Στοιχεία
Θεωρίας Πιθανοτήτων

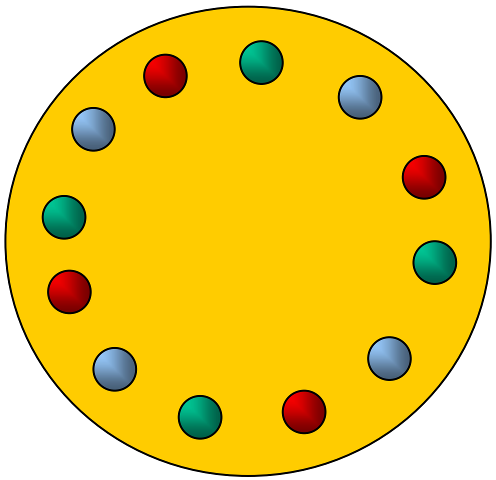
Θεωρία Πιθανοτήτων

- **Αντικείμενο**: η ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας
- **Χρησιμότητα**: η δυνατότητα πρόβλεψης
- **Ορολογία**:
  - Πείραμα -Ενδεχόμενο – Συμβάν
    (Experiment - Outcome – Event)
  - Χωρος πιθανοτήτων ή Δειγματικός χώρος (Probability space – Sample space)
- **Συνεπικουρούντα επιστ. αντικείμενα:**
  - Θεωρία συνόλων (set theory)
  - Συνδυαστική Ανάλυση (Combinatorial analysis)

Ορισμός πιθανότητας

- Αξιωματικός ορισμός (a priori)
- Δια της συχνότητας εμφάνισης (a posteriori)

Στοιχειώδη & σύνθετα ενδεχόμενα -- τυχαίες μεταβλητές



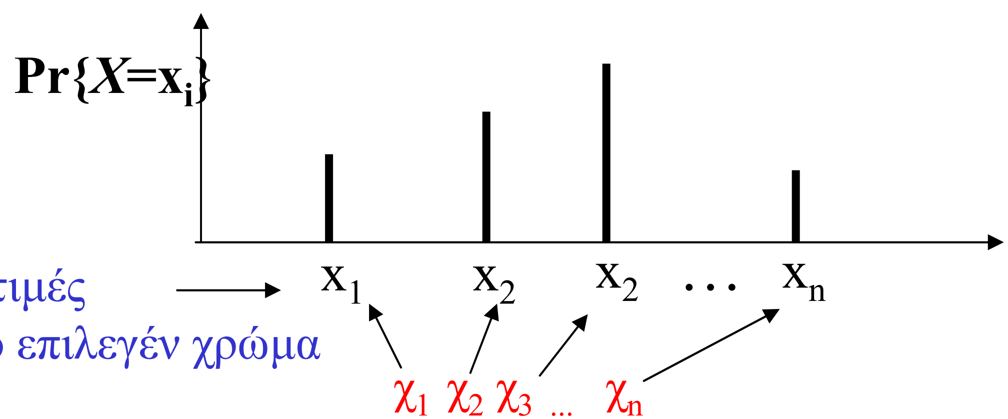
Το παράδειγμα της ρουλέτας:

N σχισμές (στοιχειώδη ενδεχόμενα) με ίδιες «ευκαιρίες» επιλογής

N_i σχισμές χρώματος χ_i , i=1,2,… n

Χρώμα χ_i: σύνθετο ενδεχόμενο, αν N_i>1

Πιθανότητα επιλογής χρώματος χ_i: $p_i = \dfrac{N_i}{N}$



Τυχαία μεταβλητή *X* με τιμές που αντιστοιχίζονται στο επιλεγέν χρώμα →

Δειγματικός Χώρος (ΔΧ)

- ***Σχετίζεται με ένα πείραμα και απαρτίζεται απ' όλα τα δυνατά ενδεχόμενα του πειράματος***

