ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΠΙΘΑΝΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ, ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Οι ροπές μιας τυχαίας μεταβλητής X μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια κατάλληλων συναρτήσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις πιθανογεννήτριες, τις ροπογεννήτριες και τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Επιπλέον, θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των ροπών μιας τυχαίας μεταβλητής X. Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε μία ακόμη εφαρμογή αυτών των συναρτήσεων στην εύρεση της κατανομής του αθροίσματος δύο ή περισσότερων ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

3.1 Πιθανογεννήτριες

Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει μη-αρνητικές ακέραιες τιμές. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.1 (Πιθανογεννήτρια). Η **πιθανογεννήτρια** (probability generating function) η_X (ή P_X) μιας τυχαίας μεταβλητής X, ορίζεται ως εξής: $\eta_X(t) = P_X(t) = E(t^X) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X = x)t^x = \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x)t^x$, όπου f_X είναι η συνάρτηση πιθανότητας της X.

Για $-1 \le t \le 1$, ισχύει ότι $\sum_{x=0}^{\infty} |t^x f_X(x)| = \sum_{x=0}^{\infty} |t^x| f_X(x) \le \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = 1$. Επομένως η πιθανογεννήτρια συγκλίνει πάντοτε και μάλιστα απόλυτα στο διάστημα $[-1,1]$. Μπορούμε να παραγωγίσουμε την πιθανογεννήτρια οσεσδήποτε φορές παραγωγίζοντας τη δυναμοσειρά όρο προς όρο.

Έχουμε $\eta'_X(t) = \sum_{x=1}^{\infty} x f_X(x) t^{x-1}$ και $\eta''_X(t) = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) f_X(x) t^{x-2}$, $-1 \le t \le 1$.

Θέτοντας $t = 1$ στις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει

$\eta'_X(1) = \sum_{x=1}^{\infty} x f_X(x) = EX$ και $\eta''_X(1) = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) f_X(x) = E[X(X-1)]$.

Επομένως, η μέση τιμή και η διασπορά της X προσδιορίζονται από την πιθανογεννήτρια η_X μέσω των τύπων $EX = \eta'_X(1)$ και $\Delta X = EX^2 - (EX)^2 = E[X(X-1)] + EX - (EX)^2 = \eta''_X(1) + \eta'_X(1) - (\eta'_X(1))^2$. Η ποσότητα $E[X(X-1)]$ καλείται **παραγοντική ροπή δευτέρας τάξεως της** X. Ανάλογοι τύποι που χρησιμοποιούν παραγώγους ανώτερης τάξεως της η_X για $t=1$ δίνουν τις παραγοντικές ροπές ανώτερης τάξεως της X. Μπορούμε να υπολογίσουμε την παραγοντική ροπή $r-$τάξεως της X από την πιθανογεννήτρια της, η_X.

Ισχύει ότι: $\dfrac{d^r}{dt^r}\eta_X(t)=\dfrac{d^r}{dt^r}E(t^X)=E\left(\dfrac{d^r}{dt^r}t^X\right)=E[X(X-1)\cdots(X-r+1)t^{X-r}]$ (3.1)

Στη δεύτερη ισότητα υποθέτουμε ότι η εναλλαγή των $\dfrac{d^r}{dt^r}$ και E είναι επιτρεπτή.

Επομένως, ισχύει ότι: $\eta_X^{(r)}(t)=P_X^{(r)}(t)=\sum_{x=r}^{\infty}x(x-1)\cdots(x-r+1)t^{x-r}f_X(x),\ \ r=1,2,\ldots.$

Για $t=1$ η σχέση (3.1) γράφεται ως εξής: $\left.\dfrac{d^r}{dt^r}\eta_X(t)\right|_{t=1}=E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]$. Το δεξιό μέλος της τελευταίας ισότητας καλείται **παραγοντική ροπή $r-$τάξεως** της τυχαίας μεταβλητής X.

Η επόμενη πρόταση είναι πολύ σημαντική και παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 3.1 Η πιθανογεννήτρια μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής προσδιορίζει μονοσήμαντα την κατανομή της, δηλαδή αν X, Y είναι δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές με πιθανογεννήτριες η_X και η_Y αντίστοιχα και ισχύει ότι $\eta_X(t)=\eta_Y(t)$, για $-1\le t\le 1$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την ίδια κατανομή.

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η παραπάνω πρόταση είναι πολύ χρήσιμη για την εύρεση της κατανομής του αθροίσματος πεπερασμένου πλήθους ανεξάρτητων διακριτών τυχαίων μεταβλητών.

Παράδειγμα 3.1 Μία διακριτή τυχαία μεταβλητή έχει σ.π. $f(x)=c2^{-x},\ \ x=0,1,2,3,4.$

(α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

(β) Να υπολογιστεί η πιθανογεννήτρια $P_X(t)$ της X.

(γ) Να βρεθεί η μέση τιμή και η παραγοντική ροπή δευτέρας τάξεως $E[X(X-1)]$ της X.

(δ) Να βρεθεί η διακύμανση της X.

Λύση. (α) Από τη συνθήκη $\sum_{x=0}^{4}f_X(x)=1$ έπεται ότι $c={}^{16}\!/_{31}$.

(β) Διαδοχικά έχουμε $P_X(t)=E(t^X)=\dfrac{16}{31}\sum_{x=0}^{4}\left(\dfrac{t}{2}\right)^x=\dfrac{16}{31}\dfrac{1-\left(\dfrac{t}{2}\right)^5}{1-\dfrac{t}{2}}=\dfrac{32-t^5}{31(2-t)},\ t\neq 2.$

(γ) Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $P_X(t)$ δύο φορές έχουμε

$P_X^{'}(t)=\dfrac{4t^5-10t^4+32}{31(2-t)^2}$ και $P_X^{''}(t)=\dfrac{-12t^5+60t^4-20t^3+64}{31(2-t)^2}$.

Επομένως, $E(X)=P_X^{'}(1)=\dfrac{26}{31}$, $E[X(X-1)]=P_X^{''}(1)=\dfrac{32}{31}$.

(δ) Έχουμε $\Delta(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E[X(X-1)]+E(X)-(E(X))^2=\dfrac{1122}{961}$.

3.2 Ροπογεννήτριες

Η ροπογεννήτρια είναι μία ακόμη συνάρτηση που χρησιμεύει για τον υπολογισμό όλων των ροπών $k-$τάξεως μ_k, $k=1,2,\ldots$ μιας τυχαίας μεταβλητής X.

Ορισμός 3.2 (Ροπογεννήτρια). Η **ροπογεννήτρια** (moment generating function) $M_X(t)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι η πραγματική συνάρτηση με τύπο $M_X(t)=E(e^{tX})$ για κάθε t που ανήκει σε ένα διάστημα της μορφής $(-\delta,\delta),\delta>0$. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή με φορέα S_X και συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x)$, η ροπογεννήτρια της X θα δίνεται από τον τύπο $M_X(t)=\sum_{x\in S_X}e^{tx}f_X(x)$, $|t|<\delta$, ενώ, αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, η ροπογεννήτρια της X θα δίνεται από τον τύπο $M_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f_X(x)dx$, $|t|<\delta$.

Σημειώνουμε ότι η ποσότητα $\int_0^{\infty}e^{-tx}f_X(x)dx$ είναι ο **μετασχηματισμός Laplace** της συνάρτησης $f_X(x)$.

Όπως φαίνεται από τον Ορισμό 3.2, η ροπογεννήτρια δεν υπάρχει για κάθε $t\in\Re$ αλλά περιοριζόμαστε σε εκείνες τις τιμές του $t\in\Re$ για τις οποίες υπάρχει σύγκλιση.

Έχουμε $M_X^{'}(t)=\dfrac{d}{dt}E(e^{tX})=E\left(\dfrac{d}{dt}e^{tX}\right)=E\left(Xe^{tX}\right)$, όπου έχουμε υποθέσει ότι μπορούμε να εναλλάξουμε τη θέση των $\dfrac{d}{dt}$ και E. Αυτή η εναλλαγή των θέσεων είναι εν γένει επιτρεπτή. Έχουμε ότι $M_X^{'}(0)=EX$.

Παραγωγίζοντας δύο φορές την $M_X(t)$ έχουμε $M_X^{''}(t)=\dfrac{d^2}{dt^2}E(e^{tX})=\dfrac{d}{dt}E(Xe^{tX})=E\left[\dfrac{d}{dt}(Xe^{tX})\right]=E(X^2e^{tX})$.

Άρα, $M_X^{''}(0)=EX^2$. Στη γενική περίπτωση, η $k-$οστή παράγωγος της ροπογεννήτριας της X δίνεται από τον τύπο $M_X^{(k)}(t)=E(X^ke^{tX})$, από τον οποίο συνεπάγεται ότι $\mu_k=EX^k=M_X^{(k)}(0)$. Συνεπώς, η ροπή $k-$τάξεως μ_k της X είναι ίση με την τιμή της $k-$οστής παραγώγου της $M_X(t)$ στο σημείο $t=0$. Για μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει ακέραιες τιμές ισχύει ότι $M_X(t)=\eta_X(e^t)$. Επιπλέον ισχύει ότι $\eta_X(t)=M_X(\log t),\quad t>0$. Οι δύο τελευταίες ισότητες είναι φανερές συνέπειες των ορισμών της πιθανογεννήτριας και της ροπογεννήτριας. Η επόμενη πρόταση είναι πολύ σημαντική και παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 3.2 Η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή της, δηλαδή αν X,Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές με ροπογεννήτριες $M_X(t),\ M_Y(t),$ αντίστοιχα και αν για κάποιο $\delta>0,$ ισχύει ότι $M_X(t)=M_Y(t),$ για κάθε $t\in(-\delta,\delta),$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την ίδια κατανομή.

Παράδειγμα 3.2 Η ροπογεννήτρια της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο: $M_X(t)=\exp(e^t-1)$. Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X.

Λύση. Είναι $M_X'(t)=e^{e^t-1}e^t$ και $M_X''(t)=e^{e^t-1}e^t(e^t+1)$. Επομένως $E[X]=M_X'(0)=1,\ E[X^2]=M_X''(0)=2.$
$\Delta X=E[X^2]-\left(E[X]\right)^2=2-1^2=1.$

Παράδειγμα 3.3 Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x)=c^x,\ \ x=1,2,\dots,$ όπου c είναι μία πραγματική σταθερά.

(α) Να βρεθεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της X.

(β) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

(γ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διακύμανση της X.

