος χρονικού διαστήματος.

Ένα σύνολο (set) είναι μία καλώς ορισμένη συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων που μπορούν να εμφανιστούν σε μία εκτέλεση ενός πειράματος τύχης καλείται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συνήθως συμβολίζεται με Ω. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και στη ρίψη ενός νομίσματος ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{\mathrm{K}, \Gamma\}$ όπου με Κ συμβολίζουμε την ένδειξη «κεφαλή» και με Γ συμβολίζουμε την ένδειξη «γράμματα».

Τα αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος μπορούν να περιγραφούν με πολλούς και διάφορους τρόπους. Έτσι σε ένα πείραμα τύχης αντιστοιχούν περισσότεροι του ενός δειγματικοί χώροι. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε μία έκθεση κινητών τηλεφώνων στην οποία εργάζονται δύο πωλητές Α και Β. Έστω ότι στην έκθεση υπάρχουν προς πώληση δύο μόνο κινητά τηλέφωνα. Αν μας ενδιαφέρει ο αριθμός των κινητών τηλεφώνων που θα πουληθούν από καθένα από τους δύο πωλητές σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (π.χ. μέσα στην επόμενη εβδομάδα) τότε ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος είναι ο $\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(0,2)\}$. Το ζεύγος $(x, y) \in \Omega$ δηλώνει ότι ο πωλητής Α θα πουλήσει x κινητά τηλέφωνα, ενώ ο πωλητής Β θα πουλήσει y κινητά τηλέφωνα. Αν όμως μας ενδιαφέρει μόνο ο συνολικός αριθμός κινητών τηλεφώνων που θα πουληθούν στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, τότε θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως δειγματικός χώρος το σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Το στοιχείο $\omega \in \Omega$ δηλώνει το συνολικό αριθμό κινητών τηλεφώνων που πουλήθηκαν. Τα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου Ω καλούνται **δειγματικά σημεία** (sample points).

Το γεγονός ότι το στοιχείο ω ανήκει στο σύνολο Ω συμβολίζεται με $\omega \in \Omega$. Η άρνηση αυτού του γεγονότος συμβολίζεται με $\omega \notin \Omega$. Λέμε ότι ένα σύνολο S' είναι **υποσύνολο** (subset) ενός συνόλου S και γράφουμε $S' \subseteq S$ αν για κάθε $s \in S'$ ισχύει ότι $s \in S$. Λέμε ότι ένα σύνολο S' είναι **γνήσιο υποσύνολο** ενός συνόλου S και γράφουμε $S' \subset S$ αν $S' \subseteq S$ και αν υπάρχει στοιχείο $s \in S$ τέτοιο ώστε $s \notin S'$.

Θεωρούμε το σύνολο Ω ως βασικό σύνολο (ή σύνολο αναφοράς). Το σύνολο αυτό θα είναι διαφορετικό ανάλογα με το πρόβλημα που θα μας απασχολεί. Όλα τα υπόλοιπα σύνολα θα είναι υποσύνολα του Ω.

Έστω $A, B, C \subseteq \Omega$. Το **συμπλήρωμα** (complement) του συνόλου A (αναφορικά με το Ω) συμβολίζεται με A^c και είναι $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$. Έστω I ένα οποιοδήποτε σύνολο δεικτών και τα σύνολα $A_j \subseteq \Omega, j \in I$. Η **ένωση** (union) των συνόλων $A_j, j \in I$ συμβολίζεται με $\bigcup_{j \in I} A_j$ και είναι $\bigcup_{j \in I} A_j = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j$ για ένα τουλάχιστον $j \in I\}$. Η **τομή** (intersection) των συνόλων $A_j, j \in I$ συμβολίζεται με $\bigcap_{j \in I} A_j$ και είναι $\bigcap_{j \in I} A_j = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j$ για όλα τα $j \in I\}$. Η **διαφορά** (difference) των συνόλων A, B συμβολίζεται με $A - B$ και είναι $A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ και $\omega \notin B\} = A \cap B^c$.

Ισχύει ότι: $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$ *(Αντιμεταθετικός νόμος).*
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ και $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(Προσεταιριστικός νόμος).*
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ και $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(Επιμεριστικοί νόμοι).*
$\left(\bigcup_{j \in I} A_j\right)^c = \bigcap_{j \in I} A_j^c$ και $\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right)^c = \bigcup_{j \in I} A_j^c$ *(Νόμοι De Morgan).*

Έστω $\Im$ μία οικογένεια υποσυνόλων του δειγματικού χώρου Ω. Τα στοιχεία (σύνολα) του $\Im$ καλούνται **ενδεχόμενα** (ή **γεγονότα**) (events) και το $\Im$ καλείται **$\sigma-$πεδίο (ή $\sigma-$άλγεβρα ή $\sigma-$σώμα) ενδεχομένων** (ή **γεγονότων**) ($\sigma-$field) αν ισχύει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 1.1 (σ-πεδίο). Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Το σύνολο $\Im$ καλείται **σ-πεδίο ενδεχομένων (ή γεγονότων)** αν (i) $\Omega \in \Im$ (ii) αν $A \in \Im$ τότε $A^c \in \Im$ και (iii) αν $A_j \in \Im,\ j \in I$ τότε $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Im$ (δηλαδή η οικογένεια $\Im$ των υποσυνόλων του Ω είναι κλειστή για την πράξη της ένωσης αριθμήσιμου πλήθους συνόλων).

Παράδειγμα 1.1 Θεωρούμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός ζαριού. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Ως σύνολο $\Im$ μπορούμε να θεωρήσουμε είτε το **δυναμοσύνολο** (power set) του Ω, δηλαδή το σύνολο $\Im = \{$ όλα τα υποσύνολα του $\Omega\}$ είτε το σύνολο $\Im = \{\Omega, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{3,4,5,6\}, \varnothing\}$.
Παρατηρούμε ότι και τα δύο σύνολα ικανοποιούν τον Ορισμό 1.1, επομένως είναι $\sigma-$πεδία.

Αν για ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω και $\sigma-$πεδίο ενδεχομένων $\Im$ ισχύει ότι το δειγματικό σημείο ω είναι τέτοιο ώστε $\omega \in A \in \Im$ τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο A **συνέβη** (occurs). Δηλαδή, λέμε ότι το ενδεχόμενο A **συνέβη** αν το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης ανήκει στην οικογένεια υποσυνόλων $\Im.$ Στο παράδειγμα της ρίψης ενός ζαριού θεωρούμε ως $\sigma-$πεδίο ενδεχομένων το δυναμοσύνολο του $\Omega.$ Τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο $A = \{\text{ άρτιο αποτέλεσμα}\} = \{2, 4, 6\}$ συνέβη αν εμφανιστεί το αποτέλεσμα (outcome) 2 ή το αποτέλεσμα 4 ή το αποτέλεσμα 6, διότι τότε, για παράδειγμα, το δειγματικό σημείο 2 είναι τέτοιο ώστε $2 \in A \in \Im.$ Το ίδιο συμβαίνει για τα δειγματικά σημεία 4 και 6.

Τα ενδεχόμενα της μορφής $\{\omega\}$ καλούνται **απλά ενδεχόμενα** ενώ εκείνα που περιέχουν τουλάχιστον δύο δειγματικά σημεία καλούνται **σύνθετα ενδεχόμενα**. Τα ενδεχόμενα Ω και $\varnothing$ καλούνται το **βέβαιο** και το **αδύνατο ενδεχόμενο** (null event), αντίστοιχα, για προφανείς λόγους.

Έστω τα ενδεχόμενα $A, B, C \subseteq \Omega.$ Παρακάτω θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο κάποιες καθημερινές εκφράσεις μπορούν να γραφούν ως σχέσεις συνόλων.

(α) Μόνο το ενδεχόμενο A συμβαίνει, $A \cap B^c \cap C^c.$

(β) Τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα A, B, C συμβαίνει, $A \cup B \cup C.$

(γ) Τουλάχιστον δύο ενδεχόμενα συμβαίνουν, $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$

(δ) Και τα τρία ενδεχόμενα συμβαίνουν, $A \cap B \cap C.$

(ε) Το πολύ ένα ενδεχόμενο συμβαίνει, $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c).$

1.2 Ο κλασσικός, ο στατιστικός και ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

Έστω ένα πείραμα τύχης με πεπερασμένο δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ και έστω ότι όλα τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_i\}, i = 1, \ldots, n$ έχουν την ίδια «δυνατότητα» (πιθανότητα) να συμβούν η οποία είναι ίση με $D.$

Ως $\sigma-$πεδίο ενδεχομένων $\Im$ θεωρούμε το δυναμοσύνολο του $\Omega.$

Ισχύει ότι $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}.$ Άρα, $P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = nD \Rightarrow D = \frac{1}{n}.$

Έστω ένα ενδεχόμενο B με πλήθος στοιχείων $s,$ δηλαδή $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_s\}.$

Τότε $P(B) = \sum_{i=1}^{s} P(\{b_i\})$ με $P(\{b_i\}) = D = \frac{1}{n},$

όπου n είναι το πλήθος στοιχείων του $\Omega.$ Άρα, $P(B) = sD = s\frac{1}{n} = \frac{s}{n}.$

Δίνουμε τον ακόλουθο κλασσικό ορισμό της πιθανότητας.

Ορισμός 1.2 (Κλασσικός ορισμός της πιθανότητας). Έστω ένα πείραμα τύχης με πεπερασμένο δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ και έστω ότι όλα τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_i\}, i = 1, \ldots, n$ έχουν την ίδια ακριβώς «δυνατότητα» να συμβούν. Η πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως εξής: $P(A) = \dfrac{\# A}{\# \Omega}$, όπου με $\# A$ και $\# \Omega$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων των συνόλων A και Ω, αντίστοιχα.

Έστω ότι έχουμε μία κάλπη με n σφαιρίδια. Η λήψη k σφαιριδίων από τον πληθυσμό των n σφαιριδίων καλείται **δειγματοληψία** (sampling). Όταν τα k σφαιρίδια λαμβάνονται διαδοχικά χωρίς να τοποθετούνται πάλι στην κάλπη λέμε ότι η δειγματοληψία γίνεται **χωρίς επανατοποθέτηση**. Όταν η λήψη ενός σφαιριδίου γίνεται αφού προηγουμένως τοποθετούνται πάλι στην κάλπη όλα τα σφαιρίδια που ήδη λήφθηκαν λέμε ότι η δειγματοληψία γίνεται **με επανατοποθέτηση**. Τα δείγματα που λαμβάνονται μπορεί να είναι διατεταγμένα όταν σημειώνεται η σειρά με την οποία λαμβάνονται τα k σφαιρίδια ή μη-διατεταγμένα όταν η σειρά αυτή δεν σημειώνεται.

Ο αριθμός των μη-διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους k σε δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση από μία κάλπη με n σφαιρίδια συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$ και είναι $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Παράδειγμα 1.2 Ένα δοχείο περιέχει έξι λευκούς και πέντε μαύρους βόλους. Εάν τραβήξουμε τυχαία δύο βόλους από το δοχείο ποια είναι η πιθανότητα (α) να είναι και οι δύο λευκοί; (β) να είναι ο ένας λευκός και ο άλλος μαύρος;

Λύση. Χρησιμοποιούμε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας.

(α) Έστω P_1 η ζητούμενη πιθανότητα. Δύο βόλοι, από τους έντεκα που υπάρχουν στο δοχείο, μπορούν να επιλεγούν με $\binom{11}{2}$ τρόπους. Δύο λευκοί βόλοι, από τους έξι που υπάρχουν στο δοχείο, μπορούν να επιλεγούν με $\binom{6}{2}$ τρόπους. Άρα, $P_1 = \dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}$.

(β) Από τη Βασική Αρχή Απαρίθμησης, αν P_2 είναι η ζητούμενη πιθανότητα, με παρόμοιους συλλογισμούς, έχουμε $P_2 = \dfrac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}}$.

Η πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου A μπορεί να οριστεί εναλλακτικά ως η **οριακή σχετική συχνότητα** (limiting relative frequency) εμφάνισης του ενδεχομένου A. Έστω ότι σε n επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης εμφανίζονται n_A φορές αποτελέσματα που περιέχονται στο ενδεχόμενο A. Ο λόγος ${n_A}/{n}$ συνήθως συμβολίζεται με f_A και καλείται **σχετική συχνότητα** εμφάνισης του ενδεχομένου A στις n επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Η σχετική συχνότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα ποσοτικό μέτρο έκφρασης του βαθμού βεβαιότητας για την εμφάνιση του ενδεχομένου A. Όταν ένα πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται μεγάλο αριθμό φορών, η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου A σταθεροποιείται γύρω από κάποια τιμή που καλείται οριακή σχετική συχνότητα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα μέτρο του βαθμού βεβαιότητας για την εμφάνιση του ενδεχομένου. Ο ακόλουθος ορισμός της πιθανότητας αποδίδεται στον Von Mises και είναι γνωστός ως ο **στατιστικός ορισμός της πιθανότητας**.

Ορισμός 1.3 (Στατιστικός ορισμός της πιθανότητας). Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και A ένα ενδεχόμενο του Ω. Αν n_A είναι ο αριθμός εμφανίσεων του ενδεχομένου A σε n επαναλήψεις του πειράματος, $0 \le n_A \le n$, τότε ορίζουμε ως πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου A το όριο $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = \lim_{n\to\infty} f_A$.

Η έννοια του ορίου στον παραπάνω ορισμό δεν είναι αυστηρή αλλά αποδίδει συμβολικά το γεγονός της σταθεροποίησης της σχετικής συχνότητας όταν αυξάνεται σημαντικά ο αριθμός n των επαναλήψεων του πειράματος.

Όπως είναι φανερό η προσέγγιση του Von Mises για τον ορισμό της πιθανότητας δεν μπορούσε να αποτελέσει τη βάση για μία αυστηρή μαθηματική ανάπτυξη της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Δεν είναι δυνατή, σε αρκετές περιπτώσεις, ενδεχομένως λόγω κόστους ή και χρόνου, η επανάληψη ενός πειράματος πολλές φορές. Σε κάποιες περιπτώσεις ίσως να μην είναι δυνατόν να εντοπιστεί το όριο του λόγου $f_A = {n_A}/{n}$. Ο διαπρεπής Ρώσος Μαθηματικός Kolmogorov εξέλαβε τρεις ιδιότητες της πιθανότητας ως αξιώματα. Ολόκληρη η Θεωρία Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε αυστηρά με λογικούς μαθηματικούς συλλογισμούς οι οποίοι ξεκινούν από τα αξιώματα αυτά. Ο Kolmogorov αντιστοίχισε σε κάθε ενδεχόμενο A μία αριθμητική ποσότητα $P(A)$ η οποία καλείται **πιθανότητα του ενδεχομένου** A. Όρισε μία πραγματική συνολοσυνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\sigma-$πεδίο γεγονότων $\Im$ και πεδίο τιμών κάθε φορά ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\Re$. Ο ορισμός που ακολουθεί είναι ο καθιερωμένος ορισμός της πιθανότητας, οφείλεται στον Kolmogorov και καλείται **αξιωματικός ορισμός**.