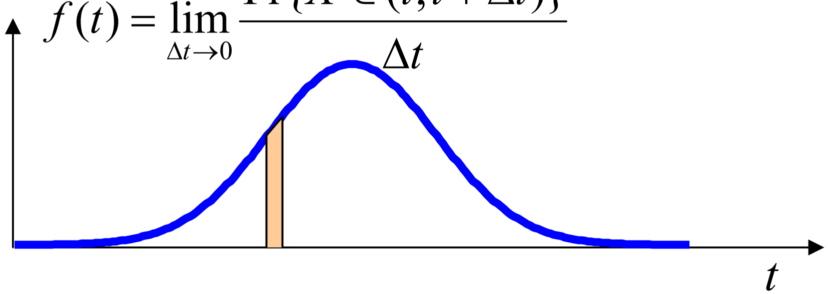
- ***Κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο ενός πειράματος αντιστοιχεί σε ένα σημείο του αντίστοιχου δειγματικού χώρου***

Κατηγορίες ΔΧ

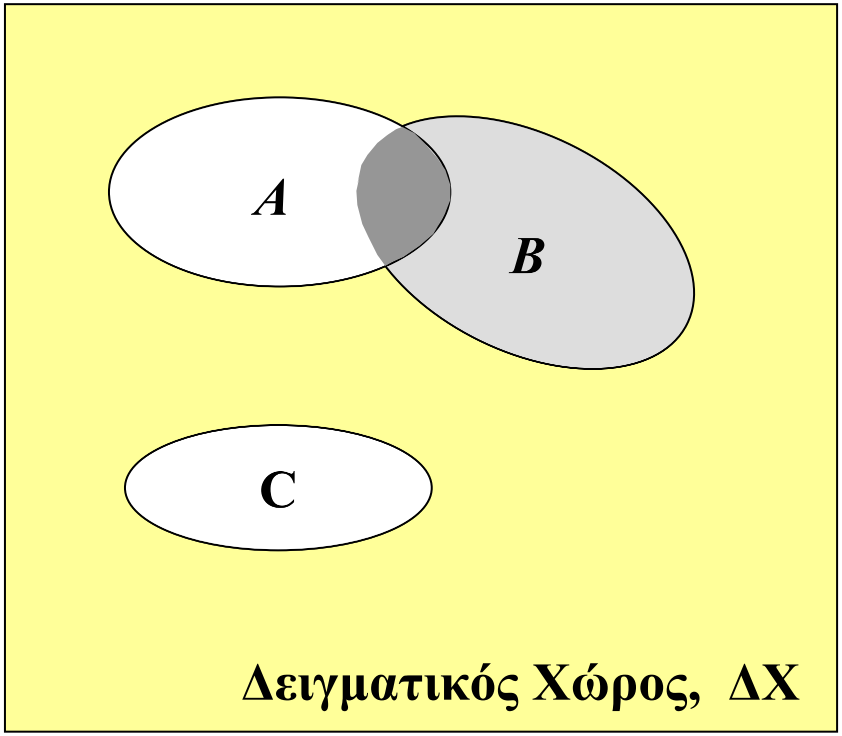
- Διακριτοί, πεπερασμένοι (π.χ. η ρουλέτα)
- Διακριτοί, άπειροι (π.χ. ο αριθμός των φωτονίων επί φωτοδιόδου σε χρόνο Τ)
- Συνεχείς (π.χ. ο χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα)

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf):

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr\{X \in (t, t+\Delta t)\}}{\Delta t}$$



Γραφική απεικόνιση ΔΧ και Ενδεχομένων



Διατάξεις και Συνδυασμοί

- ***Διατάξεις αντικειμένων:*** ***M ανά n***
  - ***Με επανάληψη:*** M^n
  - ***Χωρίς επανάληψη:*** $M(M-1)\ldots(M-n+1) = \dfrac{M!}{(M-n)!}$