Λύση. (α) $M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}f(x)=\sum_{x=1}^{\infty}(ce^t)^x=\dfrac{ce^t}{(1-ce^t)},\ |ce^t|<1.$

(β) Επειδή $M_X(0)=1$ έχουμε $\dfrac{c}{(1-c)}=1\Rightarrow c=\dfrac{1}{2}$. Επομένως, $M_X(t)=\dfrac{e^t}{2-e^t},\ t<\ln 2.$

(γ) Παραγωγίζοντας δύο φορές τη ροπογεννήτρια βρίσκουμε

$$M_X'(t)=\frac{2e^t}{(2-e^t)^2},\ \ M_X''(t)=\frac{2e^t(2+e^t)}{(2-e^t)^3}.$$

Επομένως, $E[X]=M'(0)=2,\ \ E[X^2]=M_X''(0)=6,\ \ \Delta X=E[X^2]-(E[X])^2=2.$

3.3 Χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις είναι λίγο πιο πολύπλοκες από τις ροπογεννήτριες (και τις πιθανογεννήτριες) διότι στον ορισμό τους εμπλέκονται μιγαδικοί αριθμοί. Έχουν όμως δύο σημαντικά πλεονεκτήματα σε σύγκριση με τις ροπογεννήτριες. Το πρώτο είναι το γεγονός ότι, σε αντίθεση με τις ροπογεννήτριες οι οποίες απαιτούν την ύπαρξη της μέσης τιμής $E(e^{tX})$ για τιμές του t σε κάποιο διάστημα της μορφής $(-\delta,\delta)$, $\delta>0$, οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις υπάρχουν πάντοτε δηλαδή για όλες τις κατανομές και για όλες τις τιμές του $t\in\Re$. Για παράδειγμα, αν η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας $f(x)=x^{-2}$, $x\geq 1$, τότε $M_X(t)=\int_1^{\infty}e^{tx}x^{-2}dx$ και η τελευταία ποσότητα απειρίζεται για όλα τα $t>0$. Συνεπώς, η ροπογεννήτρια της X δεν υπάρχει για $t>0$. Το δεύτερο είναι το γεγονός ότι η συνάρτηση κατανομής αλλά και η συνάρτηση πιθανότητας (ή πυκνότητας) μιας τυχαίας μεταβλητής προκύπτουν από την χαρακτηριστική της συνάρτηση μέσω τύπων αντιστροφής. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.3 (Χαρακτηριστική συνάρτηση). Έστω X μία τυχαία μεταβλητή. Η **χαρακτηριστική συνάρτηση** (characteristic function) $\phi_X(t)$ της X είναι μία συνάρτηση ορισμένη στο $\Re$ με τύπο $\phi_X(t)=E(e^{itX})$. Αν η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x)$, $x=0,1,\ldots$, η χαρακτηριστική της συνάρτηση θα δίνεται από τον τύπο $\phi_X(t)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{itx}f_X(x)$. Αν η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, η χαρακτηριστική της συνάρτηση θα δίνεται από τον τύπο $\phi_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f_X(x)dx.$

Η συνάρτηση $\phi_X(t)$ όπως ορίστηκε στην τελευταία ισότητα είναι γνωστή με την ονομασία **μετασχηματισμός Fourier** της συνάρτησης $f_X(x)$.

Σ' αυτό το σημείο θα ανακεφαλαιώσουμε κάποια βασικά στοιχεία της θεωρίας των μιγαδικών αριθμών. Κάθε μιγαδικός αριθμός z μπορεί να γραφεί στη μορφή $z=x+iy$, όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί και i είναι τέτοιο ώστε $i^2=-1$. Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού z είναι $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Θέτουμε $z=it$, όπου t είναι ένας πραγματικός αριθμός. Ισχύει ότι

$$e^{it}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}=\left(1+it-\frac{t^2}{2!}-\frac{it^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{it^5}{5!}-\cdots\right)=\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots\right).$$

Οι δύο δυναμοσειρές στις δύο παρενθέσεις της τελευταίας παράστασης είναι τα αναπτύγματα των $\cos t$ και $\sin t$, αντίστοιχα. Επομένως, $e^{it}=\cos t+i\sin t$ και $|e^{it}|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$.

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή και t μία πραγματική σταθερά. Τότε $|e^{itX}|=1.$ Επομένως η συνάρτηση e^{itX} έχει πεπερασμένη μέση τιμή και η χαρακτηριστική συνάρτηση της X, $\phi_X(t)=E(e^{itX}), t\in\Re$ είναι καλά ορισμένη. Ισχύει ότι $\phi_X(0)=E(e^0)=E(1)=1.$ Για κάθε $t\in\Re$, έχουμε

$$|\phi_X(t)|=|E(e^{itX})|\leq E|e^{itX}|=E(1)=1.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι συνέπεια της Πρότασης 2.8. Συνεπώς, οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις είναι πεπερασμένες για κάθε t, ενώ οι ροπογεννήτριες δεν είναι εν γένει πεπερασμένες για κάθε t, διότι η συνάρτηση e^{it} είναι φραγμένη για κάθε t, ενώ η συνάρτηση e^t δεν είναι φραγμένη για κάθε $t\in\Re$.

Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει πεπερασμένη ροπή $r-$τάξεως. Τότε η $r-$οστή παράγωγος $\phi_X^{(r)}(t)$ της χαρακτηριστικής συνάρτησης υπάρχει και υπολογίζεται ως εξής:

$$\phi_X^{(r)}(t)=\frac{d^r}{dt^r}E(e^{itX})=E\left(\frac{d^r}{dt^r}e^{itX}\right)=E(i^rX^re^{itX}).$$

Αν στις παραπάνω ισότητες θέσουμε $t=0$, έχουμε $\phi_X^{(r)}(0)=E(i^rX^r)=i^rE(X^r)\Rightarrow E(X^r)=i^{-r}\phi_X^{(r)}(0).$ Η τελευταία σχέση μας δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού των ροπών $r-$τάξεως για μία τυχαία μεταβλητή X, αν είναι γνωστή η χαρακτηριστική της συνάρτηση.

Έστω δ ένας θετικός πραγματικός αριθμός και έστω μία τυχαία μεταβλητή X της οποίας η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ είναι πεπερασμένη σε κάποιο διάστημα της μορφής $(-\delta,\delta)$. Τότε $\phi_X(t)=E(e^{itX})=M_X(it)$, $t\in(-\delta,\delta)$. Η τελευταία ισότητα δίνει μία σχέση ανάμεσα στη χαρακτηριστική συνάρτηση και στη ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής X στο διάστημα σύγκλισης της ροπογεννήτριας.

Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει ακέραιες τιμές. Μία από τις πιο χρήσιμες ιδιότητες της χαρακτηριστικής συνάρτησης είναι ότι με τη βοήθειά της μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της X. Ισχύει ο τύπος αντιστροφής $f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itx}\phi_X(t)dt.$ Ο τύπος διαμορφώνεται ανάλογα στην περίπτωση των συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Έστω X μία τυχαία μεταβλητή της οποίας η χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ_X είναι ολοκληρώσιμη δηλαδή είναι τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_X(t)|dt$ να είναι πεπερασμένο. Σε αυτή την περίπτωση αποδεικνύεται ότι η X είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τον τύπο αντιστροφής $f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\phi_X(t)dt.$ Μία άμεση συνέπεια των παραπάνω τύπων αντιστροφής είναι η επόμενη πρόταση που ονομάζεται Θεώρημα Μοναδικότητας και παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 3.3 (Θεώρημα Μοναδικότητας). Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_X(t)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή της X.

Παράδειγμα 3.4 Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\phi_X(t) = e^{-|t|}, \ t \in \Re.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο αντιστροφής της χαρακτηριστικής συνάρτησης, να δειχτεί ότι η συνάρτηση πυκνότητας της X δίνεται από τον τύπο $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1+x^2)}, \ x \in \Re.$

Λύση. Είναι $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}dt = \int_{-\infty}^{0} e^t dt + \int_0^{\infty} e^{-t}dt = \left[e^t\right]_{-\infty}^0 + \left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = e^0 - \lim_{t\to-\infty} e^t - \lim_{t\to\infty} e^{-t} + e^0 = 2 < \infty.$

Από τον τύπο της αντιστροφής έχουμε

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-|t|}dt = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{-t(ix-1)}dt + \int_0^{\infty} e^{-t(ix+1)}dt\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{\left[-\frac{e^{-t(ix-1)}}{ix-1}\right]_{-\infty}^0 + \left[-\frac{e^{-t(ix+1)}}{ix+1}\right]_0^{\infty}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{-\left(\frac{e^0 - \lim_{t\to-\infty} e^{-t(ix-1)}}{ix-1}\right) + \left(\frac{-\lim_{t\to\infty} e^{-t(ix+1)} + e^0}{ix+1}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{-\left(\frac{1}{ix-1}\right) + \left(\frac{1}{ix+1}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi}\frac{(-2)}{(ix-1)(ix+1)} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{(x^2+1)}.$$

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, οι Προτάσεις 3.2 και 3.3 χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της κατανομής του αθροίσματος πεπερασμένου πλήθους ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

3.4 Παραδείγματα υπολογισμών

Παράδειγμα 3.5 (Διωνυμική κατανομή). Έστω $X \sim Bin(n, p)$, όπου n θετικός ακέραιος και $p \in [0,1]$. Τότε $\eta_X(t) = (tp + 1 - p)^n$, $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$ και $\phi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$.

Έχουμε $\phi_X(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{itx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^{it})^x(1-p)^{n-x} = (pe^{it} + 1 - p)^n$. Η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια του διωνυμικού αναπτύγματος $(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^x b^{n-x}$, $a, b \in \Re$.

Είναι $\eta_X(t) = \sum_{x=0}^{n} t^x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(tp)^x(1-p)^{n-x} = (tp + 1 - p)^n$ και

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tX}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x(1-p)^{n-x} = (pe^t + 1 - p)^n.$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε με δύο τρόπους τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X.

1^{ος} τρόπος. Είναι $\phi_X'(t) = n(pe^{it}+1-p)^{n-1} ipe^{it}$. Για $t=0$, $\phi_X'(0) = inp$ και επομένως $E(X) = np$.

Έχουμε $\eta_X'(t) = np(tp+1-p)^{n-1}$ και $\eta_X''(t) = n(n-1)p^2(tp+1-p)^{n-2}$.

Για $t=1$, $\eta_X'(1) = np$, $\eta_X''(1) = n(n-1)p^2$. Ισχύει ότι $Var(X) = \eta_X''(1) + \eta_X'(1) - (\eta_X'(1))^2$ και επομένως έχουμε $Var(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$.

2^{ος} τρόπος. Είναι $M_X'(t) = n(pe^t+1-p)^{n-1}pe^t$ και συνεπώς $M_X'(0) = E(X) = np$.

Επίσης, $M_X''(t) = n(n-1)(pe^t+1-p)^{n-2}(pe^t)^2 + n(pe^t+1-p)^{n-1}pe^t$ και επομένως

$M_X''(0) = EX^2 = n(n-1)p^2 + np$. Άρα, $\Delta X = EX^2 - (EX)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$.

Παράδειγμα 3.6 (Κατανομή Poisson). Έστω $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Τότε $\eta_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ και $\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

Είναι $\phi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

$$\eta_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε με δύο τρόπους τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X.

1^{ος} τρόπος. Είναι $\phi_X'(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} i\lambda e^{it}$. Για $t=0$, $\phi_X'(0) = i\lambda$ και επομένως $E(X) = \lambda$.

Έχουμε $\eta_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$ και $\eta_X''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$. Για $t=1$, $\eta_X'(1) = \lambda$ και $\eta_X''(1) = \lambda^2$.

Ισχύει ότι $Var(X) = \eta_X''(1) + \eta_X'(1) - (\eta_X'(1))^2$ και συνεπώς $Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

2^{ος} τρόπος. Είναι $M_X'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$ και συνεπώς $M_X'(0) = E(X) = \lambda$.

Επίσης, $M_X''(t) = (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$ και επομένως $EX^2 = M_X''(0) = \lambda^2 + \lambda$.

Άρα, $Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \lambda$.

Παράδειγμα 3.7 Έστω ότι η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι $M_X(t) = e^{3(e^t-1)}$, $t \in \Re$. Ποια είναι η τιμή της πιθανότητας $P(X=0)$;

Λύση. Παρατηρούμε ότι η $M_X(t)$ είναι η ροπογεννήτρια της Poisson(3). Από την Πρόταση 3.2 έπεται ότι $X \sim \text{Poisson}(3)$. Συνεπώς, $P(X=0) = e^{-3}$.