Ορισμός 1.4 (Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας κατά Kolmogorov). Μία πιθανότητα P είναι μία συνολοσυνάρτηση $P:\Im \to \Re$ που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(P1) Είναι **μη-αρνητική**, δηλαδή $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο $A \in \Im$. *(Μη-αρνητικότητα της πιθανότητας).*

(P2) Ισχύει ότι $P(\Omega) = 1$. (*Η πιθανότητα να εμφανιστεί κάποιο στοιχείο του Ω είναι ίση με τη μονάδα).*

(P3) Είναι $\sigma -$**προσθετική**, δηλαδή για οποιαδήποτε ανά δύο ξένα μεταξύ τους (ασυμβίβαστα) ενδεχόμενα (mutually exclusive events) $A_j,\ j \in I$ (δηλαδή τέτοια ώστε για κάθε $i, j \in I$, με $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$) ισχύει ότι $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$. *(Αξίωμα της $\sigma -$προσθετικότητας).*

Σύμφωνα με τον Kolmogorov η πιθανότητα είναι μία πραγματική συνολοσυνάρτηση με πεδίο ορισμού μία οικογένεια συνόλων (το σύνολο όλων των ενδεχομένων του πειράματος) και πεδίο τιμών ένα οποιοδήποτε υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 1.5 (Πιθανοθεωρητικός χώρος). Έστω ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω, $\sigma -$πεδίο γεγονότων $\Im$ και έστω P μία πιθανότητα επί του $\Im$. Η τριάδα $(\Omega, \Im,\ P)$ καλείται **πιθανοθεωρητικός χώρος** (probability space).

Μερικές συνέπειες του αξιωματικού ορισμού της πιθανότητας είναι:

(α) $P(\varnothing) = 0$, δηλαδή το αδύνατο γεγονός έχει πιθανότητα ίση με μηδέν.

(β) Το συμπλήρωμα A^c ενός ενδεχομένου A έχει πιθανότητα $P(A^c) = 1 - P(A)$.

(γ) Μία πιθανότητα P είναι μία μη-φθίνουσα συνάρτηση, δηλαδή αν $A_1 \subseteq A_2$ τότε $P(A_1) \leq P(A_2)$.

(δ) Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο A ισχύει ότι: $0 \leq P(A) \leq 1$.

(ε) Μία οποιαδήποτε πιθανότητα P είναι υποπροσθετική, δηλαδή ισχύει ότι $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$. Η τελευταία ανισότητα είναι γνωστή ως **ανισότητα του Boole** (Boole's inequality).

(στ) Έστω δύο ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$. Ισχύει ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *(Προσθετικός νόμος, Additive law).*

Για τρία ενδεχόμενα $A, B, C \subseteq \Omega$ ισχύει ότι

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) - P(A \cap B \cap C)$.

Παράδειγμα 1.3 Έστω ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω και $\sigma-$πεδίο ενδεχομένων $\Im$. Έστω δύο ενδεχόμενα A, B τέτοια ώστε $P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{3}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$. Βρείτε τις ακόλουθες πιθανότητες:

(α) Τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο συμβαίνει.

(β) Μόνο ένα ενδεχόμενο συμβαίνει.

(γ) Ούτε το ενδεχόμενο A ούτε το ενδεχόμενο B συμβαίνει.

(δ) Το πολύ ένα από τα δύο ενδεχόμενα συμβαίνει.

Λύση. (α) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

(β) $P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

(γ) $P[(A\cup B)^c]=1-P(A\cup B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

(δ) $P[(A\cap B)^c]=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

Παράδειγμα 1.4 Έστω δύο ενδεχόμενα A και B. Δείξτε ότι η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένα από τα δύο ενδεχόμενα είναι ίση με $P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$.

Λύση. Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$. Όμως,

$(A\cap B^c)\cap(A^c\cap B)=\varnothing\Rightarrow P(\ (A\cap B^c)\cap(A^c\cap B))=P(\varnothing)=0$. Άρα, ισχύει ότι

$P(\ (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B))=P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)$.

Όμως, $A=A\cap\Omega=A\cap(B\cup B^c)=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\Rightarrow P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)$

$\Rightarrow P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)$. Όμοια, $P(A^c\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$, αφού

$(A\cap B)\cap(A\cap B^c)=(A\cap B)\cap(A^c\cap B)=\varnothing$.

Επομένως, $P((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B))=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$.

Παράδειγμα 1.5 Σκοπεύουμε να μετρήσουμε τον αριθμό των φορών που θα βρέξει στο Καρλόβασι τον επόμενο Ιανουάριο και το συνολικό ποσό της βροχόπτωσης (σε χιλιοστά). (α) Να δοθεί κατάλληλος δειγματικός χώρος Ω για την περιγραφή των μετρήσεων. (β) Να περιγραφούν τα επόμενα ενδεχόμενα:

A_1 : Θα βρέξει 3 φορές και το συνολικό ποσό της βροχόπτωσης θα είναι τουλάχιστον 5 χιλιοστά.

A_2 : Θα βρέξει το πολύ 10 φορές.

A_3 : Θα βρέξει 6 έως 8 φορές και το συνολικό ποσό της βροχόπτωσης θα είναι 15 έως 20 χιλιοστά.

A_4 : Θα βρέξει τουλάχιστον 7 φορές και το συνολικό ποσό της βροχόπτωσης θα είναι 10 έως 25 χιλιοστά.

A_5 : Το συνολικό ποσό της βροχόπτωσης θα είναι το πολύ 18 χιλιοστά.

(γ) Να περιγραφούν τα επόμενα ενδεχόμενα $A_1 \cap A_5$, $A_2 \cap A_5$, $A_3 - A_4$, $(A_5 - A_2) \cap A_4$, $(A_3 \cap A_5) - A_4$.

Λύση. (α) Ας συμβολίσουμε με k τον αριθμό των φορών που θα βρέξει και με x το συνολικό ποσό της βροχόπτωσης (σε χιλιοστά). Τότε $\Omega = \{(k, x) : k = 0, 1, 2, \ldots, x \in [0, \infty)\}$.

(β) Οι περιγραφές των ενδεχομένων $A_1, \ldots, A_5$ είναι:

$A_1 = \{(3, x) : x \in [5, \infty)\}$, $A_2 = \{(0,0)\} \cup \{(k, x) : 1 \le k \le 10,\ x \in (0, \infty)\}$, $A_3 = \{(k, x) : 6 \le k \le 8, x \in [15, 20]\}$,

$A_4 = \{(k, x) : k \ge 7, x \in [10, 25]\}$, $A_5 = \{(0,0)\} \cup \{(k, x) : k \ge 1, x \in (0, 18]\}$.

(γ) Από το (β) προκύπτει $A_1 \cap A_5 = \{(3, x) : x \in [5, 18]\}$, $A_2 \cap A_5 = \{(0,0)\} \cup \{(k, x) : 1 \le k \le 10, x \in (0,18]\}$,

$A_3 - A_4 = \{(6, x) : x \in [15, 20]\}$, $(A_5 - A_2) \cap A_4 = \{(k, x) : k \ge 11,\ x \in [10,18]\}$,

$(A_3 \cap A_5) - A_4 = \{(6, x) : x \in [15, 18]\}$.

Παράδειγμα 1.6 Από τον έλεγχο που έγινε σε μία ημέρα σε ένα μεγάλο αριθμό οδηγών βρέθηκε ότι το 70% των οδηγών δε φορούσε ζώνη ασφαλείας, το 40% των οδηγών δεν είχε πυροσβεστήρα στο αυτοκίνητο, ενώ στο 30% των οδηγών διαπιστώθηκαν και οι δύο παραβάσεις. Την επόμενη μέρα ελέγχεται ένας οδηγός και θεωρούμε τα ενδεχόμενα A: ο οδηγός δεν φοράει ζώνη ασφαλείας και B: ο οδηγός δεν έχει πυροσβεστήρα στο αυτοκίνητό του. Να υπολογιστεί η πιθανότητα των ενδεχομένων $A \cup B$, $A^c \cap B^c$, $A \cap B^c$, $A \cup B^c$, $A^c \cap B$.

Λύση. Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο, από το στατιστικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει προσεγγιστικά ότι στον πληθυσμό των οδηγών οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, B και $A \cap B$ είναι ίσες με $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.3$. Επομένως, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8$,

$P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 0.2$, $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4$,

$P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c) = 0.9$, $P(A^c \cap B) = P[(A \cup B^c)^c] = 1 - P(A \cup B^c) = 0.1$.

1.3 Δεσμευμένη πιθανότητα

Θεωρούμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός ζαριού. Ισχύει ότι $P(\{2\}) = \frac{1}{6}$. Αν είναι γνωστό ότι το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού θα είναι άρτιο, τότε $P(\{2\}) = \frac{1}{3}$. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.4 (Δεσμευμένη πιθανότητα). Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και A ένα ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $P(A)>0$. Για κάθε ενδεχόμενο B του Ω, η **δεσμευμένη πιθανότητα** (conditional probability) του B δοθέντος του A (given A) ορίζεται ως εξής: $P(B\mid A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}$.

Γνωρίζουμε λοιπόν ότι το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού θα είναι άρτιο και ζητάμε την πιθανότητα να εμφανιστεί το αποτέλεσμα 2. Θεωρούμε το ενδεχόμενο $A=\{2,4,6\}$ και το ενδεχόμενο $B=\{2\}$. Τότε

$$P(B\mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(\{2\})}{P(\{2,4,6\})}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}.$$

Παράδειγμα 1.7 Θεωρούμε τις οικογένειες με δύο παιδιά. Έστω ότι με A συμβολίζουμε το αγόρι και με K το κορίτσι. Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega=\{AA,AK,KA,KK\}$. Θεωρούμε ότι το «πρώτο» σύμβολο της δυάδας που αναπαριστά το δειγματικό σημείο του Ω δηλώνει το μεγαλύτερο σε ηλικία παιδί. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $B=\text{παιδιά ίδιου φύλου}=\{AA,KK\}$ και $C=\text{τουλάχιστον ένα αγόρι}=\{AA,AK,KA\}$. Ποια είναι η πιθανότητα τα παιδιά να είναι του ίδιου φύλου αν γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον ένα είναι αγόρι;

Λύση. Ζητάμε την πιθανότητα $P(B\mid C)$. Έχουμε $P(B\mid C)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(C)}=\dfrac{1/4}{3/4}=\dfrac{1}{3}$, ενώ $P(B)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Παράδειγμα 1.8 Έστω ότι ένα δοχείο περιέχει δεκαπέντε λευκούς, δέκα κίτρινους και πέντε μαύρους βώλους. Διαλέγουμε τυχαία ένα βώλο από το δοχείο. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι κίτρινος αν γνωρίζουμε ότι δεν είναι μαύρος;

Λύση. Έστω K και M τα ενδεχόμενα επιλογής κίτρινου και μαύρου βώλου, αντίστοιχα. Ζητάμε την πιθανότητα $P(K\mid M^c)$. Έχουμε $P(K\mid M^c)=\dfrac{P(K\cap M^c)}{P(M^c)}=\dfrac{P(K)}{P(M^c)}=\dfrac{10/30}{1-P(M)}=\dfrac{10/30}{1-5/30}=\dfrac{2}{5}$.

1.4 Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας και Θεώρημα Bayes

Σε ένα πείραμα τύχης έχουμε ορίσει τα ενδεχόμενα A και B και υπάρχει η δυνατότητα να υπολογίσουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(A\mid B)$ και $P(A\mid B^c)$. Χρησιμοποιώντας αυτά τα στοιχεία, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μη δεσμευμένη πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου A; Η απάντηση είναι καταφατική και δίνεται από το **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας** (Total Probability Theorem).

Θεώρημα 1.1 (Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας). Αν $A_1,\dots,A_n$ ξένα ανά δύο μεταξύ τους ενδεχόμενα, τότε για οποιοδήποτε ενδεχόμενο B ισχύει ότι $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)$. Τα ενδεχόμενα $A_i, i\in I$ αποτελούν μία **διαμέριση** (partition) του Ω, δηλαδή είναι τέτοια ώστε να ισχύει ότι $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$.

Απόδειξη. Είναι $B=B\cap\Omega=B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$. Άρα,

$$P(B)=P\left[\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)\right]=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i). \blacksquare$$

Παράδειγμα 1.9 Ένα αεροπλάνο έχει συντριβεί σε μία περιοχή που διαιρείται σε δάσος, θάλασσα και βουνό. Οι πιθανότητες το αεροπλάνο να έπεσε σε δάσος, θάλασσα και βουνό είναι αντίστοιχα $P(\Delta)=0.1, P(\Theta)=0.3$ και $P(B)=0.6$. Οι πιθανότητες ευρέσεως του αεροπλάνου είναι (α) αν έπεσε σε δάσος, $P(E\mid\Delta)=1/2$, (β) αν έπεσε σε θάλασσα, $P(E\mid\Theta)=1/5$, και (γ) αν έπεσε σε βουνό, $P(E\mid B)=3/4$. Να βρεθεί η πιθανότητα ευρέσεως του αεροπλάνου.

Λύση. Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega=\{\Delta,\Theta,B\}$, όπου Δ, Θ και B είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους ενδεχόμενα και είναι τέτοια ώστε $\Delta\cup\Theta\cup B=\Omega$. Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για να υπολογίσουμε την πιθανότητα ευρέσεως του αεροπλάνου $P(E)$.

Έχουμε $P(E)=P(E\mid\Delta)P(\Delta)+P(E\mid\Theta)P(\Theta)+P(E\mid B)P(B)=\frac{1}{2}\cdot 0.1+\frac{1}{5}0.3+\frac{3}{4}0.6=0.56.$

Ένα σύνηθες πρόβλημα της Θεωρίας Πιθανοτήτων είναι ο υπολογισμός των πιθανοτήτων $P(A_j\mid B)$ από τις μη δεσμευμένες πιθανότητες $P(A_j)$ και τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(B\mid A_j), j\in I$, όπου I είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο δεικτών. Η γενική έκφραση υπολογισμού είναι μία εφαρμογή του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας και αποδίδεται στον Bayes (Bayes Theorem).