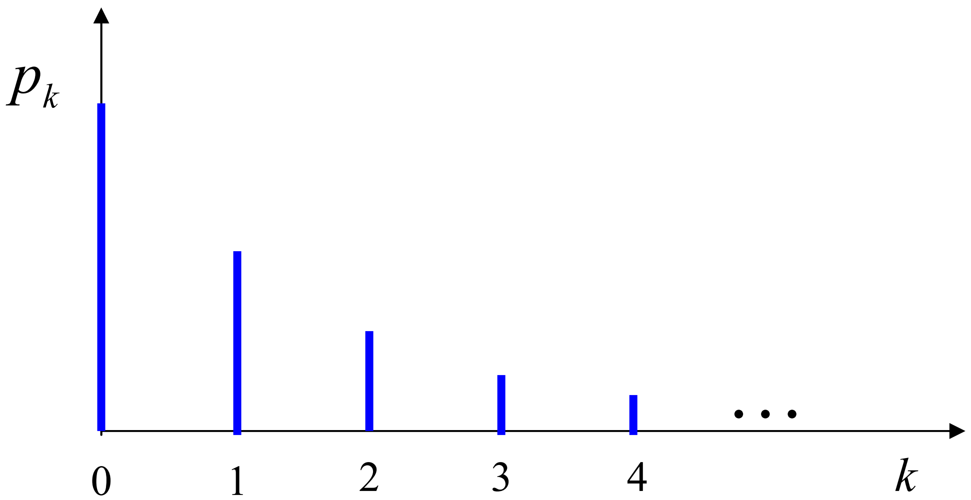
- ***Συνδυασμοί αντικειμένων: M ανά n*** $\dbinom{M}{n} = \dfrac{M!}{n!(M-n)!}$

[Συνδυασμοί M ανά n = (διατάξεις χ.ε. M ανά n)/(διατάξεις χ.ε. n ανά n)]

Η γεωμετρική κατανομή πιθανότητας

$$p_k = \Pr\{X = k\} = (1-p)p^k,$$

$$k = 0,1,2,\cdots \quad p \in (0,1)$$



<u>Επαλήθευση</u>: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p_k = (1-p)\sum_{k=0}^{\infty} p^k = (1-p)\frac{1}{1-p} = 1$

Βασικές σχέσεις για τις κατανομές πιθανότητας σε συνεχή ΔΧ

X

Τυχαία μεταβλητή (random variable)

$$f(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Pr(x < X \le x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function)

$$F(x) \equiv \Pr(X \le x) = \int_0^x f(u)du$$

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (cumulative distribution function)

$$CPDF(x) \equiv \Pr(X > x) = 1 - F(x)$$

Συνάρτηση επιβίωσης (survivor function ή complementary probability distribution function)

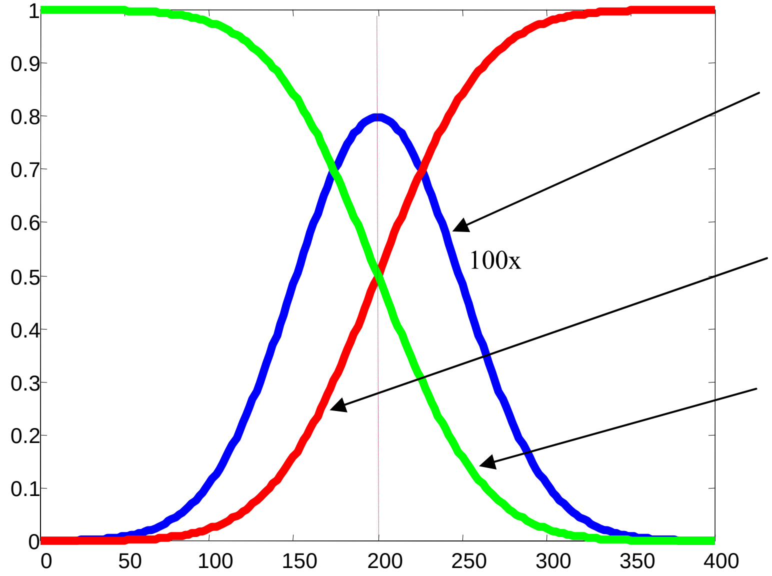
$$f(x) = F'(x) = -CPDF'(x)$$

$$\phi(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Pr(x < X \le x + \Delta x \mid X > x)}{\Delta x} = \frac{f(x)}{CPDF(x)}$$

Ηλικιακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (age-specific probability density function)