Παράδειγμα 3.8 Έστω $X \sim Bin(n, p)$. Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της X με τον τύπο της αντιστροφής. Στο Παράδειγμα 3.5 αποδείξαμε ότι $\phi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$. Διαδοχικά έχουμε

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx}\phi_X(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx}(pe^{it} + 1 - p)^n dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[e^{-itx}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(pe^{it})^r(1-p)^{n-r}\right]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(r-x)t}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{r=0\\ r\neq x}}^{n}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}\frac{1}{i(r-x)}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(r-x)t}i(r-x)dt + \frac{1}{2\pi}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\int_{-\pi}^{\pi}dt$$

$$= \sum_{\substack{r=0\\ r\neq x}}^{n}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}\frac{(e^{i(r-x)\pi} - e^{-i(r-x)\pi})}{2\pi i(r-x)} + \frac{1}{2\pi}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}2\pi$$

$$= \sum_{\substack{r=0\\ r\neq x}}^{n}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}\frac{\sin(\pi(r-x))}{\pi(r-x)} + \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}.$$

Η έκτη ισότητα προκύπτει από τη σχέση $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ και η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια του γεγονότος ότι $\sin(m\pi) = 0,$ για όλους τους ακέραιους αριθμούς m.

Παράδειγμα 3.9 (Εκθετική κατανομή). Έστω $X \sim$ Εκθετική(λ), $\lambda > 0$.

Τότε $\phi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$ και $M_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$, $t < \lambda$.

Είναι $\phi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda - it)x}dx = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}[-e^{-(\lambda - it)x}]_0^\infty = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$, διότι $\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} = 0$ και η συνάρτηση e^{itx} είναι φραγμένη ως προς x. Επομένως, $\lim_{x\to\infty} e^{-(\lambda - it)x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x}e^{itx} = 0.$

Είναι $M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x}dx = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$, για $t < \lambda$. Παρατηρούμε ότι η ροπογεννήτρια της Εκθετικής κατανομής ορίζεται μόνο για εκείνες τις τιμές του t που είναι μικρότερες του λ. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X με χρήση ροπογεννητριών. Είναι $M_X'(t) = \dfrac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$ και $M_X''(t) = \dfrac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$. Για $t = 0$, $M_X'(0) = E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ και $M_X''(0) = E(X^2) = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

Άρα, $Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Παράδειγμα 3.10 (Τυπική κανονική κατανομή). Έστω $Z \sim N(0,1)$.

Είναι $M_Z(t) = E(e^{tZ}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{z^2-2tz}{2}\right\} dz$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(z-t)^2}{2}+\frac{t^2}{2}\right\} dz = e^{\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}} dz = e^{\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Στην προτελευταία ισότητα θέσαμε $y = z - t$. Επιπλέον, $\phi_Z(t) = M_Z(it) = e^{\frac{(it)^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Παράδειγμα 3.11 (Κανονική κατανομή). Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Από την Πρόταση 2.1 έχουμε $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. Χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος και έχουμε

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E(e^{t(\sigma Z+\mu)}) = e^{t\mu}E(e^{t\sigma Z}) = e^{t\mu}M_Z(t\sigma) = e^{t\mu}e^{\frac{(t\sigma)^2}{2}} = \exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2}+t\mu\right\}.$$

Επιπλέον έχουμε $\phi_X(t) = E(e^{itX}) = E(e^{it(\sigma Z+\mu)}) = e^{it\mu}E(e^{it\sigma Z}) = e^{it\mu}\phi_Z(t\sigma) = e^{it\mu}e^{-\frac{(t\sigma)^2}{2}} = \exp\left\{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}.$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X με τη χρήση ροπογεννητριών.

Είναι $M_X'(t) = (\mu + t\sigma^2)\exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\mu t\right\}$ και $M_X''(t) = (\mu + t\sigma^2)^2\exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\mu t\right\} + \sigma^2\exp\left\{\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\mu t\right\}.$

Για $t = 0$, $M_X'(0) = E(X) = \mu$, $M_X''(0) = EX^2 = \mu^2 + \sigma^2$.

Επομένως, $Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$.

Παράδειγμα 3.12 Έστω $Z \sim N(0,1)$. Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας της X με τον τύπο της αντιστροφής. Στο Παράδειγμα 3.10 αποδείξαμε ότι $\phi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Ισχύει ότι $|\phi_Z(t)| = e^{-\frac{t^2}{2}}$ και $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} < \infty$ (ο υπολογισμός του τελευταίου ολοκληρώματος βρίσκεται στο βιβλίο του Μ. Κούτρα, Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Μέρος Ι, σελ. 397). Διαδοχικά έχουμε

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itz}\phi_Z(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itz}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t+iz)^2}{2}}dt=\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=$$

$\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$. Στην τέταρτη ισότητα θέσαμε $u=t+iz$. Η $f_Z(z)$ είναι πράγματι η συνάρτηση πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής $Z\sim N(0,1)$.

Παράδειγμα 3.13 Έστω $X\sim$ Γάμμα(a,λ). Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

Είναι $M_X(t)=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}e^{tx}x^{a-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}e^{-(\lambda-t)x}x^{a-1}dx=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}e^{-u}u^{a-1}\frac{1}{(\lambda-t)^a}du=\frac{\lambda^a}{(\lambda-t)^a\Gamma(a)}\int_0^{\infty}e^{-u}u^{a-1}du$

$=\frac{\lambda^a}{(\lambda-t)^a}$, $t<\lambda$. Στην τρίτη ισότητα θέσαμε $u=(\lambda-t)x$. Επιπλέον, $\phi_X(t)=M_X(it)=\frac{\lambda^a}{(\lambda-it)^a}$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X με τη χρήση των ροπογεννητριών.

Είναι $M_X^{'}(t)=\frac{a\lambda^a}{(\lambda-t)^{a+1}}$ και $M_X^{''}(t)=\frac{a\lambda^a(a+1)}{(\lambda-t)^{a+2}}, t<\lambda$.

Για $t=0$, $M_X^{'}(0)=E(X)=\frac{a}{\lambda}$ και $M_X^{''}(0)=E(X^2)=\frac{a(a+1)}{\lambda^2}$.

Άρα, $Var(X)=EX^2-(EX)^2=\frac{a(a+1)}{\lambda^2}-\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2=\frac{a}{\lambda^2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τη θεωρία των διανυσματικών τυχαίων μεταβλητών. Θα μελετήσουμε την έννοια της ανεξαρτησίας και θα ασχοληθούμε με την εύρεση της κατανομής του αθροίσματος δύο ή περισσότερων ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Επιπλέον θα αναφερθούμε στις έννοιες της συνδιακύμανσης και του συντελεστή συσχέτισης.

4.1 Διακριτές και συνεχείς διανυσματικές τυχαίες μεταβλητές

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ που ορίζονται στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο $(\Omega,\Im,P)$. Για κάθε $i=1,\ldots,n$ οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι τέτοιες ώστε $X_i:\Omega\to\Re$. Πολλές φορές μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ σε συνδυασμό για να διερευνήσουμε τυχόν συσχετίσεις τους. Με άλλα λόγια, μας ενδιαφέρει το διάνυσμα των τυχαίων μεταβλητών $\tilde{X}=(X_1,\ldots,X_n)$. Για παράδειγμα, έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X_1 αναπαριστά το βάρος, η τυχαία μεταβλητή X_2 αναπαριστά το ύψος, η τυχαία μεταβλητή X_3 αναπαριστά την ηλικία και η τυχαία μεταβλητή X_4 αναπαριστά την πίεση ενός ασθενούς. Μας ενδιαφέρει να διερευνήσουμε τις τυχόν συσχετίσεις αυτών των μεταβλητών. Μελετούμε λοιπόν το διάνυσμα $\tilde{X}=(X_1,X_2,X_3,X_4)$. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1 Ένα διάνυσμα $\tilde{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ που αποτελείται από n τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο $(\Omega,\Im,P)$ καλείται $n-$**διάστατη τυχαία μεταβλητή** ή **διανυσματική τυχαία μεταβλητή (δ.τ.μ.)** ($n-$dimensional random variable or random vector). Για το διάνυσμα $\tilde{X}$ ισχύει ότι $\tilde{X}:\omega\in\Omega\to\tilde{X}(\omega)=(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega))\in\Re^{\mathrm{n}}$.

Κατά τη ρίψη δύο ζαριών μας ενδιαφέρει συνήθως τόσο η ένδειξη του πρώτου όσο και του δεύτερου ζαριού. Σε μία κλινική μελέτη μας ενδιαφέρει ο τρόπος με τον οποίον η ηλικία ενός ασθενούς επηρεάζει το χρόνο αντίδρασής του σε ένα συγκεκριμένο φάρμακο. Σε αυτές τις περιπτώσεις εμφανίζονται δύο τυχαίες μεταβλητές. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο προσδιορισμός της συμπεριφοράς της μιας τυχαίας μεταβλητής σε σχέση με τη συμπεριφορά της άλλης. Στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου, θα αναπτύξουμε τη θεωρία των διανυσματικών τυχαίων μεταβλητών στην περίπτωση κατά την οποία $n=2,$ δηλαδή όταν $\tilde{X}=(X,Y)$.

Ορισμός 4.2 Η **συνάρτηση κατανομής** $F:\Re^2 \to [0,1]$ της διανυσματικής διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) ορίζεται ως εξής: $F(x,y)=P[X\le x, Y\le y],\ -\infty<x,y<\infty$ και καλείται **από κοινού (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής** (joint distribution function) **της διδιάστατης διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής** (X,Y).

Η συνάρτηση κατανομής F_X της τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να ληφθεί από τη συνάρτηση F της διδιάστατης δ.τ.μ. (X,Y) ως εξής:

$F_X(x)=P[X\le x]=P[X\le x, Y<\infty]=P[\lim_{y\to\infty}\{X\le x, Y\le y\}]=\lim_{y\to\infty}P[X\le x, Y\le y]=\lim_{y\to\infty}F(x,y).$

Στην τέταρτη ισότητα η εναλλαγή της θέσης του ορίου και της πιθανότητας είναι επιτρεπτή. Εντελώς ανάλογα προκύπτει ότι $F_Y(y)=\lim_{x\to\infty}F(x,y).$

Οι συναρτήσεις F_X και F_Y καλούνται **περιθώριες συναρτήσεις κατανομής** (marginal distribution functions) των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Παράδειγμα 4.1 Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $P[X>x, Y>y]$ συναρτήσει των περιθωρίων συναρτήσεων κατανομών των τυχαίων μεταβλητών X, Y και της από κοινού αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της διδιάστατης δ.τ.μ. (X,Y). Διαδοχικά έχουμε

$P[X>x, Y>y]=1-P[\{X>x, Y>y\}^c]=1-P[\{X>x\}^c\cup\{Y>y\}^c]=1-P[\{X\le x\}\cup\{Y\le y\}]$

$=1-[P\{X\le x\}+P\{Y\le y\}-P\{X\le x, Y\le y\}]=1-F_X(x)-F_Y(y)+F(x,y).$ Η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του Νόμου De Morgan για την τομή δύο ενδεχομένων και η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του προσθετικού νόμου.

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι διακριτές τότε ορίζουμε την **από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.)** (joint probability function) $p(x,y)$ της διδιάστατης δ.τ.μ. (X,Y), όπου $x\in S_X$ και $y\in S_Y$, ως εξής: $p(x,y)=P[X=x, Y=y]$.