Θεώρημα 1.2 (Θεώρημα του Bayes). Αν $A_1,\dots,A_n$ ξένα ανά δύο μεταξύ τους ενδεχόμενα τέτοια ώστε $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$ και B κάποιο ενδεχόμενο, τότε $P(A_j\mid B)=\dfrac{P(B\mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)}$, για κάθε $j\in\{1,2,\dots,n\}$.

Απόδειξη. Είναι $P(A_j \mid B)=\dfrac{P(A_j\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B\mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)}.$ ■

Παράδειγμα 1.10 Μία ασφαλιστική εταιρεία κατατάσσει τους οδηγούς σε τρεις κατηγορίες, τους ασφαλείς A, τους μέτριους M και τους κακούς K. Η πιθανότητα να είναι κάποιος οδηγός ασφαλής, μέτριος και κακός είναι αντίστοιχα $P(A)=0.2,\ P(M)=0.5$ και $P(K)=0.3$. Αν E είναι το ενδεχόμενο να έχει κάποιος οδηγός ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους τότε $P(E\mid A)=0.05, P(E\mid M)=0.15$ και $P(E\mid K)=0.3$. Να βρεθεί η πιθανότητα να είναι κάποιος ασφαλής οδηγός αν δεν έχει κανένα ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους.

Λύση. Ζητάμε την πιθανότητα $P(A\mid E^c)$. Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα του Bayes και διαδοχικά έχουμε

$$P(A\mid E^c)=\frac{P(A\cap E^c)}{P(E^c)}=\frac{P(E^c\mid A)P(A)}{P(E^c\mid A)P(A)+P(E^c\mid M)P(M)+P(E^c\mid K)P(K)}$$

$$=\frac{[1-P(E\mid A)]P(A)}{[1-P(E\mid A)]P(A)+[1-P(E\mid M)]P(M)+[1-P(E\mid K)]P(K)}$$

$$=\frac{(1-0.05)0.2}{(1-0.05)0.2+(1-0.15)0.5+(1-0.3)0.3}=0.23.$$

1.5 Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η γνώση ότι συνέβη ή δεν συνέβη ένα ενδεχόμενο B δε δίνει καμία πληροφορία για την εμφάνιση ή μη ενός ενδεχομένου A. Για να είναι δύο ενδεχόμενα A,B με $P(A)>0$, $P(B)>0$, ανεξάρτητα μεταξύ τους θα πρέπει

$$P(A\mid B)=P(A)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)\Rightarrow P(B\mid A)=P(B).$$

Λέμε ότι το ενδεχόμενο A είναι ανεξάρτητο από το ενδεχόμενο B και από την τελευταία ισότητα έπεται ότι και το ενδεχόμενο B είναι ανεξάρτητο από το ενδεχόμενο A. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.5 (Ανεξάρτητα ενδεχόμενα). Δύο ενδεχόμενα A,B είναι **στοχαστικά (ή στατιστικά) ανεξάρτητα** (stochastically or statistically independent) αν και μόνο αν $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. Στην αντίθετη περίπτωση αν δηλαδή ισχύει ότι $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$ τα ενδεχόμενα A,B καλούνται **εξαρτημένα** (dependent).

Παράδειγμα 1.11 Στο Παράδειγμα 1.7 ορίζουμε τα ενδεχόμενα A_1: παιδιά και των δύο φύλων και A_2: το μεγαλύτερο παιδί είναι αγόρι. Έχουμε $A_1 = \{AK, KA\}$ και $A_2 = \{AA, AK\}$. Για να είναι τα A_1, A_2 ανεξάρτητα ενδεχόμενα πρέπει $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$. Όμως, $P(A_1) = \frac{1}{2}$ και $P(A_2) = \frac{1}{2}$. Επιπλέον έχουμε $A_1 \cap A_2 = \{AK\}$ και $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2)$. Συνεπώς τα ενδεχόμενα A_1, A_2 είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 1.12 Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A: το άθροισμα των δύο ζαριών είναι επτά και B: το πρώτο ζάρι είναι άσσος. Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Είναι $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ και $B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$. Επίσης ισχύει ότι $P(A) = P(B) = 1/6$ και $P(A \cap B) = 1/36 = P(A)P(B)$, αφού $A \cap B = \{(1,6)\}$. Άρα τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 1.13 Από μία τράπουλα διαλέγουμε τυχαία ένα χαρτί. Έστω A και B τα ενδεχόμενα A: το χαρτί είναι άσσος και B: το χαρτί είναι καρρό. Είναι τα A, B ανεξάρτητα ενδεχόμενα;

Έχουμε $P(A) = 1/13$ και $P(B) = 1/4$. Η τομή των ενδεχομένων A, B είναι $A \cap B$: το χαρτί είναι άσσος-καρρό και $P(A \cap B) = 1/52 = P(A)P(B)$. Άρα τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 1.14 Αν A, B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα τότε και τα A, B^c είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Πρέπει να δείξουμε ότι $P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$.

Όμως, $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B^c)$.

1.6 Το Θεώρημα Συνέχειας

Μία πραγματική συνάρτηση $f : \Re \to \Re$, είναι συνεχής αν και μόνο αν για οποιαδήποτε συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{x_n\}_{n \geq 1}$, ισχύει $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$. Η συνάρτηση πιθανότητας P είναι μία συνεχής συνάρτηση. Πριν παρουσιάσουμε το Θεώρημα Συνέχειας χρειαζόμαστε την έννοια της **μονότονης** (monotone) **(αύξουσας ή φθίνουσας) ακολουθίας ενδεχομένων** (increasing or decreasing sequence of events).

Ορισμός 1.6 Μία ακολουθία ενδεχομένων $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ λέγεται **αύξουσα (φθίνουσα)** και γράφουμε $(A_n)_{n=1}^{\infty}\uparrow$ ($(A_n)_{n=1}^{\infty}\downarrow$) αν $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \ldots$ (αντίστοιχα, αν $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \ldots$). Γράφουμε $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}\uparrow$ και $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}\downarrow$.

Αν θεωρήσουμε ως δειγματικό χώρο το σύνολο $\Omega = \Re$ των πραγματικών αριθμών και ορίσουμε τις ακολουθίες ενδεχομένων $A_n = \left[2+\frac{1}{n}, 6-\frac{1}{n}\right]$ και $B_n = \left[4-\frac{1}{n}, 4+\frac{1}{n}\right]$, $n = 1, 2, \ldots$, είναι φανερό ότι η ακολουθία $\{A_n\}_{n\ge 1}$ είναι αύξουσα ενώ η ακολουθία $\{B_n\}_{n\ge 1}$ είναι φθίνουσα. Επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} A_n = [2, 6]$ και $\lim_{n\to\infty} B_n = \{4\}$.

Θεώρημα 1.3 (Θεώρημα Συνέχειας). Αν η ακολουθία ενδεχομένων $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι **μονότονη** (δηλαδή είτε αύξουσα, είτε φθίνουσα), τότε $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

1η περίπτωση. Έστω ότι η ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Θέτουμε $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - A_1$, $B_3 = A_3 - A_2, \ldots$, $B_n = A_n - A_{n-1}, \ldots$. Τα σύνολα $\{B_n\}_{n\ge 1}$ είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους. Τότε $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ και $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Άρα, $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)$

$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \Rightarrow P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

2η περίπτωση. Έστω ότι η ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα. Τότε η ακολουθία $(A_n^c)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Εφαρμόζοντας την πρώτη περίπτωση, έχουμε διαδοχικά

$P(\lim_{n\to\infty} A_n^c) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = \lim_{n\to\infty}(1 - P(A_n)) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ και

$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = P\left[\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right] = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$. Επομένως, $1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

Συνεπώς, $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$. ■

Παράδειγμα 1.15 Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν αρχικό πληθυσμό του οποίου τα άτομα είναι δυνατόν πριν πεθάνουν να γεννήσουν απογόνους σχηματίζοντας έτσι τις επόμενες γενιές. Αν η πιθανότητα να εξαφανιστεί ο πληθυσμός στην $n-$οστή γενιά λόγω θανάτου όλων των ατόμων του πληθυσμού πριν προλάβουν να παράγουν απογόνους είναι ίση με $\exp\left(-\dfrac{2n+1}{3n}\right)$, ποια είναι η πιθανότητα να ζήσει ο πληθυσμός για πάντα;

Λύση. Αν συμβολίσουμε με A_n, $n=1,2,\ldots$ τα ενδεχόμενα A_n : ο πληθυσμός εξαφανίζεται κατά την $n-$οστή γενιά είναι προφανές ότι η ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n\}_{n\geq 1}$ είναι αύξουσα, δηλαδή $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$. Το ενδεχόμενο εξαφάνισης του πληθυσμού σε κάποια γενιά περιγράφεται από την ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$ και έχει πιθανότητα εμφάνισης $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\lim_{n\to\infty} P(A_n)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\dfrac{2n+1}{3n}\right) = e^{-\frac{2}{3}}$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $1-P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1-e^{-\frac{2}{3}} \cong 1-0.51342 = 0.48658$.

1.7 Δύο δημοφιλή προβλήματα πιθανοτήτων

Πρόβλημα 1.1 (Το πρόβλημα του Chevalier de Mere). Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι τέσσερις ανεξάρτητες φορές. Έστω τα ενδεχόμενα E_i τέτοια ώστε $E_i = \{$ το $i-$οστό ζάρι είναι άσσος$\}$, $i=1,2,3,4$. Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια είκοσι τέσσερις ανεξάρτητες φορές. Έστω τα ενδεχόμενα A_i τέτοια ώστε $A_i = \{$η $i-$οστή ζαριά έφερε διπλό άσσο$\}$, $i=1,\ldots,24$. Να ελεγχθεί αν $p=q$, όπου $p = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right)$ και $q = P\left(\bigcup_{i=1}^{24} A_i\right)$.

Λύση. Έχουμε $p = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right) = 1-P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right)^c\right] = 1-P\left(\bigcap_{i=1}^{4} E_i^c\right) = 1-\prod_{i=1}^{4} P(E_i^c)$

$$= 1-\prod_{i=1}^{4}[1-P(E_i)] = 1-\prod_{i=1}^{4}(1-\frac{1}{6}) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.517747.$$

$$q = P\left(\bigcup_{i=1}^{24} A_i\right) = 1-P\left(\bigcup_{i=1}^{24} A_i\right)^c = 1-P\left(\bigcap_{i=1}^{24} A_i^c\right) = 1-\prod_{i=1}^{24} P(A_i^c) = 1-\prod_{i=1}^{24}(1-P(A_i))$$

$$= 1-\prod_{i=1}^{24}(1-\frac{1}{36}) = 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.491404.$$ Άρα, $p \neq q$.

Πρόβλημα 1.2 (Το πρόβλημα των γενεθλίων). Έστω ότι υπάρχουν n άνθρωποι σε ένα δωμάτιο. Ποια είναι η πιθανότητα να μην γιορτάζουν δύο από αυτούς τα γενέθλιά τους την ίδια ημέρα του χρόνου;

Λύση. Χρησιμοποιούμε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας. Ζητάμε την πιθανότητα A οι n άνθρωποι να γιορτάζουν σε διαφορετικές μέρες. Έχουμε $A = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365+1-n)}{(365)^n}$. Για παράδειγμα, αν $n = 23$, η παραπάνω πιθανότητα γίνεται μικρότερη από $1/2$.

1.8 Άλλα προβλήματα πιθανοτήτων

Πρόβλημα 1.3 Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια συνεχώς και ανεξάρτητα σημειώνοντας το άθροισμα τους. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου E: το άθροισμα 5 εμφανίζεται πριν εμφανιστεί το άθροισμα 7;

Λύση. Η λύση θα δοθεί με δύο τρόπους.

1^ος^ τρόπος. Θεωρούμε το ενδεχόμενο E_n : κατά τις πρώτες $n-1$ ρίψεις των ζαριών δεν εμφανίζεται ούτε το άθροισμα 5 ούτε το άθροισμα 7 και στην $n-$ οστή ρίψη εμφανίζεται το άθροισμα 5, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ισχύει ότι $p_5 = P\{\text{ άθροισμα πέντε}\} = P(\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

$p_7 = P\{\text{ άθροισμα επτά}\} = P(\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(4,3),(3,4)\} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Τότε $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και τα ενδεχόμενα $(E_n)_{n=1,2,\ldots}$ είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους (ασυμβίβαστα). Έχουμε

$$P(E) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n). \text{ Όμως, } P(E_n) = \left(1 - \frac{4}{36} - \frac{6}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36} = \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36},$$

άρα $P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36} = 0.4$.

2^ος^ τρόπος. Έστω τα ενδεχόμενα A: στη 1η ρίψη έχουμε άθροισμα 5, B: στη 1η ρίψη έχουμε άθροισμα 7 και C: στη 1η ρίψη έχουμε άθροισμα διαφορετικό του 5 και του 7.

Είναι $A \cup B \cup C = \Omega$ και $A \cap B \cap C = \varnothing$.

Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, έχουμε

$$P(E) = P(E \mid A)P(A) + P(E \mid B)P(B) + P(E \mid C)P(C) = 1 \cdot \frac{4}{36} + 0 \cdot \frac{6}{36} + P(E)\frac{26}{36}$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{26}{36}P(E) \Rightarrow 36P(E) = 4 + 26P(E) \Rightarrow P(E) = 0.4.$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει διότι τα ενδεχόμενα E και C είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Πρόβλημα 1.4 Κατά τη διάρκεια ενός έτους ένας άνδρας οδηγός παθαίνει κάποιο ατύχημα που δηλώνεται στην ασφαλιστική εταιρεία με πιθανότητα ίση με μ. Στην περίπτωση της γυναίκας οδηγού αυτή η πιθανότητα είναι ίση με λ. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των ασφαλισμένων ανδρών οδηγών είναι ίσος με τον αριθμό των ασφαλισμένων γυναικών οδηγών. Έστω ότι επιλέγουμε κατά τυχαίο τρόπο έναν ασφαλισμένο οδηγό.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα να κάνει δήλωση αυτός ο οδηγός κατά την τρέχουσα χρονιά;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα να κάνει δήλωση σε δύο διαδοχικές χρονιές;

(γ) Αν επιλεγεί κατά τυχαίο τρόπο ένας οδηγός που έκανε δήλωση αυτή τη χρονιά, ποια είναι η πιθανότητα να κάνει δήλωση και την επόμενη χρονιά;

Λύση. (α) Έστω τα ενδεχόμενα A_1 : ο οδηγός κάνει δήλωση αυτή την χρονιά και A_2 : ο οδηγός κάνει δήλωση την επόμενη χρονιά.

Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, έχουμε

$$P(A_1) = P(A_1 \,|\text{άνδρας})P(\text{ άνδρας}) + P(A_1 \,|\text{γυναίκα})P(\text{ γυναίκα}) = \frac{1}{2}(\lambda + \mu).$$

(β) Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας και έχουμε

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2 \,|\text{άνδρας})\,P(\text{ άνδρας}) + P(A_1 \cap A_2 \mid \text{γυναίκα})\,P(\text{ γυναίκα})$$

$$= \lambda^2 \frac{1}{2} + \mu^2 \frac{1}{2}.$$

(γ) Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{0.5(\lambda^2 + \mu^2)}{0.5(\lambda + \mu)} = \frac{(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda + \mu)}.$$

Πρόβλημα 1.5 Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται συνεχώς. Δείξτε ότι είναι βέβαιο πως θα εμφανιστεί κάποτε η ένδειξη «κεφαλή».

Λύση. Έστω το ενδεχόμενο A_n : καμία κεφαλή δεν εμφανίζεται κατά τις πρώτες n ρίψεις του νομίσματος. Η ακολουθία των ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots$ είναι φθίνουσα. Από το Θεώρημα Συνέχειας, έχουμε

$$P(\text{ δεν εμφανίζεται ποτέ κεφαλή}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Άρα, $P(\text{ κάποτε εμφανίζεται κεφαλή}) = 1 - P(\text{ δεν εμφανίζεται ποτέ κεφαλή}) = 1.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

2.1 Τυχαίες μεταβλητές

Κατά τη μελέτη ενός πειράματος τύχης μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε δειγματικό σημείο έναν αριθμό χρησιμοποιώντας έναν προκαθορισμένο κανόνα αντιστοίχησης. Υπάρχει δηλαδή η δυνατότητα ορισμού μιας συνάρτησης X η οποία σε κάθε σημείο ω του δειγματικού χώρου Ω να αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $X(\omega)$. Μία τέτοια συνάρτηση καλείται **τυχαία μεταβλητή** (random variable). Ο συμβολισμός $X(\omega)=x$ σημαίνει ότι όταν το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης είναι το $\omega \in \Omega,$ τότε η τιμή που θα πάρει η τυχαία μεταβλητή X είναι ίση με $x.$ Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1 (Τυχαία μεταβλητή). Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Μία πραγματική συνάρτηση $X:\Omega \to \Re$ καλείται **τυχαία μεταβλητή (του πειράματος)** αν για κάθε διάστημα $I \subseteq \Re$ το σύνολο $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$ είναι ενδεχόμενο του $\Omega.$ Η πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου θα γράφεται ως $P(X \in I).$

Μία τυχαία μεταβλητή $X:\Omega \to \Re$ αντιστοιχεί το δειγματικό χώρο Ω σε ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\Re$. Το συνόλο αυτό είναι το $\{x \in \Re\colon\ X(\omega)=x$ για κάποιο $\omega \in \Omega\}$ και καλείται **πεδίο τιμών ή σύνολο τιμών** (set of values) της τυχαίας μεταβλητής X. Συμβολίζεται συνήθως με R_X (ή με S_X).

Παράδειγμα 2.1 (α) Έστω το τυχαίο πείραμα της ρίψης δύο ζαριών. Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega=\{(i,j) \mid i,j=1,\ldots,6\}$. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $X:\Omega \to \Re$ τέτοια ώστε $X(i,j)=i+j.$ Η X αναπαριστά το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών.

(β) Έστω το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος n φορές. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $X :=$ αριθμός των εμφανιζομένων κεφαλών στις n ρίψεις. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αποτελείται από $n-$άδες με ενδείξεις Κ για τις κεφαλές και Γ για τα γράμματα. Αν ένα στοιχείο ω του δειγματικού χώρου είναι μία $n-$άδα με πέντε ενδείξεις κεφαλής τότε $X(\omega)=5$.

(γ) Έστω η τυχαία μεταβλητή $X :=$ χρόνος ζωής ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα. Το πεδίο τιμών της X είναι το σύνολο $R_X = [0,\infty)$.

(δ) Έστω η τυχαία μεταβλητή $X :=$ ενδιάμεσος χρόνος άφιξης τρένων σε ένα συγκεκριμένο σταθμό. Αν ο χρόνος μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων των τρένων δεν ξεπερνάει τα πέντε λεπτά, τότε η πιθανότητα να περιμένουμε περισσότερο από δύο λεπτά αν φτάσουμε στο σταθμό τη στιγμή που φεύγει ένα τρένο είναι ίση με $P(2 < X \le 5)$.

Ο υπολογισμός πιθανοτήτων που σχετίζονται με μία τυχαία μεταβλητή X είναι εφικτός αν βρεθεί μία έκφραση για τις πιθανότητες $P(X \le x)$ για όλα τα $x \in \Re$. Η **συνάρτηση κατανομής** (distribution function) $F(x) = P(X \le x)$ μας δίνει όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε για την τυχαία μεταβλητή X. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2 Έστω $X:\Omega \to \Re$ μία τυχαία μεταβλητή. Η **συνάρτηση κατανομής (σ.κ.)** F_X της τυχαίας μεταβλητής X είναι η συνάρτηση $F_X : \Re \to [0,1]$ με τύπο $F_X(x) = P(X \le x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}),\ x \in \Re$.

Μία συνάρτηση κατανομής έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

(α) Η συνάρτηση κατανομής F_X μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι αύξουσα.

(β) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

(γ) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

(δ) Η συνάρτηση κατανομής F_X είναι συνεχής από δεξιά. Η Πρόταση (δ) μπορεί εναλλακτικά να γραφεί ως εξής: Για κάθε φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{x_n\}_{n\ge1}$, με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$.

Παράδειγμα 2.2 Να εκφραστούν οι πιθανότητες $P(x < X \le y)$ και $P(X > x)$ συναρτήσει της σ.κ. F_X για μία τυχαία μεταβλητή X.

Λύση. Είναι $(X \le y) = (x < X \le y) \cup (X \le x)$ και τα ενδεχόμενα $(x < X \le y)$ και $(X \le x)$ είναι ξένα μεταξύ τους. Επομένως, $P(X \le y) = P(x < X \le y) + P(X \le x)$

Συνεπώς, $P(x < X \le y) = P(X \le y) - P(X \le x) = F_X(y) - F_X(x)$.

Είναι $P(X > x) = 1 - P[(X > x)^c] = 1 - P(X \le x) = 1 - F_X(x)$.

2.2 Διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Αν το πεδίο τιμών R_X μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι πεπερασμένο ή το πολύ απείρως αριθμήσιμο τότε η X καλείται **διακριτή (ή απαριθμητή)** (discrete). Σε αυτή την περίπτωση το σύνολο τιμών της X έχει τη μορφή $S_X = R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ή τη μορφή $S_X = R_X = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Το σύνολο S_X καλείται **φορέας** της τυχαίας μεταβλητής X. Σε κάθε διακριτή τυχαία μεταβλητή X, μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μία πραγματική συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με τύπο $f(x_i) = P(X = x_i),\ x_i \in S_X$ η οποία καλείται **συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.)** (probability function) **της** X.

Για παράδειγμα, κατά τη ρίψη ένος νομίσματος n φορές, η τυχαία μεταβλητή X που μετράει τον αριθμό των κεφαλών είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένο σύνολο τιμών $R_X = \{0,1,\ldots,n\}$.

Μία συνάρτηση πιθανότητας ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

(α) $f(x_i) \geq 0,$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots$.

(β) $\sum\limits_{x_i \in S_X}^{\infty} f(x_i) = 1.$

Επιπλέον, για μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X ισχύει ότι

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left[\bigcup_{x_k \leq x}\{X = x_k\}\right] = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k) = \sum_{x_k \leq x} f(x_k).$$

Η συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής παριστάνεται γραφικά με ένα σύνολο κατακόρυφων γραμμών που συνδέουν τα σημεία $(x_i, 0)$ με τα σημεία $(x_i, f(x_i))$ για $i = 1, 2, \ldots$.

Παράδειγμα 2.3 Ο αριθμός των αυτοκινήτων που πουλάει μία έκθεση σε μία εβδομάδα είναι τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο: $f(x) = cx,\quad x = 1, 2, 3, 4, 5$ και $f(x) = c(10 - x),$ $x = 6, 7, 8, 9.$ (α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς $c.$ (β) Ποια είναι η πιθανότητα να πουληθούν σε μία εβδομάδα (i) λιγότερα από 4 αυτοκίνητα; (ii) περισσότερα από 5 αυτοκίνητα γνωρίζοντας ότι έχουν πουληθεί τουλάχιστον 3;

Λύση. (α) Είναι $R_X = \{1, \ldots, 9\},$ οπότε θα ισχύει ότι $\sum\limits_{x=1}^{9} f(x) = 1$ ή ισοδύναμα $25c = 1 \Rightarrow c = 1/25.$

(β) Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων έχουμε:

(i) $P(X < 4) = \sum\limits_{x=1}^{3} P(X = x) = \dfrac{1}{25}(1 + 2 + 3) = \dfrac{6}{25}.$

(ii) $P(X>5 \mid X\geq 3)=\dfrac{P(X>5, X\geq 3)}{P(X\geq 3)}=\dfrac{P(X>5)}{P(X\geq 3)}=\dfrac{f(6)+f(7)+f(8)+f(9)}{1-f(1)-f(2)}=\dfrac{10/25}{1-3/25}=\dfrac{5}{11}.$

Παράδειγμα 2.4 Οι ημερήσιες παραγγελίες (σε 100-άδες χιλιάδες τεμάχια) που δέχεται ένα εργοστάσιο το οποίο κατασκευάζει CD περιγράφονται από μία τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής $F(t)=0,$ $t<0,$ $F(t)=at^2,$ $0\leq t<1/2,$ $F(t)=at-t^2,$ $1/2\leq t<1,$ $F(t)=1,$ $t\geq 1,$ όπου a είναι μία πραγματική σταθερά. Υποθέτουμε ότι οι ημερήσιες παραγγελίες είναι λιγότερες από 100000 τεμάχια.

(α) Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς a.

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα σε μία ημέρα να παραγγελθούν περισσότερα από 50000 τεμάχια.

(γ) Αν κάποια ημέρα οι παραγγελίες έχουν ξεπεράσει τα 25000 τεμάχια, ποια είναι η πιθανότητα να υπερβούν και τα 75000 τεμάχια;

Λύση. (α) Υποθέτουμε ότι $P(X<1)=1.$ Επομένως, $1=P(X<1)=F(1_{-})=a-1\Rightarrow a=2.$

(β) $P\left(X>\dfrac{1}{2}\right)=1-F\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-2\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}.$

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P\left(X>\frac{3}{4} \mid X>\frac{1}{4}\right)=\frac{P\left(X>\frac{3}{4}, X>\frac{1}{4}\right)}{P\left(X>\frac{1}{4}\right)}=\frac{P\left(X>\frac{3}{4}\right)}{P\left(X>\frac{1}{4}\right)}=\frac{1-F\left(\frac{3}{4}\right)}{1-F\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{1-2\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1-2\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{8}.$$

Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται **συνεχής** (continuous), αν υπάρχει μία μη-αρνητική συνάρτηση $f_X:\Re\rightarrow[0,\infty)$ τέτοια ώστε για κάθε υποσύνολο B του συνόλου $\Re$ των πραγματικών αριθμών, το οποίο μπορεί να γραφεί ως ένωση ενός πεπερασμένου ή απείρως αριθμήσιμου πλήθους διαστημάτων, ισχύει ότι $P(X\in B)=\int_B f_X(t)dt,\ t\in\Re.$ Η συνάρτηση f_X καλείται **συνάρτηση πυκνότητας (σ.π.)** (density function) **της** X.

Αν $B=(-\infty,\infty),$ τότε $P(X\in(-\infty,\infty))=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt=1.$

Αν $B=[a,b],$ τότε $P(X\in[a,b])=P(a\leq X\leq b)=\int_a^b f_X(t)dt.$

Αν $a=b,\ P(X=a)=\int_a^a f_X(t)dt=0.$ Επομένως, η πιθανότητα η X να πάρει οποιαδήποτε συγκεκριμένη τιμή είναι μηδέν. Η τιμή $f_X(a)$ δεν εκφράζει την πιθανότητα $P(X=a)$ όπως στις διακριτές κατανομές αλλά δίνει το **πόσο πιθανό** είναι να βρίσκεται η τυχαία μεταβλητή X **πολύ κοντά στην τιμή** a. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή $f_X(a)$ τόσο περισσότερο πιθανό είναι να πάρει η τυχαία μεταβλητή X τιμές κοντά στο a.

Επιπλέον, ισχύει ότι $F_X(x)=P(X<x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$ Αν υποθέσουμε ότι η σ.π. f_X είναι μία συνεχής συνάρτηση τότε, όπως γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό, αν παραγωγίσουμε ως προς x, θα έχουμε $F'_X(x)=f_X(x), x\in\Re.$ Ακόμη και αν η f_X δεν είναι συνεχής παντού η τελευταία σχέση θα ισχύει για κάθε x στο οποίο η f_X είναι συνεχής.

Μία συνάρτηση πυκνότητας χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες δύο ιδιότητες

(α) $f_X(x)\ge 0, x\in\Re.$

(β) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt=1.$

Παράδειγμα 2.5 Το σφάλμα X που γίνεται κατά τη μέτρηση με τη χρήση ενός συγκεκριμένου οργάνου είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)=c(4-x^2),\quad -2\le x\le 2$ και $f(x)=0,$ διαφορετικά, όπου c είναι μία πραγματική σταθερά. (α) Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς c. (β) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής F_X της τυχαίας μεταβλητής X. (γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το σφάλμα μιας μέτρησης να είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερο του 1.