Παράδειγμα 1: κανονική κατανομή

$m = 200, \quad \sigma = 50$

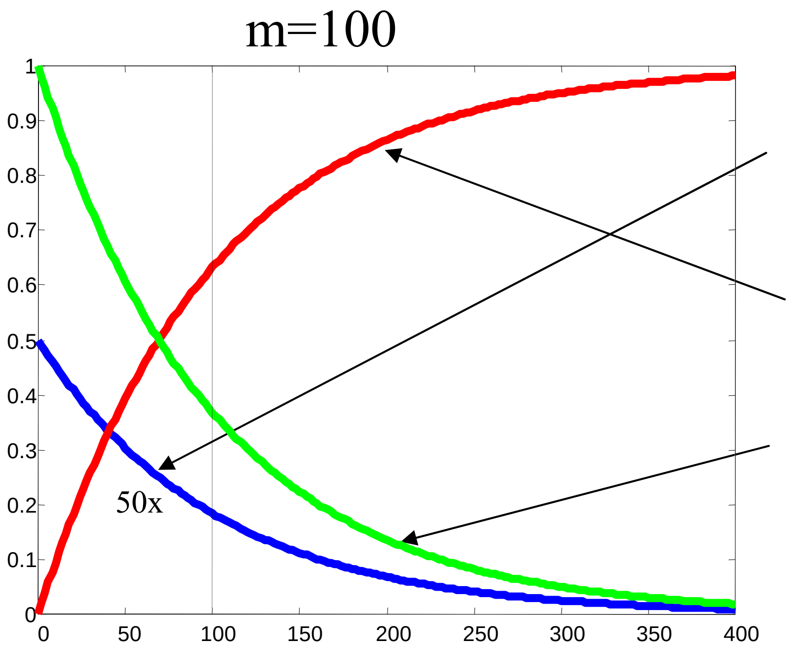


normpdf: $f(x \mid m, \sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

normcdf: $F(x \mid m, \sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$

normcpdf = 1-normcdf

Παράδειγμα 2: εκθετική κατανομή



exppdf: $f(x\,|\,m) = \frac{1}{m} e^{-\frac{x}{m}}$

expcdf: $F(x\,|\,m) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t}{m}} dt = 1 - e^{-\frac{x}{m}}$

expcpdf = 1-expcdf

Προσδοκώμενη (μέση) τιμή τ.μ. (expectation)

$$E\{X\} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Pr\{X = x_i\}, & \text{για διακριτό ΔΧ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad f(x) = pdf(X), & \text{για συνεχή ΔΧ} \end{cases}$$

Ιδιότητες:

Γραμμικότητα $E\{aX + bY\} = aE\{X\} + bE\{Y\}$

Μέση τιμή συνάρτησης

$$E\{g(X)\} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \Pr\{X = x_i\}, & \text{για διακριτό ΔΧ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx, \quad f(x) = pdf(X), & \text{για συνεχή ΔΧ} \end{cases}$$

Μέση τιμή τ.μ. γεωμετρικής και εκθετικής κατανομής

$$p_k = (1-p)p^k : \qquad E\{X\} = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)p^k = \frac{p}{1-p}$$

Απόδειξη:

$$\sum_{k=0}^{N} kp^k = p\sum_{k=1}^{N} kp^{k-1} = p\frac{d}{dp}\left[\sum_{k=0}^{N} p^k\right] = p\frac{d}{dp}\frac{1-p^{N+1}}{1-p} = p\frac{-(N+1)p^N(1-p)+1-p^{N+1}}{(1-p)^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{p}{(1-p)^2}$$

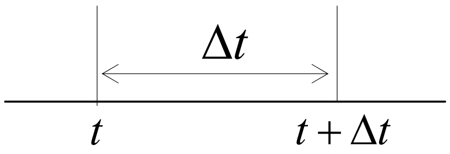
$$f(x) = \frac{1}{m}e^{-\frac{x}{m}} : \qquad E\{X\} = \int_0^{\infty} x\frac{1}{m}e^{-\frac{x}{m}}dx = m$$

Απόδειξη:

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right) \Rightarrow \int_0^{\infty} xe^{-\frac{x}{m}}dx = \left[-me^{-\frac{x}{m}}(x+m)\right]_0^{\infty} = m^2$$

Διαδικασία αφίξεων Poisson

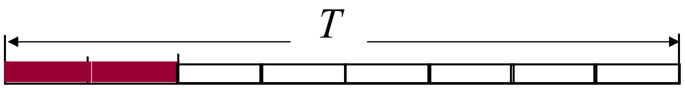
- $\Pr\{\text{μία άφιξη} \in \Delta t\} = \lambda\Delta t + 0(\Delta t)$
- $\Pr\{\text{καμμία άφιξη} \in \Delta t\} = 1 - \lambda\Delta t + 0(\Delta t)$
- Οι αφίξεις είναι ανεξάρτητες



$$\Pr\{k \; arrivals \; \in T\} = \frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!}$$