Απαραίτητη συνθήκη για να είναι η p μία από κοινού σ.π. για τη δ.τ.μ. (X,Y) είναι η εξής: $\sum_{x\in S_X}\sum_{y\in S_Y}p(x,y)=1.$

Η συνάρτηση πιθανότητας p_X της τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της p ως εξής:

$p_X(x)=P[X=x]=\sum_{y\in S_Y}P[X=x, Y=y]=\sum_{y\in S_Y}p(x,y),\ \ x\in S_X.$

Ομοίως, η συνάρτηση πιθανότητας p_Y της τυχαίας μεταβλητής Y μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της p ως εξής: $p_Y(y) = P[Y = y] = \sum_{x \in S_X} P[X = x, Y = y] = \sum_{x \in S_X} p(x, y),\ \ y \in S_Y$.

Παράδειγμα 4.2 Έστω η διακριτή δ.τ.μ. (X, Y) με σύνολο δυνατών τιμών (φορέα) $S = \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$ και σ.π. $p(x, y) = P[X = x, Y = y] = \frac{1}{45}(x + 3y),\ \ (x, y) \in S$. (α) Δείξτε ότι η p είναι πράγματι μία από κοινού σ.π. (β) Βρείτε τις σ.π. των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Λύση. (α) Είναι $p(x, y) \geq 0,\ \ (x, y) \in S$. Επιπλέον $\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{3} p(x, y) = \frac{1}{45}\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{3}(x + 3y) = 1$. Επομένως, η p είναι πράγματι μία από κοινού σ.π.

(β) Είναι $p_X(x) = P[X = x] = \sum_{y=1}^{3} p(x, y) = \frac{x+6}{15} = \begin{cases} \frac{7}{15}, & x = 1 \\ \frac{8}{15}, & x = 2 \end{cases}$.

$$p_Y(y) = P[Y = y] = \sum_{x=1}^{2} p(x, y) = \frac{1+2y}{15} = \begin{cases} \frac{3}{15}, & y = 1 \\ \frac{5}{15}, & y = 2. \\ \frac{7}{15}, & y = 3 \end{cases}$$

Μπορούμε να συνοψίσουμε τις παραπάνω πιθανότητες στον ακόλουθο πίνακα:

y / x	1	2	3	$p_X(x)$
1	$4/45$	$7/45$	$10/45$	$7/15$
2	$5/45$	$8/45$	$11/45$	$8/15$
$p_Y(y)$	$3/15$	$5/15$	$7/15$	

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας p_X της τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να ληφθεί αν υπολογίσουμε τα αθροίσματα ανά γραμμή του πίνακα ενώ η συνάρτηση πιθανότηατς p_Y της τυχαίας μεταβλητής Y μπορεί να ληφθεί αν υπολογίσουμε τα αθροίσματα ανά στήλη του πίνακα. Επειδή οι σ.π. p_X και

p_Y των τυχαίων μεταβλητών X και Y εμφανίζονται στα περιθώρια του παραπάνω πίνακα καλούνται **περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας** (marginal probability functions).

Παράδειγμα 4.3 Υποθέτουμε ότι 15% των οικογενειών μιας κοινωνίας δεν έχει κανένα παιδί, 20% των οικογενειών έχει ένα παιδί, 35% των οικογενειών έχει δύο παιδιά και 30% των οικογενειών έχει τρία παιδιά. Υποθέτουμε επιπλέον ότι σε κάθε οικογένεια κάθε παιδί έχει την ίδια πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή B αναπαριστά τον αριθμό των αγοριών και η τυχαία μεταβλητή G αναπαριστά τον αριθμό των κοριτσιών που έχει μία οικογένεια η οποία επιλέγεται τυχαία. Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της διδιάστατης δ.τ.μ. (B,G).

Λύση. Ας υπολογίσουμε την πιθανότητα $P\{B=0,G=2\}$. Οι υπόλοιπες πιθανότητες υπολογίζονται με παρόμοιο τρόπο. Είναι $P\{B=0,G=2\} = P\{$ η οικογένεια έχει δύο κορίτσια και συνολικά δύο παιδιά $\}$

$= P\{$ η οικογένεια έχει δύο παιδιά $\} \cdot P\{$ η οικογένεια έχει δύο κορίτσια $|$ η οικογένεια έχει δύο παιδιά $\}$

$$= 0.35 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.0875.$$

Ο ακόλουθος πίνακας περιέχει τις πιθανότητες $P\{B=i,G=j\}$, $i, j = 0, 1, 2, 3$.

$i \backslash j$	0	1	2	3	$p_B(i)$
0	0.15	0.10	0.0875	0.0375	0.3750
1	0.10	0.175	0.1125	0	0.3875
2	0.0875	0.1125	0	0	0.2
3	0.0375	0	0	0	0.0375
$p_G(j)$	0.375	0.3875	0.2	0.0375	

Παράδειγμα 4.4 Ένα ζάρι ρίπτεται δύο φορές και συμβολίζουμε με X_1 και X_2 τις τυχαίες μεταβλητές που δηλώνουν το αποτέλεσμα της πρώτης και της δεύτερης ρίψης, αντίστοιχα.

(α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών και η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της διδιάστατης δ.τ.μ. (X_1, X_2).

(β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών και η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της διδιάστατης δ.τ.μ. (X,Y), όπου $X = \min(X_1, X_2)$ και $Y = \max(X_1, X_2)$.

(γ) Να υπολογιστούν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X,Y.

Λύση. (α) Το σύνολο τιμών της (X_1, X_2) είναι $S_{(X_1,X_2)} = \{(x_1,x_2) : x_1, x_2 = 1, 2, \ldots, 6\}$.

Επιπλέον $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{1}{36}$, αν $(x_1, x_2) \in S_{(X_1,X_2)}$ και $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = 0$, διαφορετικά.

(β) Το σύνολο τιμών της (X,Y) διαμορφώνεται ως εξής $S_{(X,Y)} = \{(x,y) : x, y = 1, 2, \ldots, 6,\ x \le y\}$ ενώ για την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f(x,y)$ της διδιάστατης διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής (X,Y) έχουμε

(i) αν $x = y = u$, όπου $u = 1, \ldots, 6$ τότε $f(u,u) = P(X = u, Y = u) = P(X_1 = u, X_2 = u) = \frac{1}{36}$.

(ii) αν $x < y$, όπου $x, y = 1, \ldots, 6$ τότε $f(x,y) = P(X = x, Y = y) = P[(X_1, X_2) \in \{(x,y),(y,x)\}]$

$= P(X_1 = x, X_2 = y) + P(X_1 = y, X_2 = x) = \frac{2}{36}$.

Επομένως, $f(x,y) = P(X = x, Y = y) = \frac{1}{36}$, αν $1 \le x = y \le 6$, $f(x,y) = \frac{2}{36}$, αν $1 \le x < y \le 6$ και $f(x,y) = 0$, διαφορετικά.

(γ) Για την περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x)$ έχουμε

$$f_X(x) = \sum_{y:(x,y)\in S_{(X,Y)}} f(x,y) = \sum_{y=x}^{6} f(x,y) = f(x,x) + f(x,x+1) + \ldots + f(x,6) = \frac{1}{36} + (6-x)\frac{2}{36} = \frac{13-2x}{36},$$

όπου $x = 1, \ldots, 6$.

Για την περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(y)$ έχουμε

$$f_Y(y) = \sum_{x:(x,y)\in S_{(X,Y)}} f(x,y) = \sum_{x=1}^{y} f(x,y) = f(1,y) + f(2,y) + \ldots + f(y,y) = (y-1)\frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2y-1}{36},$$

όπου $y = 1, \ldots, 6$.

Παράδειγμα 4.5 Έστω η διδιάστατη διακριτή δ.τ.μ. (X,Y) με συνάρτηση πιθανότητας $p(x,y) = \frac{8}{3^x 5^y}$, $x = 1, 2, \ldots$ και $y = 1, 2, \ldots$. (α) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y. (β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \ge 2, Y \ge 2)$.

Λύση. (α) Είναι $p_X(x) = \sum_{y=1}^{\infty} p(x,y) = \sum_{y=1}^{\infty} \frac{8}{3^x 5^y} = \frac{8}{3^x 5} \sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{y-1} = \frac{8}{5 \cdot 3^x} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{5}\right)} = \frac{2}{3^x}, x = 1, 2, \ldots$.

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^{\infty} p(x,y) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{8}{3^x 5^y} = \frac{8}{5^y 3} \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \frac{4}{5^y}, y = 1, 2, \ldots.$$

(β) Έστω τα ενδεχόμενα $A = \{X < 2\}$ και $B = \{Y < 2\}$.

Είναι $P(X \ge 2,\ Y \ge 2) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - P(X \le 1) - P(Y \le 1) + P(X \le 1, Y \le 1) = 1 - F_X(1) - F_Y(1) + F(1,1),$

όπου, $F_X(x)$, $F_Y(y)$ είναι οι περιθώριες αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών των τυχαίων μεταβλητών X, Y και $F(x, y)$ είναι η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής της διδιάστατης δ.τ.μ. (X, Y).

$F_X(1) = P(X \le 1) = P(X = 1) = p_X(1) = \frac{2}{3}$, $F_Y(1) = P(Y \le 1) = P(Y = 1) = p_Y(1) = \frac{4}{5}$,

$F(1,1) = P(X \le 1, Y \le 1) = P(X = 1, Y = 1) = p(1,1) = \frac{8}{15}.$

Άρα, $P(X \ge 2, Y \ge 2) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{8}{15} = \frac{1}{15}.$

Έστω X, Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι ορισμένες στον ίδιο δειγματικό χώρο. Τότε η διδιάστατη διανυσματική τυχαία μεταβλητή (X, Y) είναι **συνεχής** αν υπάρχει μία μη-αρνητική συνάρτηση δύο μεταβλητών $f : \Re \times \Re \to [0, \infty)$, $f(x, y)$, $x, y \in \Re$ τέτοια ώστε, για κάθε περιοχή $C \subseteq \Re \times \Re$, η οποία μπορεί να γραφεί μέσω ορθογωνίων με χρήση πεπερασμένου ή απείρως αριθμήσιμου πλήθους πράξεων (τομή, ένωση, συμπλήρωμα), ισχύει ότι $P[(X, Y) \in C] = \iint\limits_{(x,y)\in C} f(x, y)dxdy$. Η συνάρτηση $f(x, y)$ καλείται **από κοινού συνάρτηση πυκνότητας (σ.π.)** (joint probability density function) της διδιάστατης δ.τ.μ. (X, Y). Αν A και B είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών, τότε αν ορίσουμε $C = \{(x, y) : x \in A, y \in B\} = A \times B$, έχουμε

$P[(X, Y) \in C] = P[X \in A, Y \in B] = \int\limits_B \int\limits_A f(x, y)dxdy.$

Αν $A = (-\infty, a]$ και $B = (-\infty, b]$, έχουμε

$P\{X \in (-\infty, a], Y \in (-\infty, b]\} = P[X \le a, Y \le b] = F(a, b) = \int\limits_{-\infty}^{b} \int\limits_{-\infty}^{a} f(x, y)dxdy.$

Η συνάρτηση F καλείται **από κοινού (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής** της διδιάστατης δ.τ.μ. (X, Y). Αν παραγωγίσουμε ως προς a και b έχουμε $\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a, b) = f(a, b)$. Η τελευταία σχέση συνδέει την από κοινού σ.π. και την από κοινού συνάρτηση κατανομής της διδιάστατης δ.τ.μ. (X, Y). Απαραίτητη συνθήκη για να είναι η $f(x, y)$ μία από κοινού σ.π. για τη διδιάστατη δ.τ.μ. (X, Y) είναι $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dydx = 1.$

Αν η διδιάστατη δ.τ.μ. (X, Y) είναι συνεχής, τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι συνεχείς (εναλλακτικά καλούνται **από κοινού συνεχείς** (joint continuous)) και οι συναρτήσεις πυκνότητας τους f_X και f_Y, αντίστοιχα, μπορούν να ληφθούν ως εξής:

$P\{X \in A\} = P\{X \in A, Y \in (-\infty,\infty)\} = \int\limits_A \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = \int\limits_A f_X(x)dx,$ όπου $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ είναι η σ.π. της τυχαίας μεταβλητής X. Ομοίως, η σ.π. της τυχαίας μεταβλητής Y, δίνεται από τη σχέση $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$

Για τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομών $F_X(x), F_Y(y)$ ισχύουν οι εκφράσεις: $F_X(x) = \lim\limits_{y\to\infty} F(x,y)$ και $F_Y(y) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x,y).$ Από τις δύο τελευταίες σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομών των τυχαίων μεταβλητών X και Y από την από κοινού συνάρτηση κατανομής της διδιάστατης δ.τ.μ. (X,Y).