Λύση. (α) Θα πρέπει $c\ge 0$ και $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1\Rightarrow\int_{-2}^{2} c(4-x^2)dx=1\Rightarrow\frac{32}{3}c=1\Rightarrow c=\frac{3}{32}.$

(β) Η συνάρτηση κατανομής της X δίνεται από τον τύπο $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0,\ x<-2\\ \int_{-2}^{x}\frac{3}{32}(4-t^2)dt,\ -2\le x\le 2\\ 1,\ x>2\end{cases}$

Είναι $\int_{-2}^{x}\frac{3}{32}(4-t^2)dt=\frac{12}{32}\left[t\right]_{-2}^{x}-\frac{3}{32}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{x}=\frac{16+12x-x^3}{32}.$

Άρα, $F(x)=\begin{cases}0,\ x<-2\\ \dfrac{16+12x-x^3}{32},-2\le x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$

(γ) $P(|X|<1) = P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{11}{16} = 68.75\%.$

2.3 Παραδείγματα διακριτών τυχαίων μεταβλητών

(α) Ομοιόμορφη διακριτή τυχαία μεταβλητή. Έστω $\Omega = \{x_1, \ldots, x_N\}$ ένας πεπερασμένος δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, όπου N φυσικός αριθμός. Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως εξής $f_X(x_i) = P(X = x_i) = \frac{1}{N},$ για κάθε $i = 1, \ldots, N.$ Λέμε ότι η X είναι μία **ομοιόμορφη διακριτή τυχαία μεταβλητή** (discrete uniform random variable). Για παράδειγμα, θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού. Στην περίπτωση αυτή, το σύνολο τιμών της X είναι το διακριτό σύνολο $\{1, \ldots, 6\}$ και ισχύει ότι $P(X = i) = \frac{1}{6}, i \in \{1, \ldots, 6\}.$

(β) Διωνυμική τυχαία μεταβλητή. Θεωρούμε ένα πείραμα τύχης το οποίο έχει δύο μόνο δυνατά αποτελέσματα το ένα εκ των οποίων μπορεί να χαρακτηρισθεί ως «επιτυχία» και το άλλο μπορεί να χαρακτηρισθεί ως «αποτυχία». Κάθε εκτέλεση ενός πειράματος τύχης με μόνο δύο δυνατά αποτελέσματα καλείται **δοκιμή**. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα n φορές. Θεωρούμε ότι η πιθανότητα της «επιτυχίας» είναι ίση με p και η πιθανότητας της «αποτυχίας» είναι ίση με $q = 1 - p.$ Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των επιτυχιών στις n ανεξάρτητες επαναλήψεις του πειράματος. Τότε λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι μία **διωνυμική τυχαία μεταβλητή** (binomial random variable). Γράφουμε $X \sim Bin(n, p)$ και λέμε ότι η X ακολουθεί τη **διωνυμική κατανομή**. Οι ποσότητες n, p καλούνται **παράμετροι** της διωνυμικής κατανομής. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\},$ όπου το σύνολο $\{0, 1\}$ εμφανίζεται n φορές, η ένδειξη 0 συμβολίζει την «αποτυχία» και η ένδειξη 1 συμβολίζει την «επιτυχία». Το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι το διακριτό σύνολο $\{0, \ldots, n\}.$ Η συνάρτηση πιθανότητας μιας διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής $X \sim B(n, p)$ δίνεται από τον τύπο $P(X = x) = f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \ x = 0, \ldots, n, \ q = 1 - p.$

Η f_X είναι πράγματι μία συνάρτηση πιθανότητας διότι $\sum_{x=0}^{n} f_X(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p+q)^n = 1^n = 1$ και προφανώς $f_X(x) \geq 0, x = 0, \ldots, n.$ Αν $n = 1$ η τυχαία μεταβλητή X καλείται τυχαία μεταβλητή **Bernoulli** (Bernoulli random variable) και γράφουμε $X \sim \text{Bernoulli}(p).$

Παράδειγμα 2.6 Πόσα παιδιά πρέπει να αποκτήσει μία οικογένεια ώστε να έχει με πιθανότητα μεγαλύτερη ή ίση του 0.9 τουλάχιστον ένα αγόρι και τουλάχιστον ένα κορίτσι; Υποθέτουμε ότι σε κάθε γέννηση είναι εξίσου πιθανό να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι.

Λύση. Έστω n ο ζητούμενος αριθμός παιδιών που πρέπει να αποκτήσει η οικογένεια. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των αγοριών που έχει αποκτήσει η οικογένεια στο σύνολο των n παιδιών και Y η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των κοριτσιών που έχει αποκτήσει η οικογένεια στο σύνολο των n παιδιών. Ισχύει ότι $X \sim Bin\left(n, \frac{1}{2}\right)$ και $Y \sim Bin\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Επιπλέον $X + Y = n.$

Είναι $P(X \geq 1, Y \geq 1) = P(X \geq 1, n - X \geq 1) = P(1 \leq X \leq n-1) = 1 - P(X = 0) - P(X = n)$

$$= 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}. \text{ Πρέπει } 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \geq 0.9 \Rightarrow n \geq 1 - \frac{\ln 0.1}{\ln 2} \approx 5.32.$$

Επομένως, η οικογένεια θα πρέπει να έχει τουλάχιστον έξι παιδιά.

Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων που σχετίζονται με τη διωνυμική κατανομή χρησιμοποιούμε κατάλληλους πίνακες (για παράδειγμα, βλέπε βιβλίο Γ. Ρούσσα, Θεωρία Πιθανοτήτων, σελ. 280-288).

(γ) Τυχαία μεταβλητή Poisson. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των πελατών που φθάνουν σε ένα ταμείο εντός ορισμένου χρονικού διαστήματος ή τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μία περιοχή κατά τη διάρκεια μιας ημέρας ή τον αριθμό των σωματιδίων που εκπέμπονται από μία ραδιενεργό πηγή εντός δοθέντος χρονικού διαστήματος. Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα η τυχαία μεταβλητή X λαμβάνει τιμές $x = 0, 1, \ldots$ και η πιθανότητα $P(X = x)$ μπορεί να προσεγγισθεί ικανοποιητικά από μία κατανομή πιθανότητας που καλείται **κατανομή Poisson** (Poisson distribution). Η συνάρτηση πιθανότητας της X ορίζεται ως εξής: $f_X(x) = P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \;\; x = 0, 1, \ldots, \;\; \lambda > 0.$

Η ποσότητα λ καλείται **παράμετρος** της κατανομής Poisson και η παραπάνω συνάρτηση είναι πράγματι μία σ.π. διότι $\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = e^0 = 1.$ Αν μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0,$ γράφουμε $X \sim Poisson(\lambda).$ Ισχύει το ακόλουθο οριακό θεώρημα σύμφωνα με το οποίο η κατανομή Poisson προσεγγίζεται από τη διωνυμική κατανομή.

Θεώρημα 2.1 (Προσέγγιση της κατανομής Poisson από τη διωνυμική κατανομή). Έστω μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n \geq 1}$ που ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p_n. Έστω ότι καθώς $n \to \infty,$ $p_n \to 0$ και $\lambda_n = np_n \to \lambda,$ για κάποιο $\lambda > 0.$

Τότε $P(X_n = x) = \binom{n}{x} p_n^x (1-p_n)^{n-x} \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, καθώς $n \to \infty$, για κάθε σταθερό $x = 0,1,\ldots$.

Απόδειξη. Έχουμε $P(X_n = x) = \binom{n}{x} p_n^x (1-p_n)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-x}$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-x} = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}\frac{\lambda_n^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-x}$$

$= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\frac{\lambda_n^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-x} \to 1\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$, καθώς $n \to \infty$, διότι $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$, καθώς $n \to \infty$. ■

Παράδειγμα 2.7 Μία πόλη έχει χίλια σπίτια. Κατά τη διάρκεια ενός χρόνου η πιθανότητα να παραβιαστεί οποιοδήποτε από αυτά είναι 0.001. Να υπολογιστεί η πιθανότητα κατά τη διάρκεια ενός έτους να γίνουν τουλάχιστον δύο διαρρήξεις.

Λύση. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των διαρρήξεων κατά τη διάρκεια ενός έτους. Ισχύει ότι $X \sim B(1000,\ 0.001)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, έχουμε

$P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}$.

Παράδειγμα 2.8 Έστω ότι ο αριθμός των θανάτων σε ένα νοσοκομείο των Αθηνών σε ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Αν η πιθανότητα να συμβεί το πολύ ένας θάνατος σε ένα μήνα είναι τετραπλάσια της πιθανότητας να συμβούν δύο ακριβώς θάνατοι σε ένα μήνα να υπολογιστεί η πιθανότητα (α) να μη συμβεί θάνατος σε ένα μήνα (β) να συμβούν το πολύ δύο θάνατοι σε ένα μήνα.

Λύση. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X αναπαριστά τον αριθμό των θανάτων σε ένα μήνα. Τότε $X \sim Poisson(\lambda)$. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι

$P(X \le 1) = 4P(X = 2)$ δηλαδή $e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\lambda = 4e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} \Rightarrow 1 + \lambda = 2\lambda^2$. Έπεται ότι $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1/2$ η οποία είναι μία μη αποδεκτή λύση. Άρα $X \sim Poisson(1)$.

(α) $P(X = 0) = e^{-1} \cong 0.37$. (β) $P(X \le 2) = \sum_{x=0}^{2} e^{-1}\frac{1^x}{x!} = 2.5e^{-1} \cong 0.92$.

(ε) Γεωμετρική τυχαία μεταβλητή. Έστω ότι η πιθανότητα επιτυχίας ενός πειράματος τύχης με δύο μόνο δυνατά αποτελέσματα («επιτυχία», «αποτυχία») είναι ίση με $p \ne 0$. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας. Το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι το διακριτό σύνολο $\{1, 2, \ldots\}$. Λέμε ότι η X ακολουθεί τη **Γεωμετρική κατανομή**

(Geometric distribution) με παράμετρο p και γράφουμε $X \sim G(p)$. Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι

$f_X(x) = P(X = x) = P($αποτυχία στη 1^{η} δοκιμή,…, αποτυχία στη $x-1-$οστή δοκιμή, επιτυχία στη $x-$οστή δοκιμή$) = (1-p)\cdots(1-p)\cdot p = (1-p)^{x-1}p,\ \ x \in \{1,\ldots\}$.

Η f_X είναι πράγματι μία σ.π. διότι $\sum_{x=1}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}p = p\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1} = p\frac{1}{1-(1-p)} = p\frac{1}{p} = 1.$

Για τη συνάρτηση κατανομής της $G(p)$ έχουμε $F(x) = 0,\ \ x < 1$ και $F(x) = \sum_{t=1}^{x} f(t),\ \ x \geq 1.$

Όμως, $\sum_{t=1}^{x} f(t) = p\sum_{t=1}^{x} q^{x-1} = p(1+q+\ldots+q^{x-1}) = p\frac{1-q^x}{1-q} = p\frac{1-q^x}{p} = 1-q^x.$ Καταλήγουμε στον ακόλουθο τύπο: $F(x) = 0,\ \ x < 1$ και $F(x) = 1-q^x,\ \ x \geq 1.$

Παράδειγμα 2.9 Από έρευνες έχει διαπιστωθεί ότι οι μαθητές της Γ' τάξης του Γυμνασίου καπνίζουν σε ποσοστό 4%. Αν αρχίσουμε και ρωτάμε τον ένα μετά τον άλλον μαθητές της Γ' τάξης του Γυμνασίου να απαντήσουν στο ερώτημα αν καπνίζουν ή όχι μέχρις ότου λάβουμε την πρώτη θετική απάντηση, να υπολογιστεί η πιθανότητα να κάνουμε (α) άρτιο αριθμό ερωτήσεων (β) περισσότερες από 8 ερωτήσεις και λιγότερες από 13.

Λύση. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των ερωτήσεων που θα κάνουμε μέχρις ότου λάβουμε για πρώτη φορά θετική απάντηση. Τότε $X \sim G\left(p = 4/100\right)$.

Για $x = 1,\ldots$ έχουμε $f(x) = P(X = x) = \left(\frac{96}{100}\right)^{x-1}\frac{4}{100},\ \ F(x) = P(X \leq x) = 1-\left(\frac{96}{100}\right)^{x}.$

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$f(2) + f(4) + \ldots = \sum_{x=1}^{\infty} f(2x) = \sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{96}{100}\right)^{2x-1}\frac{4}{100} = \frac{4}{100}\frac{100}{96}\sum_{x=1}^{\infty}\left[\left(\frac{96}{100}\right)^{2}\right]^{x} = \frac{24}{49}.$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(8 < X < 13) = P(8 < X \leq 12) = F(12) - F(8) = \left[1-\left(\frac{96}{100}\right)^{12}\right] - \left[1-\left(\frac{96}{100}\right)^{8}\right] \cong 0.11.$$

(δ) Υπεργεωμετρική τυχαία μεταβλητή. Έστω ότι μία κάλπη περιέχει a λευκές και b μαύρες σφαίρες. Εξάγουμε διαδοχικά τη μία μετά την άλλη n σφαίρες χωρίς επανατοποθέτηση. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των λευκών σφαιρών που περιέχονται στο δείγμα των n σφαιρών. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται **υπεργεωμετρική κατανομή** (hypergeometric distribution) **με παραμέτρους**

a,b **και** n και θα συμβολίζεται με $h(n,a,b)$. Η συνάρτηση πιθανότητας της υπεργεωμετρικής κατανομής με παραμέτρους a,b και n δίνεται από τον τύπο: $f_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}$.

Τα αποτελέσματα του πειράματος είναι όλες οι δυνατές επιλογές n σφαιρών από τις $a+b$ συνολικά σφαίρες που υπάρχουν στην κάλπη. Τα ευνοϊκά αποτελέσματα για το ενδεχόμενο $\{X = x\}$ προκύπτουν επιλέγοντας x λευκές σφαίρες από τις a που είναι διαθέσιμες και $n-x$ μαύρες από τις b που είναι διαθέσιμες. Το πλήθος των τρόπων επιλογής των x λευκών σφαιρών είναι $\binom{a}{x}$ και για κάθε τέτοια επιλογή υπάρχουν $\binom{b}{n-x}$ δυνατές επιλογές για τις $n-x$ μαύρες σφαίρες που χρειάζονται για να συμπληρωθεί το δείγμα. Ο αριθμός των τρόπων επιλογής των ευνοϊκών αποτελεσμάτων θα είναι, από τη Βασική Αρχή Απαρίθμησης, ίσος με $\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}$. Το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι το διακριτό σύνολο $\{0,1,\ldots,k\}$, όπου $k = \min\{n,a\}$. Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή με παραμέτρους a,b και n γράφουμε $X \sim h(n,a,b)$.

Παράδειγμα 2.10 Οι τύποι ομάδων αίματος είναι Ο, Α, Β και ΑΒ. Έχουμε εκατό άτομα από τα οποία σαράντα πέντε έχουν τύπο αίματος Ο. Επιλέγουμε τυχαία είκοσι άτομα. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των ατόμων με ομάδα αίματος Ο. Ζητάμε να βρούμε την πιθανότητα $X = 8$.