(Poisson distribution)

Απόδειξη:



m σχισμές διάρκειας $\Delta t = T/m$,
k από αυτές με άφιξη

$$\Pr\{k \;\; \alpha\varphi\acute{\iota}\xi\varepsilon\iota\varsigma\} = \binom{m}{k}(\lambda\Delta t)^k (1-\lambda\Delta t)^{m-k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}\left(\frac{\lambda T}{m}\right)^k (1-\lambda\Delta t)^{-\frac{\lambda T}{-\lambda\Delta t}} (1-\lambda\Delta t)^{-k} \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

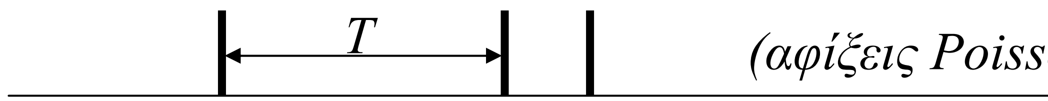
αφού $\quad m = \frac{T}{\Delta t} \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \infty, \qquad \lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{a}{t}} = e^a, \qquad \frac{m! m^{-k}}{(m-k)!} = \frac{m}{m}\frac{m-1}{m}\cdots\frac{m-k+1}{m} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 1, \qquad (1-\lambda\Delta t)^{-k} \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} 1$

Μέση τιμή τ.μ. κατανομής Poisson

$$E\{k_{\in T}\} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \lambda T$$

Απόδειξη: $\mu\varepsilon\ a = \lambda T, \quad E\{k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{-a} a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = a, \quad \alpha\phi o\acute{\upsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \equiv e^a$

Interarrival time distribution στην κατανομή Poisson



(αφίξεις Poisson)

$$pdf: \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

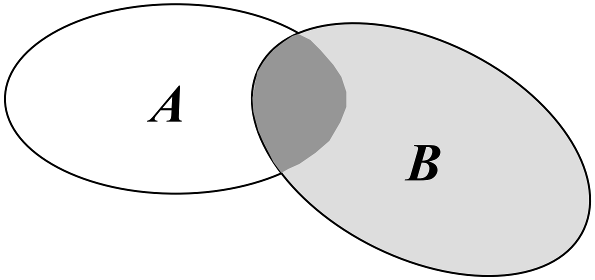
<u>Απόδειξη:</u> $CPDF(t) \equiv \Pr\{T > t\} = \Pr\{k_{\in T} = 0\} = e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad pdf(t) = -\frac{d}{dt} CPDF(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

$$E\{T\} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma_T^2 \equiv E\{(T - E\{T\})^2)\} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Υπο συνθήκη πιθανότητες

$$\Pr\{A \mid B\} = \frac{\Pr\{A \ \ and \ \ B\}}{\Pr\{B\}}$$

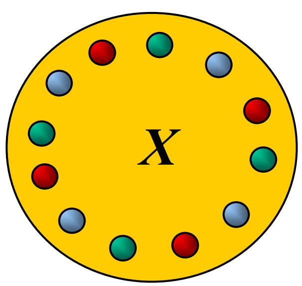


$$\Pr\{A \mid B\}\Pr\{B\} = \Pr\{B \mid A\}\Pr\{A\} = \Pr\{A \ \ and \ \ B\}$$

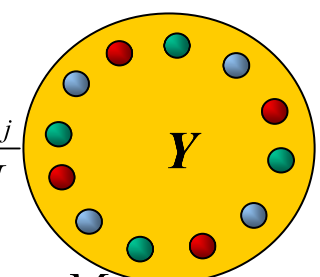
Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