Ισχύει ότι: $F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, -\infty < Y < \infty) = \int\limits_{-\infty}^{x}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s,y)dy\right]ds = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(s)ds.$

Όμοια, $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y \le y, -\infty < X < \infty) = \int\limits_{-\infty}^{y}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dx\right]dt = \int\limits_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt.$

Παράδειγμα 4.6 Η από κοινού σ.π. της δ.τ.μ. (X,Y) δίνεται από τον τύπο $f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y}, \ x,y \in (0,\infty) \\ 0, \ x,y \notin (0,\infty) \end{cases}.$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες (α) $P[X > 1, Y < 1]$, (β) $P[X < Y]$ και (γ) $P[X < a]$.

Λύση. (α) Είναι $P[X > 1, Y < 1] = \int\limits_0^1 \int\limits_1^{\infty} 2e^{-x}e^{-2y}dxdy = \int\limits_0^1 2e^{-2y}\left[-e^{-x}\right]_1^{\infty} dy = e^{-1}\int\limits_0^1 2e^{-2y}dy = e^{-1}(1-e^{-2}).$

(β) $P[X < Y] = \iint\limits_{\{(x,y):x<y\}} 2e^{-x}e^{-2y}dxdy = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{y} 2e^{-x}e^{-2y}dxdy = \int\limits_0^{\infty} 2e^{-2y}(1-e^{-y})dy = \int\limits_0^{\infty} 2e^{-2y}dy - \int\limits_0^{\infty} 2e^{-3y}dy = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$

(γ) $P[X < a] = \int\limits_0^{a}\int\limits_0^{\infty} 2e^{-2y}e^{-x}dydx = \int\limits_0^{a} e^{-x}dx = 1 - e^{-a}.$

Παράδειγμα 4.7 Η από κοινού σ.π. της δ.τ.μ. (X,Y) δίνεται από τον τύπο $f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, \ x,y \in (0,\infty) \\ 0, \quad x,y \notin (0,\infty) \end{cases}.$

Βρείτε την σ.π. της τυχαίας μεταβλητής X/Y.

Λύση. Αρχικά θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X/Y. Για $a > 0$, έχουμε διαδοχικά

$$F_{X/Y}(a)=P\left[X/Y\le a\right]=\iint\limits_{x/y\le a} e^{-(x+y)}dxdy=\int_0^{\infty}\int_0^{ay} e^{-(x+y)}dxdy=\int_0^{\infty}(1-e^{-ay})e^{-y}dy=\left[-e^{-y}+\frac{e^{-(a+1)y}}{(a+1)}\right]_0^{\infty}=1-\frac{1}{(a+1)}.$$

Αν παραγωγίσουμε ως προς a, λαμβάνουμε τη σ.π. της τυχαίας μεταβλητής X/Y, η οποία δίνεται από τον τύπο: $F'_{X/Y}(a)=f_{X/Y}(a)=(a+1)^{-2}$, $a>0$.

Παράδειγμα 4.8 Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας μιας διδιάστατης διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής (X,Y) δίνεται από τον τύπο $f(x,y)=\dfrac{3x(x+y)}{5}$, $0<x<1$, $0<y<2$ και $f(x,y)=0$, αλλού.

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P\left(0<X<\dfrac{1}{2},1<Y<2\right)$.

(β) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

(γ) Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(x,y)$.

(δ) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομών $F_X(x)$, $F_Y(y)$.

Λύση. (α) $P\left(0<X<\dfrac{1}{2},1<Y<2\right)=\displaystyle\int_0^{1/2}\int_1^2 \frac{3x(x+y)}{5}dydx=\int_0^{1/2}\frac{3x}{5}\left[\frac{y^2}{2}+xy\right]_1^2 dx=\frac{11}{80}.$

(β) $f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\frac{3x}{5}\int_0^2 (x+y)dy=\frac{6x(x+1)}{5},\ \ 0<x<1.$

$f_Y(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_0^1 \frac{3x(x+y)}{5}dx=\frac{1}{5}+\frac{3y}{10},\ \ 0<y<2.$

(γ) $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{3t(t+s)}{5}dsdt=\frac{yx^3}{5}+\frac{3y^2x^2}{20},\ \ 0<x<1,\ \ 0<y<2.$

(δ) $F_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(s)ds=\int_0^x \frac{6s(s+1)}{5}ds=\frac{6}{5}x^2\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right),\ \ 0<x<1.$

$F_Y(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{y} f_Y(s)ds=\int_0^y\left(\frac{1}{5}+\frac{3s}{10}\right)ds=\frac{1}{5}y+\frac{3}{20}y^2,\ \ 0<y<2.$

Παράδειγμα 4.9 Η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής των χρόνων ζωής X,Y δύο λαμπτήρων A,B σε χιλιάδες ώρες δίνεται από τον τύπο: $F(x,y)=(1-e^{-4x^2})(1-e^{-3y})$, $x,y>0$ και $F(x,y)=0$, αλλού.

(α) Να υπολογιστούν οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομών των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

(β) Ποια είναι η πιθανότητα (i) και οι δύο λαμπτήρες να ζήσουν περισσότερο από 500 ώρες (ii) τουλάχιστον ένας από τους δύο λαμπτήρες να ζήσει περισσότερο από 500 ώρες;

(γ) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y. Ποια είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της διδιάστατης διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής (X,Y);

Λύση. (α) $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = (1-e^{-4x^2})\lim_{y\to\infty}(1-e^{-3y}) = 1-e^{-4x^2}, x>0.$

$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = (1-e^{-3y})\lim_{x\to\infty}(1-e^{-4x^2}) = 1-e^{-3y}, y>0.$

(β) (i) Έστω τα ενδεχόμενα A: ο λαμπτήρας A ζει λιγότερο από 500 ώρες δηλαδή $X < 1/2$ και B: ο λαμπτήρας B ζει λιγότερο από 500 ώρες δηλαδή $Y < 1/2$. Ζητάμε την πιθανότητα

$P(A^c \cap B^c) = P((A\cup B)^c) = 1-P(A\cup B) = 1-P(A)-P(B)+P(A\cap B).$

Είναι $P(A) = P(X<1/2) = F_X(1/2) = 1-e^{-4\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1-e^{-1} \cong 63\%.$

$P(B) = P(Y<1/2) = F_Y(1/2) = 1-e^{-3\frac{1}{2}} = 1-e^{-\frac{3}{2}}.$

$P(A\cap B) = P(X<1/2, Y<1/2) = F(1/2, 1/2) = (1-e^{-1})(1-e^{-\frac{3}{2}}).$

(ii) Ζητάμε την πιθανότητα $P(A^c \cup B^c) = P((A\cap B)^c) = 1-P(A\cap B).$

(γ) $f_X(x) = F_X^{'}(x) = (1-e^{-4x^2})' = 8xe^{-4x^2}, x>0.$

$f_Y(y) = F_Y^{'}(y) = (1-e^{-3y})' = 3e^{-3y}, y>0.$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F(x,y) = 24xe^{-3y}e^{-4x^2}.$$

4.2 Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Θεωρούμε ένα πείραμα στο οποίο ρίχνουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι. Διαισθητικά πιστεύουμε ότι όποιο κι αν είναι το αποτέλεσμα της ρίψης ενός νομίσματος δεν θα πρέπει να έχει καμία επίδραση στο αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού και αντίστροφα. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που ισούται με 1 ή 0 ανάλογα με το αν το νόμισμα δείχνει κεφαλή ή γράμματα και έστω Y η τυχαία μεταβλητή που παίρνει τις τιμές $1,2,3,4,5$ ή 6 ανάλογα με το αν η άνω έδρα του ζαριού φέρει τον αριθμό $1,2,3,4,5$ ή 6 αντίστοιχα. Το αποτέλεσμα του διπλού πειράματος περιγράφεται από τη διδιάστατη διακριτή δ.τ.μ. (X,Y). Το διαισθητικό μας συμπέρασμα ότι τα αποτελέσματα των ρίψεων του νομίσματος και του ζαριού δεν έχουν καμία επίδραση το ένα στο άλλο, μπορεί να διατυπωθεί αυστηρά ως εξής: αν x είναι ένας από τους αριθμούς 0 ή 1 και y είναι ένας από τους αριθμούς $1,2,3,4,5,6,$ τότε τα ενδεχόμενα $\{X=x\}$ και $\{Y=y\}$ πρέπει να είναι ανεξάρτητα. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.3 Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y καλούνται **ανεξάρτητες** (independent) αν για οποιαδήποτε υποσύνολα A και B του συνόλου των πραγματικών αριθμών, ισχύει ότι

$$P\{X\in A, Y\in B\}=P\{X\in A\}P\{Y\in B\} \tag{4.1}$$

Ισοδύναμα, οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες όταν και μόνο όταν για οποιαδήποτε σύνολα A και $B,$ τα ενδεχόμενα $E_A=\{X\in A\}$ και $E_B=\{Y\in B\}$ είναι ανεξάρτητα. Για οποιαδήποτε $a,b\in\Re,$ ισχύει ότι $P\{X\le a, Y\le b\}=P\{X\le a\}P\{Y\le b\}$ ή ισοδύναμα $F(a,b)=F_X(a)F_Y(b),$ όπου F είναι η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής της διδιάστατης δ.τ.μ. (X,Y) και F_X, F_Y είναι οι συναρτήσεις κατανομών των τυχαίων μεταβλητών X και $Y,$ αντίστοιχα.

Όταν οι X και Y είναι **διακριτές** τυχαίες μεταβλητές, η συνθήκη ανεξαρτησίας (4.1) είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y),$$

ή με τη σχέση (4.2)

$$P[X=x, Y=y]=P[X=x]P[Y=y], \text{ για κάθε } x,y$$

Η ισοδυναμία των σχέσεων (4.1) και (4.2) εξηγείται ως εξής: Αν στη σχέση (4.1), θέσουμε $A=\{x\}$ και $B=\{y\},$ λαμβάνουμε τη (4.2). Επιπλέον, αν η σχέση (4.2) ισχύει, τότε για οποιαδήποτε σύνολα A και $B,$ έχουμε

$$P\{X\in A, Y\in B\}=\sum_{y\in B}\sum_{x\in A}P\{X=x, Y=y\}=\sum_{y\in B}\sum_{x\in A}P\{X=x\}P\{Y=y\}=\sum_{y\in B}P\{Y=y\}\sum_{x\in A}P\{X=x\}$$

$$=P\{Y\in B\}P\{X\in A\}.$$

Όταν οι X και Y είναι **συνεχείς** τυχαίες μεταβλητές, η συνθήκη της ανεξαρτησίας (4.1) είναι ισοδύναμη με τη σχέση $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),$ για κάθε $x,y.$

Διαισθητικά, οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες όταν η γνώση της μίας δεν επηρεάζει την κατανομή της άλλης. Αν δύο τυχαίες μεταβλητές δεν είναι ανεξάρτητες, τότε καλούνται **εξαρτημένες**.