Λύση. Είναι $P(X = 8) = f_X(8) = \dfrac{\binom{45}{8}\binom{55}{12}}{\binom{100}{20}}$, διότι $X \sim h(20,45,55)$.

2.4 Παραδείγματα συνεχών τυχαίων μεταβλητών

(α) Ομοιόμορφη συνεχής τυχαία μεταβλητή. Μία συνέχης τυχαία μεταβλητή X καλείται **ομοιόμορφη** αν η συνάρτηση πυκνότητας f_X δίνεται από τον τύπο $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$. Η f_X είναι πράγματι μία σ.π. διότι $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_a^b \dfrac{1}{b-a} = 1$. Λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη **συνεχής ομοιόμορφη κατανομή** (continuous uniform distribution) στο διάστημα $[a,b]$ και γράφουμε $X \sim U(a,b)$. Είναι μία κατανομή η οποία έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε σε υποδιαστήματα του $[a,b]$ με ίσο πλάτος να αντιστοιχεί η ίδια πιθανότητα.

Επειδή σε μία συνεχή κατανομή, σε ενδεχόμενα της μορφής $\{X = x\}$ αντιστοιχούν μηδενικές πιθανότητες, δεν έχει σημασία κατά πόσο στον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας της $U(a,b)$ χρησιμοποιούμε ανισότητες της μορφής $a \le x$ ή $a < x$ κλπ.

Η συνάρτηση κατανομής F_X της X δίνεται από τον τύπο $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b. \\ 1, & x > b \end{cases}$ Οι ποσότητες a και b είναι οι **παράμετροι** της ομοιόμορφης κατανομής.

Παράδειγμα 2.11 Ένας αριθμός X επιλέγεται τυχαία στο διάστημα $[0,2]$. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες

(α) το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του αριθμού X να διαιρείται με το 3.

(β) το πρώτο δεκαδικό ψηφίο της τρίτης ρίζας του X να είναι το 2.

Λύση. Αφού ο αριθμός επιλέγεται τυχαία από το διάστημα $[0,2]$, η τυχαία μεταβλητή X θα ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,2]$ και η συνάρτηση κατανομής της θα δίνεται από τον τύπο

$$F(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ \dfrac{t}{2}, 0 \le t \le 2. \\ 1, t > 2 \end{cases}$$

(α) Για να διαιρείται με το 3 το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του X, θα πρέπει να είναι 0 ή 3 ή 6 ή 9. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $0.0 \le X < 0.1$ ή $1.0 \le X < 1.1$ ή $X = 2$, στην δεύτερη $0.3 \le X < 0.4$ ή $1.3 \le X < 1.4$, στην τρίτη $0.6 \le X < 0.7$ ή $1.6 \le X < 1.7$ ενώ στην τέταρτη $0.9 \le X < 1$ ή $1.9 \le X < 2$. Όμως, $P(X = 2) = 0$, οπότε

$$P(\{0.0 \le X < 0.1\} \cup \{1.0 \le X < 1.1\} \cup \{X = 2\}) = P(0 \le X < 0.1) + P(1 \le X < 1.1)$$

$$= (F(0.1) - F(0)) + (F(1.1) - F(1)) = \frac{0.1}{2} - \frac{0}{2} + \frac{1.1}{2} - \frac{1}{2} = 0.1.$$

Παρόμοια, $P(\{0.3 \le X < 0.4\} \cup \{1.3 \le X < 1.4\}) = 0.1$, $P(\{0.6 \le X < 0.7\} \cup \{1.6 \le X < 1.7\}) = 0.1$

$P(\{0.9 \le X < 1\} \cup \{1.9 \le X < 2\}) = 0.1.$ Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.4.$

(β) Ζητάμε την πιθανότητα $P(\{0.2 \le \sqrt[3]{X} < 0.3\} \cup \{1.2 \le \sqrt[3]{X} < 1.3\})$.

Όμως,

$$P(\{0.2 \le \sqrt[3]{X} < 0.3\}) = P(\{(0.2)^3 \le X < (0.3)^3\}) = P(0.008 \le X < 0.027) = F(0.027) - F(0.008) = 0.0095.$$

Παρόμοια έχουμε

$$P(\{1.2 \le \sqrt[3]{X} < 1.3\}) = P(\{(1.2)^3 \le X < (1.3)^3\}) = F(2.197) - F(1.728) = 1 - \frac{1.728}{2} = 0.136.$$

Επομένως, $P(\{0.2 \le \sqrt[3]{X} < 0.3\} \cup \{1.2 \le \sqrt[3]{X} < 1.3\}) = 0.0095 + 0.136 = 14.55\%.$

(β) Εκθετική τυχαία μεταβλητή. Λέμε ότι η X είναι μία **εκθετική** τυχαία μεταβλητή με **παράμετρο** $\lambda > 0$ αν η συνάρτηση πυκνότητας της f_X δίνεται από τον τύπο $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$. Η f_X είναι πράγματι μία συνάρτηση πυκνότητας διότι

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_{0}^{\infty} (e^{-\lambda x})' dx = 1$. Η συνάρτηση κατανομής F_X της X δίνεται από τον τύπο

$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$. Επιπλέον, $P(X > x) = 1 - P(X \le x) = e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$

Μία σημαντική ιδιότητα της εκθετικής τυχαίας μεταβλητής είναι η **αμνήμων ιδιότητα**, σύμφωνα με την οποία ισχύει ότι $P(X > r + t \mid X > r) = P(X > t), \quad r, \quad t > 0.$

Είναι $P(X > r + t \mid X > r) = \dfrac{P(X > r + t, X > r)}{P(X > r)} = \dfrac{P(X > r + t)}{P(X > r)} = \dfrac{e^{-\lambda(r+t)}}{e^{-\lambda r}} = e^{-\lambda t} = P(X > t).$

Μπορούμε να σκεφτούμε την X ως το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να παρουσιάσει βλάβη ένα μηχάνημα. Η τυχαία μεταβλητή X μετριέται από τη στιγμή που αρχίζει το μηχάνημα να λειτουργεί. Οι τελευταίες ισότητες μας λένε ότι αν το μηχάνημα δεν είχε παρουσιάσει βλάβη μέχρι τη χρονική στιγμή r η πιθανότητα να μην παρουσιάσει βλάβη στις επόμενες t χρονικές μονάδες είναι ίση με τη μη-δεσμευμένη πιθανότητα το μηχάνημα να μην είχε υποστεί βλάβη στις πρώτες t χρονικές μονάδες. Αυτό σημαίνει ότι η γήρανση του μηχανήματος δεν αυξάνει ούτε μειώνει την πιθανότητα να υποστεί βλάβη το μηχάνημα εντός ενός καθορισμένου χρονικού διαστήματος. Η Εκθετική κατανομή (Exponential distribution) αποτελεί, μεταξύ άλλων, το κατάλληλο πιθανοθεωρητικό μοντέλο για το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών κλήσεων σε ένα τηλεφωνικό κέντρο ή για το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών ατυχημάτων σε ένα συγκεκριμένο σημείο της Εθνικής οδού.

Παράδειγμα 2.12 Ο χρόνος ζωής ενός ανθρώπου είναι μία τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1/75$. Βρείτε την πιθανότητα ο άνθρωπος αυτός να ζήσει (α) το πολύ εβδομήντα χρόνια (β) ακριβώς εβδομήντα χρόνια (γ) τουλάχιστον εβδομήντα χρόνια (δ) πάνω από εβδομήντα χρόνια αν είναι τριάντα χρονών.

Λύση. (α) $P(X \le 70) = F_X(70) = 1 - e^{-\frac{70}{75}} = 0.61.$

(β) $P(X = 70) = 0.$

(γ) $P(X \ge 70) = e^{-\frac{70}{75}} = 0.39.$

(δ) $P(X>70\,|\,X>30)=P(X>40)=e^{-\frac{40}{75}}=0.59.$

Παράδειγμα 2.13 Έστω ότι η διάρκεια X μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1/15$. (α) Αν κάποιος φτάσει σε ένα τηλεφωνικό θάλαμο ακριβώς πριν απο εμάς, ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένουμε περισσότερο από 15 λεπτά; (β) Αν τη στιγμή που φτάνουμε στον τηλεφωνικό θάλαμο, το άτομο που είναι μέσα, μιλάει ήδη για 15 λεπτά, ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένουμε περισσότερο από 15 λεπτά;

Λύση. Η συνάρτηση κατανομής της X δίνεται από τον τύπο $F(t)=0,\ t<0$ και $F(t)=1-e^{-\frac{t}{15}}, t\ge 0.$

(α) Έχουμε $P(X>15)=1-P(X\le 15)=1-F(15)=1-(1-e^{-1})=e^{-1}\cong 36.8\%.$

(β) Με χρήση της ιδιότητας της έλλειψης μνήμης της Εκθετικής κατανομής, έχουμε:

$P(X>15+15\,|\,X>15)=P(X>15)=1-F(15)=e^{-1}\cong 36.8\%.$

(γ) Τυχαία μεταβλητή Γάμμα. Λέμε ότι η X είναι μία τυχαία μεταβλητή Γάμμα (Gamma) με θετικές παραμέτρους a και λ αν η σ.π. της f_X είναι $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}\lambda^a e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$,

όπου, $\Gamma(a)$ είναι η **συνάρτηση Γάμμα** (Gamma function) και ορίζεται ως εξής $\Gamma(a)=\int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}dy,\quad a>0.$ Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την **κατανομή Γάμμα** (Gamma distribution) **με παραμέτρους** a **και** λ και γράφουμε $X\sim$ Γάμμα(a,λ). Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή $N(t), t\ge 0,$ η οποία μετρά τον αριθμό των γεγονότων που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα $[0,t]$. Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,\dots,X_n$ που αναπαριστούν τον ενδιάμεσο χρόνο μεταξύ της πραγματοποίησης του $(n-1)-$οστού και του $n-$οστού γεγονότος. Η κατανομή Γάμμα εκφράζει το συνολικό χρόνο μέχρι την $n-$οστή πραγματοποίηση ενός γεγονότος. Επομένως, $X=X_1+\ldots+X_n$. Για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής της X, έχουμε

$$F(t)=P(X\le t)=P(N(t)\ge n)=\sum_{i=n}^{\infty}P(N(t)=i)=\sum_{i=n}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}=1-\sum_{i=0}^{n-1}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}, t\ge 0,$$

διότι η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ αποδεικνύεται ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt. Η συνάρτηση Γάμμα αποτελεί γενίκευση της έννοιας του παραγοντικού, όπως φαίνεται και από τις ακόλουθες ιδιότητές της.

(i) $\Gamma(a)=(a-1)\Gamma(a-1),$ όπου $a>1.$

Άμεση συνέπεια της ιδιότητας (i) είναι η ιδιότητα

(ii) $\Gamma(a)=(a-1)!,\quad a=1,2,\ldots,$ διότι

$\Gamma(a)=(a-1)\Gamma(a-1)=(a-1)(a-2)\Gamma(a-2)=(a-1)(a-2)\cdots\Gamma(1)=(a-1)!,$ επειδή

$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-y}dy=1.$ Επιπλέον ισχύει ότι $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$

Η f_X είναι πράγματι μία συνάρτηση πυκνότητας διότι, αν θέσουμε $y=\lambda x,$ διαδοχικά έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}\lambda^a e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}dy=\frac{1}{\Gamma(a)}\Gamma(a)=1.$$

Στην περίπτωση που $a=1$ η X είναι μία Εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda>0.$ Λέμε ότι η X είναι μία Χι-τετράγωνο (chi-squared) τυχαία μεταβλητή με r βαθμούς ελευθερίας (degrees of freedom) και γράφουμε $X\sim X_r^2,\ r=1,2,\ldots$ αν ισχύει ότι

$X\sim \text{Γάμμα}\left(a=\frac{r}{2},\lambda=\frac{1}{2}\right)$ και η σ.π. της, f_X είναι $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{r/2}}x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$

Παράδειγμα 2.14 Ο χρόνος επισκευής (σε ώρες) μιας βλάβης ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $a=\lambda=2.$ Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστεί για την επισκευή της βλάβης (α) το πολύ μία ώρα; (β) χρόνος από 60 έως 90 λεπτά;

Λύση. Η σ.π. του χρόνου επισκευής X της βλάβης δίνεται από τον τύπο $f(x)=\frac{2^2}{\Gamma(2)}x^{2-1}e^{-2x}=4xe^{-2x},x\ge 0.$

Η σ.κ. είναι $F(t)=1-\sum_{i=0}^{2-1}e^{-2t}\frac{(2t)^i}{i!}=1-e^{-2t}(1+2t),\ t\ge 0.$

(α) Είναι $P(X\le 1)=F(1)=1-3e^{-2}\cong 59.4\%.$

(β) Είναι $P(1\le X<1.5)=F(1.5)-F(1)=3e^{-2}-4e^{-3}\cong 20.7\%.$

(δ) Τυχαία μεταβλητή Βήτα. Λέμε ότι η X είναι μία τυχαία μεταβλητή **Βήτα** (Beta) με θετικές παραμέτρους a,b και γράφουμε $X\sim \text{Βήτα}(a,b)$ αν η σ.π. της, f_X είναι $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & 0<x<1\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}.$

Η f_X είναι πράγματι μία σ.π. διότι $\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=1,$

επειδή $B(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ και η συνάρτηση $B(a,b)$ καλείται **συνάρτηση Βήτα** (Beta function). Αν $a=b=1,$ τότε μία τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $X\sim B(1,1)$ συμπίπτει με την ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή στο διάστημα $(0,1),$ δηλαδή $B(1,1)\equiv U(0,1).$ Λέμε ότι η X ακολουθεί την κατανομή Βήτα με παραμέτρους a και $b.$ Η κατανομή Βήτα παρέχει ένα ικανοποιητικό μοντέλο για την περιγραφή τυχαίων μεταβλητών που παίρνουν τιμές μεταξύ δύο συγκεκριμένων ορίων όπως για παράδειγμα, το ποσοστό ατόμων ενός πληθυσμού που έχουν μία συγκεκριμένη ιδιότητα.

(ε) Κανονική τυχαία μεταβλητή. Λέμε ότι η X είναι μία **κανονική** τυχαία μεταβλητή (normal random variable) με παραμέτρους $\mu\in\Re,$ $\sigma^2>0$ και γράφουμε $X\sim N(\mu,\sigma^2),$ αν η συνάρτηση πυκνότητας της, f_X είναι $f_X(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, x\in\Re.$ Εναλλακτικά λέμε ότι η X ακολουθεί την **κανονική κατανομή** ή την **κατανομή Gauss**. Η f_X είναι πράγματι μία σ.π. (βλέπε βιβλίο Μ. Κούτρα, Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Μέρος Ι, σελ. 396-397).