A , B ανεξάρτητα γεγονότα iff $\Pr\{A \mid B\} = \Pr\{A\}$

Ισοδύναμα $\Pr\{A \;\; and \;\; B\} = \Pr\{A\}\Pr\{B\}$



$$\Pr\{X = x_i\} = \frac{N_i}{N} \qquad \Pr\{Y = y_j\} = \frac{M_j}{M}$$

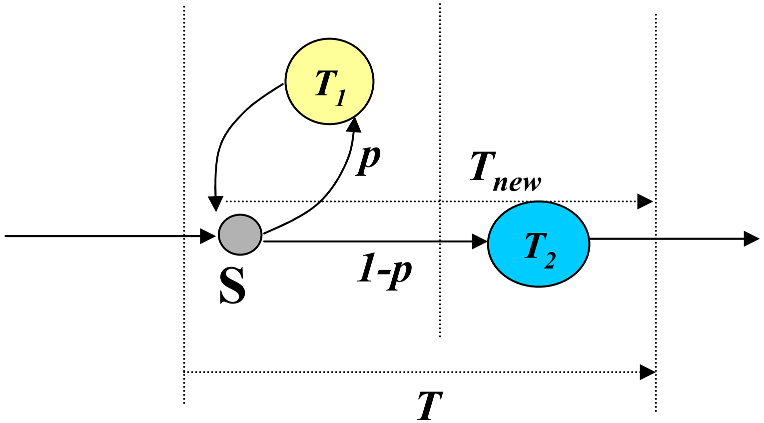


$$\Pr\{X = x_i \;\; and \;\; Y = y_j\} = \frac{N_i M_j}{NM} = \left(\frac{N_i}{N}\right)\left(\frac{M_j}{M}\right)$$

X , Y *ανεξάρτητες τ.μ.* $\Rightarrow \; E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$

Η Αναγεννητική μέθοδος
για τον υπολογισμό μέσων τιμών

- Εφαρμόζεται σε περιπτώσεις επανόδου σε καταστάσεις «λήθης» της ιστορίας (memoryless)



$T = p[T_1 + T_{new}] + (1\text{-}p)\ T_2$

Αν η κατάσταση S είναι αναγεννητική, τότε T_{new} κατανεμημένη όπως η T, άρα

$$E\{T\} = p[E\{T_1\} + E\{T\}] + (1-p)E\{T_2\} = \frac{pE\{T_1\} + (1-p)E\{T_2\}}{1-p}$$

Μετασχηματισμός Laplace (1/2)

$$F^*(s) = E[e^{-sx}] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

Ροπογεννήτρια συνάρτηση
(moment generating function)

$$F^*(s) = E[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{s^k X^k}{k!}] = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{s^k}{k!} m_k \qquad m_k \equiv E[X^k]$$

$$\rightarrow \quad \boxed{m_k \equiv (-1)^k F^{*(k)}(0)}$$

Παράδειγμα: εκθετική κατανομή (exponential distribution)

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad F^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \rightarrow F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{s^k}{\lambda^k}$$

$$m_k \equiv E[X^k] = (-1)^k \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^{(k)}\Bigg|_{s=0} = \frac{k!}{\lambda^k}$$

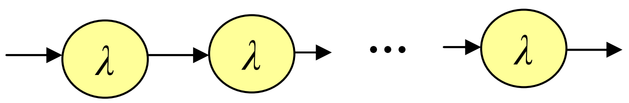
$$\rightarrow \quad m_1 = \frac{1}{\lambda} \qquad m_2 = \frac{2}{\lambda^2} \qquad \sigma^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Μετασχηματισμός Laplace (2/2)

- Άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ. $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

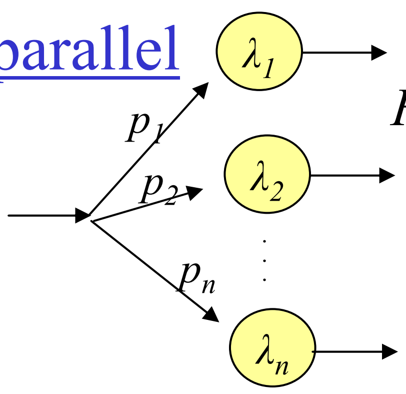
$$\rightarrow \quad F^*(s) = E[e^{s(X_1+X_2+\ldots+X_n)}] = F_1^*(s)F_2^*(s)\ldots F_n^*(s)$$

Παράδειγμα (exponential stages in tandem):



$$F^*(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^n \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$$

- Stages in parallel



$$F^*(s) = p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + s} + \cdots + p_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n + s}$$