Παράδειγμα 4.10 Ένας άνδρας και μία γυναίκα έχουν συμφωνήσει να συναντηθούν σε ένα ζαχαροπλαστείο κάποια χρονική στιγμή μεταξύ 12:00 και 1:00 το μεσημέρι. Υποθέτουμε ότι ο άνδρας φθάνει στο ζαχαροπλαστείο στις $12+X$ και η γυναίκα φθάνει στις $12+Y.$ Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ότι ακολουθούν την Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1). Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P\left(|X-Y|>\frac{1}{6}\right)$, δηλαδή η πιθανότητα ο άνδρας να περιμένει τη γυναίκα ή αντίστροφα για περισσότερο από δέκα λεπτά.

Λύση. Έστω $f(x,y)$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της διδιάστατης δ.τ.μ. (X,Y) και f_X, f_Y οι σ.π. των τυχαίων μεταβλητών X και Y, αντίστοιχα.

Είναι $\left(|X-Y|>\frac{1}{6}\right)=\left\{X-Y>\frac{1}{6}\right\}\cup\left\{X-Y<-\frac{1}{6}\right\}$ και τα ενδεχόμενα $\left\{X-Y>\frac{1}{6}\right\}$, $\left\{X-Y<-\frac{1}{6}\right\}$ είναι ασυμβίβαστα. Άρα, $P\left(|X-Y|>\frac{1}{6}\right)=P\left\{Y+\frac{1}{6}<X\right\}+P\left\{X+\frac{1}{6}<Y\right\}=2P\left\{X+\frac{1}{6}<Y\right\}=2\iint\limits_{x+\frac{1}{6}<y} f(x,y)dxdy$

$$=2\iint\limits_{x+\frac{1}{6}<y} f_X(x)f_Y(y)dxdy=2\iint\limits_{x+\frac{1}{6}<y} dxdy=2\int_{\frac{1}{6}}^{1}\int_{0}^{y-\frac{1}{6}} dxdy=2\int_{\frac{1}{6}}^{1}\left(y-\frac{1}{6}\right)dy=2\frac{25}{72}=\frac{25}{36}.$$

Η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια της συμμετρίας και η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Παράδειγμα 4.11 Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των ατόμων που εισέρχονται κατά τη διάρκεια μιας μέρας σε ένα ταχυδρομείο ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Δείξτε ότι, αν το κάθε άτομο που εισέρχεται στο ταχυδρομείο είναι άνδρας με πιθανότητα p και γυναίκα με πιθανότητα $1-p$, τότε ο αριθμός των ανδρών και των γυναικών που μπαίνουν στο ταχυδρομείο κατά τη διάρκεια μιας μέρας είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κατανομή Poisson με παραμέτρους λp και $\lambda(1-p)$, αντίστοιχα.

Λύση. Έστω X και Y, αντίστοιχα, ο αριθμός των ανδρών και των γυναικών που εισέρχονται στο ταχυδρομείο κατά τη διάρκεια μιας μέρας. Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας και αν δεσμευτούμε ως προς την τυχαία μεταβλητή $X+Y$, έχουμε

$$P[X=i,Y=j]=P[X=i,Y=j\mid X+Y=i+j]P[X+Y=i+j]+P[X=i,Y=j\mid X+Y\neq i+j]P[X+Y\neq i+j]$$
$$=P[X=i,Y=j\mid X+Y=i+j]P[X+Y=i+j]=\binom{i+j}{i}p^i(1-p)^{i+j-i}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}.$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει διότι προφανώς ισχύει ότι $P[X=i,Y=j\mid X+Y\neq i+j]=0$. Η τρίτη ισότητα προκύπτει διότι, εξ υποθέσεως, η τυχαία μεταβλητή $X+Y$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Επιπλέον, δοθέντος ότι $i+j$ άνθρωποι εισέρχονται στο ταχυδρομείο και ο καθένας από αυτούς είναι άνδρας με πιθανότητα p, η πιθανότητα ακριβώς i άτομα να είναι άνδρες (και επομένως ακριβώς j άτομα να είναι γυναίκες) είναι ίση με $P[X=i, Y=j \mid X+Y=i+j]=\binom{i+j}{i} p^{i}(1-p)^{i+j-i}$, δηλαδή η παραπάνω πιθανότητα είναι διωνυμική με παραμέτρους $i+j$ και p. Συνεπώς, $P[X=i, Y=j]=e^{-\lambda}(\lambda p)^{i} \frac{[\lambda(1-p)]^{j}}{i!\,j!}$, $i, j=0,1, \ldots$.

Η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X βρίσκεται ως εξής:

$$P[X=i]=\sum_{j=0}^{\infty} P[X=i, Y=j]=e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^{i}}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{j}}{j!}=e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^{i}}{i!} e^{\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^{i}}{i!}, \quad i=0,1, \ldots.$$

Άρα, $X \sim \operatorname{Poisson}(\lambda p)$. Ομοίως, η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y είναι

$$P[Y=j]=\sum_{i=0}^{\infty} P[X=i, Y=j]=e^{-\lambda(1-p)} \frac{[\lambda(1-p)]^{j}}{j!}, \quad j=0,1, \ldots.$$ Άρα, $Y \sim \operatorname{Poisson}[\lambda(1-p)]$.

Παρατηρούμε ότι $P[X=i, Y=j]=P[X=i] P[Y=j]$, $i, j=0,1, \ldots$. Επομένως, οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 4.12 Έστω X, Y, Z ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $(0,1)$. Υπολογίστε την πιθανότητα $P[X \geq YZ]$.

Λύση. Έστω $f_{X, Y, Z}$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της τρισδιάστατης δ.τ.μ. (X, Y, Z) και f_{X}, f_{Y}, f_{Z} οι συναρτήσεις πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y, Z. Αφού οι X, Y, Z είναι ανεξάρτητες, ισχύει ότι $f_{X, Y, Z}(x, y, z)=f_{X}(x) f_{Y}(y) f_{Z}(z)=1$, $0 \leq x, y, z \leq 1$.

Είναι $P[X \geq YZ]=\iiint_{x \geq yz} f_{X, Y, Z}(x, y, z) dx dy dz=\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \int_{yz}^{1} dx dy dz=\int_{0}^{1} \int_{0}^{1}(1-yz) dy dz=\int_{0}^{1}\left(1-\frac{z}{2}\right) dz=\frac{3}{4}$.

4.3 Κατανομή του αθροίσματος ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

Η Πρόταση 2.5 μπορεί να γενικευτεί στην περίπτωση των δ.τ.μ. (X, Y). Η μέση τιμή μιας συνάρτησης $g(X, Y)$ της δ.τ.μ. (X, Y) είναι $E[g(X, Y)]=\sum_{y} \sum_{x} g(x, y) p(x, y)$, αν η δ.τ.μ. (X, Y) είναι διακριτή με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p(x, y)$, ενώ $E[g(X, Y)]=\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$, αν η δ.τ.μ. (X, Y) είναι συνεχής με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f(x, y)$. Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.1 Έστω τυχαίες μεταβλητές X, Y που ορίζονται στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο $(\Omega, \Im, P)$. Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τότε $E[g(X) h(Y)]=E[g(X)] E[h(Y)]$, όπου g και h είναι πραγματικές συναρτήσεις.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρόταση στην περίπτωση κατά την οποία οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι συνεχείς. Η απόδειξη είναι παρόμοια στην περίπτωση κατά την οποία οι X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Έστω $f(x,y)$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της διδιάστατης δ.τ.μ. (X,Y) και f_X, f_Y οι συναρτήσεις πυκνότητας των X,Y. Διαδοχικά, έχουμε

$$E[g(X)h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_Y(y)dy\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

$= E[h(Y)]E[g(X)]$. ■

Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν ακέραιες τιμές και έστω η_{X+Y}, η_X και η_Y, οι πιθανογεννήτριες των τυχαίων μεταβλητών $X+Y, X$ και Y, αντίστοιχα. Από την παραπάνω πρόταση και τον ορισμό της πιθανογεννήτριας, διαδοχικά έχουμε

$\eta_{X+Y}(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y) = \eta_X(t)\eta_Y(t).$

Υποθέτουμε ότι η πραγματική μεταβλητή t παίρνει τιμές σε ένα κατάλληλο διάστημα σύγκλισης των πιθανογεννητριών. Η τρίτη ισότητα είναι συνέπεια της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών X,Y.

Με επαγωγή έπεται ότι, αν οι $X_1,\ldots,X_r$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ισχύει ότι

$\eta_{X_1+\cdots+X_r}(t) = \eta_{X_1}(t)\cdots\eta_{X_r}(t),$ όπου $\eta_{X_1+\cdots+X_r}$ είναι η πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $X_1+\cdots+X_r$ και $\eta_{X_1},\ldots,\eta_{X_r}$ είναι οι πιθανογεννήτριες των $X_1,\ldots,X_r$.

Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν για τις ροπογεννήτριες και τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Αν X,Y είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και M_X, M_Y, M_{X+Y} είναι οι ροπογεννήτριες των $X,Y,X+Y$, αντίστοιχα, διαδοχικά έχουμε $M_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX}e^{tY}) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = M_X(t)M_Y(t).$

Υποθέτουμε ότι η πραγματική μεταβλητή t του παραπάνω τύπου παίρνει τιμές σε ένα κατάλληλο διάστημα σύγκλισης των ροπογεννητριών. Επίσης, αν $\phi_X, \phi_Y, \phi_{X+Y}$ είναι οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των $X,Y,X+Y$, αντίστοιχα, διαδοχικά έχουμε

$\phi_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX}e^{itY}) = E(e^{itX})E(e^{itY}) = \phi_X(t)\phi_Y(t),\ t \in \Re.$

Οι δύο τελευταίοι τύποι, όπως στην περίπτωση των πιθανογεννητριών, επεκτείνονται άμεσα με επαγωγή με συνέπεια η ροπογεννήτρια (ή η χαρακτηριστική συνάρτηση) του αθροίσματος πεπερασμένου πλήθους ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ισούται με το γινόμενο των ροπογεννητριών (ή των χαρακτηριστικών συναρτήσεων) τους.

Τα παραπάνω αποτελέσματα σε συνδυασμό με τις Προτάσεις 3.1, 3.2 και 3.3 μας βοηθούν να προσδιορίσουμε την κατανομή του αθροίσματος πεπερασμένου πλήθους ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Στη συνέχεια παραθέτουμε τρία σχετικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.13 Αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ και $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ και X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Λύση. Η λύση θα δοθεί με δύο τρόπους.