Το γράφημα της f_X είναι μία κωδωνοειδής καμπύλη και επιπλέον ισχύει ότι $f_X(\mu+x)=f_X(\mu-x),\quad x\in\Re.$ Η f_X μεγιστοποιείται στο σημείο $x_0=\mu$ και τα σημεία καμπής της είναι τα $x_1=\mu-\sigma$ και $x_2=\mu+\sigma.$ Επιπλέον ισχύει ότι $f'_X(x)=-\dfrac{x-\mu}{\sigma^2}f_X(x)$ και $f''_X(x)=\dfrac{1}{\sigma^2}\left[\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2-1\right]f_X(x),$ για κάθε $x\in\Re.$ Αν $\mu=0$ και $\sigma^2=1,$ τότε $X\sim N(0,1)$ και η X είναι μία **τυπική** (standard, unit) **κανονική τυχαία μεταβλητή** ή μία **τυποποιημένη κανονική τυχαία μεταβλητή**. Εναλλακτικά λέμε ότι η X ακολουθεί την **τυπική κανονική** ή την **τυποποιημένη κανονική κατανομή**. Αν $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ τότε η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt$ της X δεν μπορεί να βρεθεί σε κλειστή μορφή. Για τη τυχαία μεταβλητή $X\sim N(0,1),$ οι τιμές της συνάρτησης κατανομής της, Φ_X δηλαδή της συνάρτησης $\Phi_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi_X(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$ $x\in\Re,$ όπου ϕ_X είναι η σ.π. της $X,$ βρίσκονται σε κατάλληλους πίνακες τιμών (βλέπε βιβλίο Μ. Κούτρα, Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Μέρος Ι, σελ. 398). Η κανονική κατανομή είναι η πιο σπουδαία κατανομή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και στη Στατιστική. Είναι κατάλληλη για την περιγραφή πληθυσμιακών χαρακτηριστικών (π.χ. ύψος, βάρος) και για την πιθανοθεωρητική περιγραφή των τυχαίων σφαλμάτων σε διάφορες πειραματικές μετρήσεις. Ισχύει η ακόλουθη σημαντική πρόταση.

Πρόταση 2.1 Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$

Απόδειξη. Έχουμε $F_Z(z) = P(Z \le z) = P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \le z\right) = P(X \le \sigma z + \mu) = F_X(\sigma z + \mu).$ Παραγωγίζουμε ως προς z και διαδοχικά έχουμε $f_Z(z) = F_Z^{'}(z) = \dfrac{d}{dz} F_X(\sigma z + \mu) = \sigma f_X(\sigma z + \mu) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Rightarrow Z \sim N(0,1).$ ■

Παράδειγμα 2.15 Έστω τυχαία μεταβλητή $X \sim N(5, 2).$ Να βρεθεί η πιθανότητα $P(1 < X < 3).$

Λύση. Χρησιμοποιούμε την Πρόταση 2.1 και έχουμε

$$P(1 < X < 3) = P\left(\frac{1-5}{\sqrt{2}} < Z = \frac{X-5}{\sqrt{2}} < \frac{3-5}{\sqrt{2}}\right) = \Phi_Z\left(\frac{3-5}{\sqrt{2}}\right) - \Phi_Z\left(\frac{1-5}{\sqrt{2}}\right),$$

διότι η τυχαία μεταβλητή $Z \sim N(0,1).$

Πρόταση 2.2 Αν $X \sim N(0,1),$ τότε $\Phi_X(x) + \Phi_X(-x) = 1, \ \ x \in \Re.$

Απόδειξη. Αν θέσουμε $u = -t$ διαδοχικά έχουμε

$$\Phi_X(x) + \Phi_X(-x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} (-1) du$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1. \ ■$$

Παράδειγμα 2.16 Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P\left(-1 \le Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \le 1\right) = \Phi_Z(1) - \Phi_Z(-1)$

$= \Phi_Z(1) - (1 - \Phi_Z(1)) = 2\Phi_Z(1) - 1 = 2 \cdot 0.84 - 1 = 0.68.$

Σύμφωνα με το παραπάνω παράδειγμα, το 68% του χωρίου της κανονικής κωδωνοειδούς καμπύλης βρίσκεται ανάμεσα στα όρια $\mu - \sigma$ και $\mu + \sigma$. Ο αριθμός z για τον οποίον $P(Z > z) = \alpha, \ \ 0 < \alpha < 1,$ καλείται $\alpha -$ **ποσοστιαίο σημείο (ή ποσοστημόριο)** της κανονικής κατανομής και συμβολίζεται με z_α.

Παράδειγμα 2.17 Αν $Z \sim N(0,1)$ να βρεθεί ο z τέτοιος ώστε $P(Z > z) = \alpha, \ \ 0 < \alpha < 1.$

Λύση. Είναι $P(Z > z) = 1 - P(Z \le z) = 1 - \Phi(z) = \alpha.$ Άρα, $\Phi(z) = 1 - \alpha.$ Για $\alpha = 0.01, \ \Phi(z) = 0.99.$ Από τους πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής $z \cong 2.33.$ Για $\alpha = 0.05, \ \Phi(z) = 0.95.$ Από τους πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής $z \cong 1.64.$ Για $\alpha = 0.1, \ \Phi(z) = 0.9.$ Από τους πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής $z \cong 1.28.$ Επιπλέον, αν $Z \sim N(0,1),$ από τους πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής, έχουμε

$P(-1 \le Z \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826 \cong 68\%.$

$P(-2 \le Z \le 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 2(0.9772) - 1 = 0.9544 \cong 95\%.$

$P(-3 \le Z \le 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 2(0.9987) - 1 = 0.9974 \cong 99.7\%.$

Επιπλέον, αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε, από την Πρόταση 2.1, έχουμε

$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P(|X - \mu| \le \sigma) = P(-1 \le Z \le 1).$

Επομένως, περίπου το 68% των τιμών ενός κανονικού πληθυσμού βρίσκεται σε απόσταση το πολύ μιας τυπικής απόκλισης σ από τη μέση τιμή $\mu,$ περίπου 95% βρίσκεται σε απόσταση δύο τυπικών αποκλίσεων από τη μέση τιμή και περίπου 99% βρίσκεται σε απόσταση τριών τυπικών αποκλίσεων από τη μέση τιμή.

Παράδειγμα 2.18 Η εσωτερική διάμετρος (σε ίντσες) των σωλήνων από χαλκό που παράγει ένα εργοστάσιο ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(10, \sigma^2)$. Σωλήνες με εσωτερική διάμετρο εκτός των ορίων 10 ± 0.1 ίντσες ανακυκλώνονται. (α) Αν $\sigma = 0.1$ να βρεθεί η πιθανότητα να ανακυκλωθούν ακριβώς τρεις σωλήνες σε ένα δείγμα πέντε σωλήνων που επιλέγεται τυχαία από την παραγωγή του εργοστασίου. (β) Πόση θα πρέπει να γίνει η παράμετρος σ^2 έτσι ώστε η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα να είναι 0.06;

Λύση. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά την εσωτερική διάμετρο των σωλήνων.

Τότε $X \sim N(10, \sigma^2)$. Η πιθανότητα ανακύκλωσης των σωλήνων είναι

$p = P(X > 10.1 \text{ ή } X < 9.9) = 1 - P(9.9 < X < 10.1)$

$$= 1 - P\left(\frac{9.9 - 10}{\sigma} < \frac{X - 10}{\sigma} < \frac{10.1 - 10}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) + \Phi\left(-\frac{0.1}{\sigma}\right) = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)\right].$$

(α) Η πιθανότητα ανακύκλωσης είναι $p = 2[1 - \Phi(1)] = 2[1 - 0.8413] = 0.3174.$ Έστω Y η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των σωλήνων από το δείγμα των πέντε σωλήνων που ανακυκλώνονται. Ισχύει ότι $Y \sim Bin(n = 5, p = 0.3174).$ Τότε $P(Y = 3) = \binom{5}{3}(0.3174)^3(1 - 0.3174)^2 \cong 0.149.$

(β) Θα πρέπει $p = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)\right) = 0.06 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) = 0.97 \cong \Phi(1.88).$ Άρα, $\frac{0.1}{\sigma} = 1.88 \Rightarrow \sigma = 0.053.$

$\sigma^2 = 0.002809.$

2.5 Προτάσεις, εφαρμογές και προβλήματα

Πρόταση 2.3 Αν X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π. f_X και $Y = X^2$ τότε η σ.π. f_Y της Y δίνεται

από τη σχέση $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X\left(\sqrt{y}\right) + f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right], & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$

Απόδειξη. Η συνάρτηση κατανομής της Y είναι

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=\begin{cases}P\left(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right), & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}F_X\left(\sqrt{y}\right)-F_X\left(-\sqrt{y}\right), & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$. Παραγωγίζοντας ως προς y έχουμε

$$f_Y(y)=F_Y^{'}(y)=\begin{cases}f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}-f_X\left(-\sqrt{y}\right)(-1)\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right], & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

Μία εφαρμογή της παραπάνω πρότασης έχουμε στην ακόλουθη εφαρμογή.

Εφαρμογή 2.1 Αν $X\sim N(0,1)$ τότε $Y=X^2\sim X_1^2$.

Είναι $f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X\left(\sqrt{y}\right)-f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right]=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}y^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}},\quad y>0.$

Η τελευταία ισότητα δίνει τη συνάρτηση πυκνότητας της X_1^2.

Πρόταση 2.4 Έστω ότι F_X είναι η συνάρτηση κατανομής της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X. Τότε η τυχαία μεταβλητή $Y:=F_X(X)\sim U(0,1)$.

Απόδειξη. Είναι $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F_X(X)\le y)=\begin{cases}0, & y<0\\ P(X\le F_X^{-1}(y))=F_X(F_X^{-1}(y))=y, & 0<y<1.\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$

Μία εφαρμογή της παραπάνω πρότασης έχουμε στην περίπτωση κατά την οποία $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. Τότε $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\sim U(0,1)$, όπου $\Phi(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής. ■

Πρόβλημα 2.1 Αν $X\sim N(0,1)$ βρείτε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $Y=e^X$.

Λύση. Είναι $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=\begin{cases}0, & y<0\\ P(X\le\log(y))=F_X(\log(y)), & y\ge 0\end{cases}$.

Άρα, $f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_X(\log(y))=\frac{1}{y}f_X(\log(y))=\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\log(y))^2}{2}},\quad y>0.$

Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Y καλείται λογαριθμοκανονική (lognormal).

Πρόβλημα 2.2 Επαληθεύσατε ότι οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$, $x\in\Re$ και $g(x)=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$, $x\in\Re$ είναι συναρτήσεις πυκνότητας.

Λύση. Είναι $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{\infty}^{0}-\dfrac{dt}{(1+t^2)}=-\left[\dfrac{1}{1+t}\right]_0^{\infty}=1$. Η πρώτη ισότητα προκύπτει αν θέσουμε $t=e^{-x}$.

Είναι $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{dt}{1+t^2}=\dfrac{2}{\pi}\left[\tau o\xi\varepsilon\phi(t)\right]_0^{\infty}=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\pi}{2}=1$. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει αν θέσουμε $t=e^x$.

Πρόβλημα 2.3 Αν X ~ Poisson(λ), $\lambda>0$, δείξτε ότι η πιθανότητα να πάρει η τυχαία μεταβλητή X άρτια τιμή είναι ίση με ${(1+e^{-2\lambda})}/{2}$.

Λύση. $P($η X παίρνει άρτια τιμή$)=P\left[\bigcup\limits_{x=0}^{\infty}\{X=2x\}\right]=\sum\limits_{x=0}^{\infty}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{2x}}{(2x)!}=e^{-\lambda}\left(\dfrac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})$.

2.6 Μέση τιμή

Στα δύο επόμενα εδάφια θα μελετήσουμε συγκεκριμένες ποσότητες που προκύπτουν από τη συνάρτηση πιθανότητας (ή πυκνότητας) ή τη συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής, καλούνται **παράμετροι** (parameters) και δίνουν μία συνοπτική περιγραφή της συμπεριφοράς της τυχαίας μεταβλητής. Δίνουν κάποιες ενδείξεις για τη θέση και το σχήμα της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής. Η πρώτη παράμετρος που θα μελετήσουμε είναι η **μέση τιμή** (mean) η οποία αποτελεί για τη Θεωρία Πιθανοτήτων το ανάλογο του μέσου όρου ή του αριθμητικού μέσου μιας ακολουθίας αριθμών. Δίνει μία ένδειξη για τη θέση γύρω από την οποία είναι τοποθετημένες οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής. Για το λόγο αυτό συχνά καλείται **μέτρο θέσης** της αντίστοιχης κατανομής.

Ορισμός 2.3 Η **μέση τιμή (ή μέσος ή μαθηματική ελπίδα ή αναμενόμενη τιμή)** μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως εξής: (α) $E(X)=\sum\limits_{x}xP(X=x)$, αν $\sum\limits_{x}|x|P(X=x)<\infty$ και η X είναι διακριτή.

(β) $E(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx$, αν $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|\,f_X(x)dx<\infty$ και η X είναι συνεχής.

Παράδειγμα 2.19 Έστω $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Είναι $EX = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$

$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$ Η πέμπτη ισότητα προκύπτει αν θέσουμε $y = x - 1$.

Παράδειγμα 2.20 Έστω $X \sim U(a,b)$. Είναι $\int_a^b |x| \frac{1}{b-a} dx \le \max[|a|,|b|] < \infty$.

$EX = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.$

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής δεν υπάρχει πάντα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η κατανομή Pareto η οποία, μεταξύ άλλων, χρησιμοποιείται αρκετά συχνά για την περιγραφή του εισοδήματος, του μεγέθους ενός πληθυσμού (βλέπε Παράδειγμα 6.3.1 στο βιβλίο Μ. Κούτρα, Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Μέρος Ι, σελ. 353-354). Ισχύει η ακόλουθη σημαντική πρόταση η οποία παρατίθεται χωρίς απόδειξη (για την απόδειξη βλέπε βιβλίο Hoel, Port, Stone, Μετάφραση: Απόστολος Γιαννόπουλος, Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων, σελ. 102-103).

Πρόταση 2.5 Έστω μία τυχαία μεταβλητή X και μία συνάρτηση $g:\Re \to \Re$ τέτοια ώστε η $g(X)$ να είναι επίσης μία τυχαία μεταβλητή. Τότε (α) $E(g(X)) = \sum_x g(x)P(X=x)$, αν $\sum_x |g(x)|\,P(X=x) < \infty$ και η X είναι διακριτή (β) $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$, αν $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, f_X(x)dx < \infty$ και η X είναι συνεχής.

Πρόταση 2.6 Ισχύει ότι $E(aX+b) = aEX + b,\ \ a,b \in \Re$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει στην περίπτωση που η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Είναι $E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f_X(x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = aEX + b.$ ■

Πρόταση 2.7 Αν $X = c$, τότε $EX = c$.

Απόδειξη. Έστω ότι η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή. Είναι $EX = \sum_x xP(X=x) = c\sum_x P(X=x) = c.$ ■

Πρόταση 2.8 Ισχύει ότι $|EX| \le E|X|$.

Απόδειξη. Είναι $-|X| \le X \le |X| \Rightarrow |X| - X \ge 0$ και $|X| + X \ge 0.$

Επομένως, $E\{|X| - X\} \ge 0$ και $E\{|X| + X\} \ge 0.$

Άρα, $\int_{-\infty}^{\infty} (|x| - x) f_X(x)dx \ge 0$ και $\int_{-\infty}^{\infty} (|x| + x) f_X(x)dx \ge 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, f_X(x)dx \ge \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$ και $\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \ge -\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, f_X(x)dx$

$E|X| \ge EX$ και $EX \ge -E|X|$. Άρα, $-E|X| \le EX \le E|X|$ και συνεπώς, $|EX| \le E|X|$. ■

2.7 Ροπές τυχαίων μεταβλητών

Οι ροπές (moments) μιας τυχαίας μεταβλητής, που θα ορίσουμε στο παρόν εδάφιο, παρέχουν επιπρόσθετες χρήσιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά μιας τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 2.4 (Ροπή $k-$τάξεως). Έστω X μία τυχαία μεταβλητή. Η **ροπή $k-$τάξεως**, $k = 1, 2, \ldots$ της X ή της κατανομής της είναι η ποσότητα $\mu_k := EX^k$ ή ισοδύναμα $\mu_k = \sum_x x^k P(X = x),$ αν η X είναι διακριτή, $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx,$ αν η X είναι συνεχής.

Παρατηρούμε ότι για $k = 1,$ $\mu_1 = EX$, δηλαδή η ροπή πρώτης τάξεως συμπίπτει με τη μέση τιμή της X.

Ορισμός 2.5 (Κεντρική ροπή $k-$τάξεως). Έστω X μία τυχαία μεταβλητή. Η **κεντρική ροπή** (central moment) $k-$**τάξεως**, $k = 1, 2, \ldots$ της X ή της κατανομής της είναι η ποσότητα $\mu_k' := E(X - EX)^k$, ή ισοδύναμα $\mu_k' = \sum_x (x - E(X))^k P(X = x),$ αν η X είναι διακριτή, $\mu_k' = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^k f_X(x)dx,$ αν η X είναι συνεχής.

Για $k = 2,$ η κεντρική ροπή δευτέρας τάξεως της X καλείται **διασπορά (ή διακύμανση)** (variance) της X και γράφουμε $\mu_2' := Var(X) = \sigma^2$. Η διασπορά δίνει ένα μέτρο της διάχυσης της κατανομής της X γύρω από τη μέση τιμή της. Όσο περισσότερο αποκλίνει η X από τη μέση τιμή της τόσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά $(X - EX)^2$ άρα και η διασπορά. Η ποσότητα $\alpha = \frac{\mu_3'}{\sigma^3}$ είναι γνωστή ως **μέτρο ασυμμετρίας** της X, διότι δείχνει πόσο συμμετρική $(\alpha=0)$ ή ασύμμετρη $(\alpha>0$ ή $\alpha<0)$ είναι η σ.π. της X. Η ποσότητα $\beta=\dfrac{\mu_4^{'}}{\sigma^4}$ είναι γνωστή ως **μέτρο κύρτωσης** διότι δείχνει πόσο επίπεδη ή μη είναι η σ.π. της X. Όταν η X είναι μία κανονική τυχαία μεταβλητή τότε $\beta=3$. Για $\beta>3$ η σ.π. έχει πιο οξεία μορφή από την κανονική κατανομή ενώ για $\beta<3$ είναι πιο επίπεδη.

Παράδειγμα 2.21 Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού. Η ροπή τρίτης τάξεως της X είναι $\mu_3=EX^3=\sum_{x=1}^{6}x^3P(X=x)=\sum_{x=1}^{6}x^3\dfrac{1}{6}=\dfrac{21^2}{6}$.

Πρόταση 2.9 Ισχύει ότι $Var(X)=EX^2-(EX)^2$.

Απόδειξη. Είναι $\mu_2^{'}=Var(X)=E(X-\mu_1)^2=E\left[X^2-2\mu_1X+\mu_1^2\right]=EX^2-2\mu_1EX+\mu_1^2$ $=\mu_2-\mu_1^2$. Άρα, $\mu_2^{'}=\mu_2-\mu_1^2$ ή ισοδύναμα $Var(X)=EX^2-(EX)^2$. ■

Ο τύπος της Πρότασης 2.9 είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τον υπολογισμό της διασποράς τυχαίων μεταβλητών.

Παράδειγμα 2.22 Έστω $X\sim \text{Bernoulli}(p),\ \ p\in[0,1]$. Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της X.

Λύση. Είναι $EX=\sum_{x=0}^{1}xP(X=x)=0(1-p)+1p=p$. $EX^2=\sum_{x=0}^{1}x^2P(X=x)=0(1-p)+1^2p=p$.

Άρα, $Var(X)=EX^2-(EX)^2=p-p^2=p(1-p)$.

Παράδειγμα 2.23 Έστω $X\sim \text{Εκθετική}(\lambda),\ \lambda>0$. Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της X.

Λύση. Είναι $EX=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^\infty x(e^{-\lambda x})'dx=-\left[xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=0-\dfrac{1}{\lambda}\int_0^\infty (e^{-\lambda x})'dx=-\left[\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty=\dfrac{1}{\lambda}$.

$$EX^2=\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^\infty x^2(e^{-\lambda x})'dx=-\left[x^2e^{-\lambda x}\right]_0^\infty+2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx=0+\frac{2}{\lambda^2}.$$

Άρα, $Var(X)=EX^2-(EX)^2=\dfrac{2}{\lambda^2}-\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Παράδειγμα 2.24 Έστω $X\sim \text{Poisson}(\lambda),\ \lambda>0$. Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της X.

Λύση. Είναι $EX=\sum_{x=0}^{\infty}xe^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}x\dfrac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^x}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^n}{n!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$.

Η πέμπτη ισότητα προκύπτει αν θέσουμε $n = x-1$.

$$EX^2 = E\big[X(X-1)\big] + EX = \lambda + \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \lambda + \sum_{x=2}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{(x-2)!}$$

$$= \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda + \lambda^2.$$

Η πέμπτη ισότητα προκύπτει αν θέσουμε $n = x-2$.

Άρα, $Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \lambda.$

Παράδειγμα 2.25 Έστω $X \sim N(0,1)$. Η σ.π. της X δίνεται από τον τύπο $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \Re$. Δείξτε ότι $\mu_k = 0$, αν k περιττός.

Λύση. Είναι $\mu_k = EX^k = \int_{-\infty}^{0} x^k f_X(x)dx + \int_{0}^{\infty} x^k f_X(x)dx.$ Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $u = -x$ στο πρώτο ολοκλήρωμα. Θα έχουμε $\mu_k = -\int_{\infty}^{0}(-u)^k f_X(-u)du + \int_{0}^{\infty} x^k f_X(x)dx = -\int_{0}^{\infty} u^k f_X(u)du + \int_{0}^{\infty} x^k f_X(x)dx = 0.$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει διότι k περιττός και f_X άρτια συνάρτηση.

Θεωρούμε μία τυχαία μεταβλητή X και τις πραγματικές σταθερές a, b. Ισχύει η ακόλουθη σημαντική πρόταση.

Πρόταση 2.10 (Διασπορά γραμμικού συνδυασμού). $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$.

Απόδειξη. Είναι $Var(aX+b) = E(aX+b)^2 - \big[E(aX+b)\big]^2$

$$= E(a^2X^2 + b^2 + 2abX) - (aEX+b)^2 = a^2EX^2 + b^2 + 2abEX - a^2(EX)^2 - b^2 - 2abEX$$

$$= a^2\big[EX^2 - (EX)^2\big] = a^2 Var(X).\ \blacksquare$$

2.8 Ανισότητες ροπών και πιθανοτήτων

Όταν υπάρχουν δυσκολίες στον υπολογισμό πιθανοτήτων ή ροπών κάποιων τυχαίων μεταβλητών μπορούμε να υπολογίσουμε κάποια φράγματα αυτών των τιμών με τη βοήθεια κατάλληλων ανισοτήτων.

Πρόταση 2.11 (Ανισότητα του Markov). Έστω μία μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή X και μία σταθερά $c > 0$. Για οποιαδήποτε τιμή του c, ισχύει ότι $P[X \ge c] \le \frac{E[X]}{c}$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε την ανισότητα για την περίπτωση κατά την οποία η X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π. f_X. Ισχύει ότι

$$E[X]=\int_0^{\infty} x f_X(x)dx=\int_0^{c} x f_X(x)dx+\int_c^{\infty} x f_X(x)dx \geq \int_c^{\infty} x f_X(x)dx \geq \int_c^{\infty} c f_X(x)dx = c\int_c^{\infty} f_X(x)dx = cP[X\geq c]. \ \blacksquare$$

Πρόταση 2.12 (Ανισότητα του Chebyshev). Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ και πεπερασμένη διασπορά σ^2. Τότε για κάθε πραγματικό αριθμό $c>0,$ ισχύει ότι $P\left(|X-\mu|\geq c\right)\leq \frac{\sigma^2}{c^2}.$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την ανισότητα του Markov για τη μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή $(X-\mu)^2$ και τον αριθμό c^2. Έχουμε ότι $P\left((X-\mu)^2\geq c^2\right)\leq \frac{E(X-\mu)^2}{c^2}=\frac{\sigma^2}{c^2}.$ Επειδή η ανισότητα $(X-\mu)^2\geq c^2$ είναι ισοδύναμη με την $|X-\mu|\geq c,$ έπεται ότι η ανισότητα $P\left(|X-\mu|\geq c\right)\leq \frac{\sigma^2}{c^2}$ ισχύει. ■

Οι ανισότητες των Markov και Chebyshev παρέχουν κάποια φράγματα για την κατανομή της X όταν είναι γνωστή η μέση τιμή και η διασπορά της. Η ανισότητα του Chebyshev δίνει ένα φράγμα, συναρτήσει της διασποράς της X και της σταθεράς $c,$ για την πιθανότητα η X να αποκλίνει από τη μέση τιμή της περισσότερο από $c.$ Δεν υποθέτει τίποτε άλλο για την κατανομή της X παρά μόνο το ότι έχει πεπερασμένη διασπορά.

Παράδειγμα 2.26 Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των ηλεκτρικών λαμπτήρων που παράγονται από ένα εργοστάσιο κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας είναι μία τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu=50.$ (α) Κάντε μία εκτίμηση για την πιθανότητα η παραγωγή των ηλεκτρικών λαμπτήρων κατά τη διάρκεια αυτής της εβδομάδας να ξεπεράσει τον αριθμό 75. (β) Αν η διασπορά της εβδομαδιαίας παραγωγής των ηλεκτρικών λαμπτήρων βρέθηκε ίση με 25 κάντε μία εκτίμηση για την πιθανότητα η εβδομαδιαία παραγωγή των λαμπτήρων να είναι μεταξύ των αριθμών 40 και 60.

Λύση. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που αναπαριστά τον αριθμό των ηλεκτρικών λαμπτήρων που παράγονται κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας.

(α) Από την ανισότητα του Markov, έχουμε $P\{X\geq 75\}\leq \frac{E[X]}{75}=\frac{2}{3}.$

(β) Από την ανισότητα του Chebyshev, έχουμε $P\{|X-50|\geq 10\}\leq \frac{\sigma^2}{10^2}=\frac{25}{10^2}=\frac{1}{4}.$ Επομένως,

$P\{|X-50|<10\} \geq 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Συνεπώς η πιθανότητα η εβδομαδιαία παραγωγή των ηλεκτρικών λαμπτήρων να είναι μεταξύ των αριθμών 40 και 60 είναι τουλάχιστον ίση με 0.75.

Είναι σαφές ότι αν είναι γνωστή η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X, οι πιθανότητες του παραπάνω παραδείγματος θα μπορούσαν να υπολογιστούν με ακρίβεια και δεν θα ήταν απαραίτητη η χρήση των ανισοτήτων Markov και Chebyshev.

Πρόταση 2.13 (Η ανισότητα του Schwarz). Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξεως. Τότε ισχύει ότι $[E(XY)]^2 \leq [E(X^2)][E(Y^2)]$. Επιπλέον η ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν είτε $P(Y=0)=1$ ή $P(X=cY)=1$, για κάποια σταθερά c.

Απόδειξη. Αν $P(Y=0)=1$, τότε $P(XY=0)=1$ επομένως $E(XY)=0$ και $E(Y^2)=0$. Σε αυτή την περίπτωση η ανισότητα του Schwarz ισχύει ως ισότητα. Επίσης, αν $P(X=cY)=1$, τότε και τα δύο μέλη της ανισότητας είναι ίσα με $c^2[E(Y^2)]^2$. Συνεπώς και σε αυτή την περίπτωση η ανισότητα του Schwarz ισχύει ως ισότητα. Για το υπόλοιπο της απόδειξης υποθέτουμε ότι $P(Y=0)<1$. Επομένως, $E(Y^2)>0$. Για κάθε πραγματικό αριθμό λ ισχύει ότι $0 \leq E(X-\lambda Y)^2 = \lambda^2 E(Y^2) - 2\lambda E(XY) + E(X^2)$. Η τελευταία ισότητα είναι μία τετραγωνική συνάρτηση του λ. Αφού $E(Y^2)>0$ η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης επιτυγχάνεται για κάποια τιμή του λ που υπολογίζεται αν θέσουμε την παράγωγο ίση με μηδέν και επιλύσουμε. Μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε ότι η τιμή του λ που μηδενίζει την παράγωγο είναι ίση με $\lambda^* = [E(XY)][E(Y^2)]^{-1}$. Για την τιμή του λ^*, μετά από πράξεις, καταλήγουμε ότι η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης, είναι $E(X-\lambda^* Y)^2 = E(X^2) - \frac{[E(XY)]^2}{E(Y^2)}$.
Επειδή $E(X-\lambda^* Y)^2 \geq 0$, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■