1^{ος} τρόπος. Το ενδεχόμενο $\{X + Y = i\}$, $i = 0,1,\dots$ μπορεί να γραφεί ως η τομή των ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων $\{X = k\}$ και $\{Y = i - k\}$, $k = 0,\dots,i$. Διαδοχικά έχουμε

$$P[X+Y=i] = \sum_{k=0}^{i} P[X=k, Y=i-k] = \sum_{k=0}^{i} P[X=k]P[Y=i-k] = \sum_{k=0}^{i} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{i-k}}{(i-k)!}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{i}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{i-k}}{k!(i-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!}\sum_{k=0}^{i}\frac{i!}{k!(i-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{i-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!}(\lambda_1+\lambda_2)^i.$$ Άρα, $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

2^{ος} τρόπος. Έστω $\phi_X, \phi_Y, \phi_{X+Y}$ οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των $X, Y, X+Y$, αντίστοιχα. Τότε, αφού οι X, Y είναι ανεξάρτητες, ισχύει ότι $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t), t \in \Re$. Από το Παράδειγμα 3.6, έχουμε

$\phi_X(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)}$ και $\phi_Y(t) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)}$. Άρα, $\phi_{X+Y}(t) = \exp\{(\lambda_1+\lambda_2)e^{it} - (\lambda_1+\lambda_2)\}$, $t \in \Re$.

Από την Πρόταση 3.3 προκύπτει άμεσα ότι $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος μπορεί να γενικευτεί για την περίπτωση που έχουμε $X_1,\dots,X_r$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, $i = 1,\dots,r$.

Τότε $X_1 + \cdots + X_r \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)$.

Παράδειγμα 4.14 Αν $X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(m,p)$ και X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε $X + Y \sim Bin(n+m,p)$.

Λύση. Έστω $\eta_X, \eta_Y, \eta_{X+Y}$ οι πιθανογεννήτριες των $X, Y, X+Y$, αντίστοιχα. Τότε, αφού οι X, Y είναι ανεξάρτητες, ισχύει ότι $\eta_{X+Y}(t) = \eta_X(t)\eta_Y(t)$, όπου η πραγματική μεταβλητή t ανήκει στο διάστημα σύγκλισης των πιθανογεννητριών. Από το Παράδειγμα 3.5, έχουμε $\eta_X(t) = (tp+1-p)^n$ και $\eta_Y(t) = (tp+1-p)^m$. Άρα, $\eta_{X+Y}(t) = (tp+1-p)^{n+m}$. Από την Πρόταση 3.1 προκύπτει άμεσα ότι $X + Y \sim Bin(n+m,p)$.

Το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος μπορεί να γενικευτεί για την περίπτωση που έχουμε $X_1,\dots,X_r$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $X_i \sim Bin(n_i,p)$, $i = 1,\dots,r$.

Τότε $X_1 + \cdots + X_r \sim Bin(n_1 + \cdots + n_r, p)$.

Παράδειγμα 4.15 Αν $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ και X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$, όπου $a, b \in \Re$.

Λύση. Έστω M_X, M_Y, M_{aX+bY} οι ροπογεννήτριες των $X, Y, aX + bY$, αντίστοιχα. Αφού X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, διαδοχικά έχουμε

$$M_{aX+bY}(t) = E(e^{t(aX+bY)}) = E(e^{taX+tbY}) = E(e^{taX})E(e^{tbY}) = M_X(ta)M_Y(tb).$$

Χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 3.11 και έχουμε

$$M_{aX+bY}(t) = \exp\left\{\frac{\sigma_1^2(ta)^2}{2} + \mu_1 ta\right\}\exp\left\{\frac{\sigma_2^2(tb)^2}{2} + \mu_2 tb\right\} = \exp\left\{\frac{(a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)t^2}{2} + (a\mu_1 + b\mu_2)t\right\},\ t \in \Re.$$

Από την Πρόταση 3.2 προκύπτει άμεσα ότι $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$.

Το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος μπορεί να γενικευτεί για την περίπτωση που έχουμε $X_1, \ldots, X_r$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, r$.

Τότε $a_1 X_1 + \cdots + a_r X_r \sim N\left(\sum_{i=1}^{r} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{r} a_i^2 \sigma_i^2\right)$, όπου $a_1, \ldots, a_r \in \Re$.

Σε κάθε ένα από τα τρία προηγούμενα παραδείγματα χρησιμοποιήσαμε ενδεικτικά μία από τις τρεις συναρτήσεις (πιθανογεννήτρια, ροπογεννήτρια, χαρακτηριστική συνάρτηση). Είναι φανερό ότι σε κάθε παράδειγμα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε εναλλακτικά οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες γεννήτριες συναρτήσεις.

4.4 Μέση τιμή και διασπορά του αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών

Στο παρόν εδάφιο θα ασχοληθούμε με την εύρεση της μέσης τιμής και της διασποράς του αθροίσματος δυο τυχαίων μεταβλητών. Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2 Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y με πεπερασμένες μέσες τιμές. Τότε η τυχαία μεταβλητή $X + Y$ έχει πεπερασμένη μέση τιμή και επιπλέον ισχύει ότι $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Απόδειξη. Έστω ότι η δ.τ.μ. (X, Y) είναι συνεχής και έστω $f(x, y), f_X, f_Y$ οι σ.π. της διδιάστατης δ.τ.μ. (X, Y) και των τυχαίων μεταβλητών X, Y αντίστοιχα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(X, Y) = X + Y$. Διαδοχικά έχουμε

$$E[g(X,Y)] = E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dydx + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy =$$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = E(X) + E(Y).$ Αν η διδιάστατη δ.τ.μ. (X,Y) είναι διακριτή η απόδειξη γίνεται με παρόμοιο τρόπο. ■

Αν $X_1,\ldots,X_r$ είναι τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε με επαγωγή αποδεικνύεται ότι $E\left[\sum_{i=1}^{r} X_i\right] = \sum_{i=1}^{r} E[X_i]$. Η τελευταία σχέση είναι πολύ χρήσιμη για τον υπολογισμό μέσων τιμών.

Παράδειγμα 4.16 Έστω ότι N άνδρες πετάνε τα καπέλα τους στο πάτωμα ενός δωματίου. Τα καπέλα ανακατεύονται και ο κάθε άνδρας διαλέγει ένα καπέλο κατά τυχαίο τρόπο. Βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των ανδρών που διαλέγουν τα δικά τους καπέλα.

Λύση. Έστω η τυχαία μεταβλητή X_i, $i = 1,\ldots,N$ τέτοια ώστε $X_i = 1$, αν ο άνδρας i διαλέγει το δικό του καπέλο και $X_i = 0$, αν ο άνδρας i δεν διαλέγει το δικό του καπέλο. Έστω η τυχαία μεταβλητή $X = X_1 + \cdots + X_N$. Ζητάμε να βρούμε τη μέση τιμή $E(X)$. Ισχύει ότι $EX_i = P(X_i = 1) = \frac{1}{N}$, για κάθε $i = 1,\ldots,N$. Συνεπώς, $E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_N) = 1$.

Παράδειγμα 4.17 Δέκα κυνηγοί περιμένουν να περάσει ένα σμήνος από δέκα κοτσύφια. Όταν περάσει το σμήνος, οι κυνηγοί πυροβολούν ταυτόχρονα αλλά ο καθένας διαλέγει το στόχο του τυχαία και ανεξάρτητα από τους άλλους. Αν ο κάθε κυνηγός πετυχαίνει το στόχο του με πιθανότητα p, να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός των κοτσυφιών που ξεφεύγουν από τους πυροβολισμούς των κυνηγών.

Λύση. Έστω η τυχαία μεταβλητή X_i, $i = 1,\ldots,10$ τέτοια ώστε $X_i = 1$, αν το $i-$οστό κοτσύφι ξεφεύγει και $X_i = 0$, αν το $i-$οστό κοτσύφι δεν ξεφεύγει από τους πυροβολισμούς των κυνηγών.

Έστω η τυχαία μεταβλητή $X = X_1 + \cdots + X_{10}$. Ζητάμε να βρούμε τη μέση τιμή $E(X)$.

Ισχύει ότι $E(X) = E(X_1 + \cdots + X_{10}) = E(X_1) + \cdots + E(X_{10})$.

Για κάθε $i = 1,\ldots,10$ έχουμε $E(X_i) = P(X_i = 1)$. Ο κάθε κυνηγός, ανεξάρτητα από τους άλλους, πετυχαίνει το $i-$οστό κοτσύφι με πιθανότητα $\frac{p}{10}$. Άρα, $P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{p}{10}\right)^{10}$. Συνεπώς, $E(X) = 10\left(1 - \frac{p}{10}\right)^{10}$.

Η Πρόταση 4.2 μπορεί να γενικευτεί για r τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_r$, ως εξής:

$E(a_1X_1 + \cdots + a_rX_r) = a_1E(X_1) + \cdots + a_rE(X_r)$, όπου $a_1,\ldots,a_r$ πραγματικές σταθερές.

Παράδειγμα 4.18 Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) δίνεται από τον τύπο $p(x,y)=c\left(\dfrac{x}{y}\right),\ \ x=1,2,3,\ \ y=1,2.$

(α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c και ποιες οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

(β) Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Λύση. (α) Πρέπει $\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2}c\left(\dfrac{x}{y}\right)=1\Rightarrow\sum_{x=1}^{3}cx\left(\dfrac{3}{2}\right)=1\Rightarrow c={}^{1}\!/_{9}.$

$$p_X(x)=\sum_{y=1}^{2}p(x,y)=\sum_{y=1}^{2}\frac{1}{9}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{6},\ x=1,2,3.$$

$$p_Y(y)=\sum_{x=1}^{3}p(x,y)=\sum_{x=1}^{3}\frac{1}{9}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{6}{9y},\ y=1,2.$$

(β) $E[X]=\sum_{x=1}^{3}xp_X(x)=\sum_{x=1}^{3}\dfrac{x^2}{6}=\dfrac{14}{6},\ \ E[Y]=\sum_{y=1}^{2}yp_Y(y)=\sum_{y=1}^{2}y\dfrac{6}{9y}=\dfrac{12}{9}.$

4.5 Συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών

Έστω X,Y δύο τυχαίες μεταβλητές. Η διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελεί ένα μέτρο της μεταβλητότητάς της. Αν, για παράδειγμα, θεωρήσουμε ένα γραμμικό συνδυασμό $Z=aX+bY,$ των τυχαίων μεταβλητών X και $Y,$ όπου $a,b\in\Re$ σταθερές, είναι διαισθητικά προφανές ότι η διακύμανση της Z θα πρέπει να επηρεάζεται τόσο από τις διακυμάνσεις των X,Y όσο και από την από κοινού συμπεριφορά των τυχαίων μεταβλητών $X,Y.$ Η ποσότητα που αντικατοπτρίζει την από κοινού συμπεριφορά των X,Y δίνεται στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.4 (Συνδιακύμανση). Η **συνδιακύμανση** (covariance) δύο τυχαίων μεταβλητών X και $Y,$ ορίζεται ως εξής: $Cov(X,Y)=E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}.$

Από τον παραπάνω ορισμό, αναπτύσσοντας το δεξιό μέλος της τελευταίας ισότητας, διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E\{XY-YE(X)-XE(Y)+E(X)E(Y)\}=E(XY)-E(Y)E(X)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)\\&=E(XY)-E(X)E(Y).\end{aligned}$$

Αν X,Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε από την Πρόταση 4.1, έχουμε $Cov(X,Y)=0.$

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή, αν $Cov(X,Y)=0,$ δεν έπεται ότι οι X,Y είναι ανεξάρτητες. Ένα απλό παράδειγμα δύο εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών X,Y που έχουν μηδενική συνδιακύμανση μπορεί να ληφθεί αν υποθέσουμε ότι η X είναι τέτοια ώστε $P(X=0)=P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{3},$ και ορίσουμε την $Y,$ έτσι ώστε $Y=0,$ αν $X\neq 0$ και $Y=1,$ αν $X=0.$ Τότε $XY=0,$ και επομένως, $E(XY)=0.$ Επιπλέον, $E(X)=0$ και $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.$ Οι X,Y είναι φανερά εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές. Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.3 Έστω X,Y δύο τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης. Τότε η τυχαία μεταβλητή $X+Y$ έχει πεπερασμένη ροπή δεύτερης τάξης και επομένως έχει πεπερασμένη διασπορά. Επιπλέον, ισχύει ότι $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y).$

Απόδειξη. Είναι $Var(X+Y)=E[X+Y-E(X+Y)]^2=E[(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2$

$=E(X-E(X))^2+E(Y-E(Y))^2+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y).$ ■

Η προηγούμενη πρόταση μπορεί να γενικευτεί για r τυχαίες μεταβλητές $X_1,\dots,X_r$ ως εξής:

$Var(a_1X_1+\cdots+a_rX_r)=\sum_{i=1}^{r}a_i^2Var(X_i)+2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=i+1}^{r}a_ia_jCov(X_i,X_j),$ όπου $a_1,\dots,a_r$ πραγματικές σταθερές.

Στην περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,\dots,X_r$ είναι ανά δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους, ισχύει ότι

$Var(a_1X_1+\cdots+a_rX_r)=\sum_{i=1}^{r}a_i^2Var(X_i),$ όπου $a_1,\dots,a_r$ πραγματικές σταθερές.

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.4 Αν X,Y,Z τυχαίες μεταβλητές και $a,b\in\Re,$ ισχύει ότι

$Cov(aX+bY,Z)=aCov(X,Z)+bCov(Y,Z).$

Απόδειξη. Είναι

$Cov(aX+bY,Z)=E[(aX+bY)Z]-E(aX+bY)EZ=a\left[E(XZ)-E(X)E(Z)\right]+b\left[E(YZ)-E(Y)E(Z)\right]$

$=aCov(X,Z)+bCov(Y,Z).$ ■

Παράδειγμα 4.19 Για το Παράδειγμα 4.16 υπολογίστε τη διασπορά του αριθμού των ανδρών που διαλέγουν τα δικά τους καπέλα.

Λύση. Ισχύει ότι $Var(X)=\sum_{i=1}^{N}Var(X_i)+2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}Cov(X_i,X_j).$

Όμως, $Var(X_i) = EX_i^2 - (EX_i)^2 = P(X_i = 1) - (EX_i)^2 = \frac{1}{N} - \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{N-1}{N^2}$, για $i = 1, \ldots, N$.

Επίσης, για i, j με $i < j$, έχουμε ότι $Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$. Όμως, $X_i X_j = 1$, αν αμφότεροι οι άνδρες i και j διαλέγουν τα δικά τους καπέλα και $X_i X_j = 0$, σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

Άρα, $E(X_i X_j) = P(X_i = 1, X_j = 1) = P(X_i = 1)P(X_j = 1 \mid X_i = 1) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{(N-1)}$.

Συνεπώς, $Cov(X_i, X_j) = \frac{1}{N(N-1)} - \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^2(N-1)}$.

Επομένως, $Var(X) = \frac{N-1}{N} + 2\frac{N(N-1)}{2} \cdot \frac{1}{N^2(N-1)} = \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} = 1$.

4.6 Συντελεστής συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών

Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένες μη-μηδενικές διασπορές για τις οποίες διαπιστώσαμε ότι $Cov(X, Y) \neq 0$. Τότε οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες. Μας ενδιαφέρει να αποδώσουμε ποσοτικά το βαθμό εξάρτησης των X και Y με έναν κατάλληλο αριθμό. Η τιμή της συνδιακύμανσης των τυχαίων μεταβλητών X και Y επηρεάζεται σημαντικά από τις μονάδες μέτρησης των X και Y. Για να εξαλείψουμε την επίδραση των μονάδων μέτρησης των X και Y στο βαθμό της εξάρτησής τους δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.5 Ο **συντελεστής συσχέτισης** (correlation coefficient) δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y τέτοιων ώστε $Var(X) \cdot Var(Y) > 0$, ορίζεται ως εξής: $\rho(X, Y) := \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$ και αποτελεί ένα μέτρο του βαθμού εξάρτησης μεταξύ τους.

Πρόταση 4.5 Ισχύει ότι $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Απόδειξη. Έστω σ_X^2 και σ_Y^2 οι διασπορές των τυχαίων μεταβλητών X και Y, αντίστοιχα. Ισχύει ότι

$$0 \leq Var\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{Var(X)}{\sigma_X^2} + \frac{Var(Y)}{\sigma_Y^2} + \frac{2Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \Rightarrow 0 \leq 1 + 1 + 2\rho(X, Y) \Rightarrow \rho(X, Y) \geq -1.$$

Επίσης, ισχύει ότι $0 \leq Var\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{Var(X)}{\sigma_X^2} + \frac{Var(Y)}{\sigma_Y^2} - \frac{2Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \Rightarrow 0 \leq 1 + 1 - 2\rho(X, Y) \Rightarrow \rho(X, Y) \leq 1$.

Συνεπώς, $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$. ■

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.6 Αν Z είναι μία τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $Var(Z)=0,$ τότε $P\{Z=E(Z)\}=1.$

Απόδειξη. Από την ανισότητα του Chebyshev, έχουμε ότι $P\left\{|Z-E(Z)|>\frac{1}{n}\right\}=0,$ για κάθε $n\geq 1.$ Υποθέτουμε ότι $n\to\infty.$ Από το Θεώρημα Συνέχειας, ισχύει ότι

$0=\lim_{n\to\infty}P\left\{|Z-E(Z)|>\frac{1}{n}\right\}=P\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{|Z-E(Z)|>\frac{1}{n}\right\}\right\}=P\{Z\neq E(Z)\}.$ Συνεπώς, $P\{Z=E(Z)\}=1.$ ■

Αν $\rho(X,Y)=1,$ τότε από τη σχέση $Var\left(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}\right)=\frac{Var(X)}{\sigma_X^2}+\frac{Var(Y)}{\sigma_Y^2}-\frac{2Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=2-2\rho(X,Y),$ προκύπτει ότι $Var\left(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}\right)=0.$ Η τελευταία σχέση έχει ως άμεσο επακόλουθο ότι, με πιθανότητα 1, η ποσότητα $\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}$ θα είναι ίση με μία σταθερά. Επομένως, θα ισχύει ότι $Y=a+bX,$ όπου $b=\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}>0,$ $a,b\in\Re.$

Ομοίως, αν $\rho(X,Y)=-1,$ τότε από τη σχέση

$Var\left(\frac{X}{\sigma_X}+\frac{Y}{\sigma_Y}\right)=\frac{Var(X)}{\sigma_X^2}+\frac{Var(Y)}{\sigma_Y^2}+\frac{2Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=2+2\rho(X,Y),$ προκύπτει ότι $Var\left(\frac{X}{\sigma_X}+\frac{Y}{\sigma_Y}\right)=0.$ Άρα, με πιθανότητα 1, η ποσότητα $\frac{X}{\sigma_X}+\frac{Y}{\sigma_Y}$ θα είναι ίση με μία σταθερά. Επομένως, θα ισχύει ότι $Y=a+bX,$ όπου $b=-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}<0,$ $a,b\in\Re.$

Επιπλέον, αν $Y=a+bX,$ τότε $\rho(X,Y)=1$ ή $\rho(X,Y)=-1,$ ανάλογα με το πρόσημο της σταθεράς $b.$

Πράγματι, μετά από πράξεις έχουμε ότι $\rho(X,a+bX)=\frac{b}{|b|},$ επομένως $\rho(X,a+bX)=1,$ αν $b>0$ και $\rho(X,a+bX)=-1,$ αν $b<0.$

Ο συντελεστής συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι ένα μέτρο του βαθμού της γραμμικής εξάρτησης των X και $Y.$ Μία τιμή του συντελεστή συσχέτισης κοντά στο +1 ή στο -1 είναι ένδειξη υψηλού βαθμού γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των X και $Y,$ ενώ μία τιμή του συντελεστή συσχέτισης κοντά στο 0 είναι ένδειξη ότι δεν υπάρχει γραμμική εξάρτηση. Μία θετική τιμή του συντελεστή συσχέτισης είναι ένδειξη ότι η Y αυξάνει καθώς η X αυξάνει ενώ μία αρνητική τιμή του είναι ένδειξη ότι η Y μειώνεται καθώς η X αυξάνει. Αν $\rho(X,Y)=0,$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y καλούνται **ασυσχέτιστες** (uncorrelated).

Παράδειγμα 4.20 Έστω X_1, X_2, X_3 τρεις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που έχουν πεπερασμένες θετικές διασπορές $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$, αντίστοιχα. Υπολογίστε τον συντελεστή συσχέτισης των $X_1 - X_2$ και $X_2 + X_3$.

Λύση. Ισχύει ότι $Cov(X_1 - X_2, X_2 + X_3) = E[(X_1 - X_2)(X_2 + X_3)] - E[X_1 - X_2]E[X_2 + X_3]$.

Από την Πρόταση 4.1 (ανεξαρτησία των X_1, X_2, X_3) και την Πρόταση 4.2, μετά από πράξεις, προκύπτει ότι

$$Cov(X_1 - X_2, X_2 + X_3) = -(E[X_2^2] - (E[X_2])^2) = -Var(X_2) = -\sigma_2^2.$$

Συνεπώς, $\rho(X_1 - X_2, X_2 + X_3) = -\dfrac{\sigma_2^2}{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)}}$.

Παράδειγμα 4.21 Ένας αριθμός X επιλέγεται τυχαία στο διάστημα $[0,1]$. Έστω R η απόκλιση του αριθμού που επιλέχτηκε από ένα σταθερό αριθμό a, όπου $0 \le a \le 1$. (α) Να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών X και R. (β) Για ποια τιμή του a οι τυχαίες μεταβλητές X και R είναι ασυσχέτιστες;

Λύση. (α) Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1] ενώ για την τυχαία μεταβλητή R έχουμε $R = |a - X|$. Αφού η συνάρτηση πυκνότητας της X είναι $f(x) = 1$, για $0 \le x \le 1$, έχουμε

$$E[R] = E[|a - X|] = \int_{-\infty}^{\infty} |a - x| f(x)dx = \int_0^a (a - x)dx + \int_a^1 (x - a)dx = a^2 - a + \frac{1}{2}.$$

$$E[R^2] = E[|a - X|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (a - x)^2 f(x)dx = \int_0^1 (a - x)^2 dx = a^2 - a + \frac{1}{3}.$$

$$Var[R] = E[R^2] - (E[R])^2 = 2a^3 - a - a^2 + \frac{1}{12}.$$

$$E[XR] = E[X|a - X|] = \int_{-\infty}^{\infty} x|a - x|dx = \int_0^a x(a - x)dx + \int_a^1 x(x - a)dx = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}.$$

Επειδή $E[X] = \frac{1}{2}$, $Var[X] = \frac{1}{2}$, προκύπτει, μετά από πράξεις, ότι

$$\rho(X, R) = \frac{E(XR) - E(X)E(R)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(R)}} = \frac{4a^3 - 6a^2 + 1}{\sqrt{12}\sqrt{2a^3 - a^4 - a^2 + \frac{1}{12}}}.$$

(β) Για να είναι οι τυχαίες μεταβλητές X, R ασυσχέτιστες θα πρέπει ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X, R)$ να είναι ίσος με μηδέν ή ισοδύναμα $4a^3 - 6a^2 + 1 = (2a - 1)(2a^2 - 2a - 1) = 0$. Η εξίσωση έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[0,1]$, την $a = \frac{1}{2}$.