



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Επαναληπτική εξέταση στο μάθημα ΦΥΣΙΚΗ Ι 15 Οκτωβρίου 2007

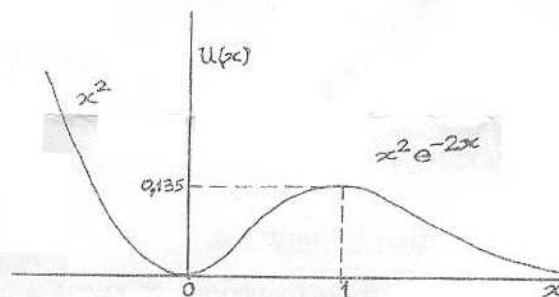
Διδάσκοντες: Α. Απέκης, Κ. Χριστοδουλίδης

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα

**Θέμα 1.** Σώμα μάζας  $m$  κινείται πάνω στον άξονα των  $x$  και η μετατόπισή του ως συνάρτηση του χρόνου είναι  $x(t) = \frac{mv_0}{b} \left( 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$ , όπου  $v_0$  και  $b$  θετικές σταθερές.

- (α) Να βρεθεί η αρχική θέση  $x(0)$ , η ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου,  $v(t)$ , και η αρχική ταχύτητα  $v(0)$  του σώματος και να υπολογιστεί η μετατόπισή του,  $x_{1/2}$ , όταν η ταχύτητά του θα έχει ελαττωθεί στο μισό της αρχικής.
- (β) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο σώμα και να αποδειχθεί ότι είναι δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας.
- (γ) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος ως προς τον χρόνο και να αποδειχθεί ότι είναι ίσος με την ισχύ της δύναμης τριβής.

**Θέμα 2.** Σώμα μάζας  $m = 1 \text{ kg}$  κινείται πάνω στον άξονα των  $x$ . Η δυναμική του ενέργεια δίνεται (βλ. σχήμα), σε μονάδες S.I., από τη σχέση  $U(x) = x^2$  για  $x \leq 0$  και τη σχέση  $U(x) = x^2 e^{-2x}$  για  $x \geq 0$ .



- (α) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα σε κάθε τιμή του  $x$ . Ποια είναι τα σημεία ισορροπίας του σώματος και τι είδους ισορροπία έχουμε σε κάθε σημείο; Γιατί;
- (β) Θεωρήστε ότι το σώμα βρίσκεται στα δεξιά του μεγίστου της  $U(x)$  και κινείται προς τα αριστερά. Η ολική του ενέργεια είναι  $0,2 \text{ J}$ . Περιγράψετε την κίνηση που θα εκτελέσει το σώμα, δίνοντας τις χαρακτηριστικές τιμές της ταχύτητάς του (μέγιστη, ελάχιστη, μηδενική και πού θα έχει την καθεμιά). Σημειώστε ότι  $e^{-2} = 0,135$ .
- (γ) Δείξτε ότι, για τιμές του  $x$  μικρές σε σύγκριση με τη μονάδα, η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι προσεγγιστικά αυτή του απλού αρμονικού ταλαντωτή και βρείτε την αντίστοιχη γωνιακή συχνότητα  $\omega$  για ταλαντώσεις μικρού πλάτους γύρω από το  $x = 0$ .

**Θέμα 3.** Ένας κομήτης μάζας  $m$  κινείται γύρω από τον Ήλιο. Στις κατάλληλες μονάδες, όταν ο κομήτης βρίσκεται σε απόσταση 5 μονάδων μήκους, έχει ολική ταχύτητα  $v = \sqrt{15}$  και εγκάρσια συνιστώσα της ταχύτητας  $v_\theta = \frac{1}{5}\sqrt{79}$ . Στις ίδιες μονάδες είναι  $GM = 40$ , όπου  $G$  είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης και  $M$  η μάζα του Ήλιου.

- (α) Να εξηγήσετε γιατί η ολική ενέργεια του κομήτη και η στροφορμή του ως προς το κέντρο του Ήλιου διατηρούνται, και γιατί η τροχιά του είναι επίπεδη.

⇒⇒⇒

(β) Βρείτε, συναρτήσει της μάζας  $m$  του κομήτη, την ολική του ενέργεια,  $E$ , και τη στροφορμή του,  $L$ , ως προς το κέντρο του Ήλιου. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα για την ολική ενέργεια και τις γνώσεις σας για την κίνηση υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης, για να εξηγήσετε γιατί η τροχιά του κομήτη είναι ελλειπτική, με τον Ήλιο στη μια εστία της έλλειψης. (Η δυναμική ενέργεια του κομήτη δίνεται από τη σχέση  $U(r) = -GMm/r$ , όπου  $r$  είναι η απόστασή του από τον Ήλιο.)

Χρησιμοποιήστε τους νόμους της διατήρησης της στροφορμής και της ενέργειας για να υπολογίσετε την ελάχιστη,  $r_1$ , και τη μέγιστη απόσταση,  $r_2$ , του κομήτη από τον Ήλιο.

**Θέμα 4 (Σχετικότητα).** (α) Τα σωματίδια σε μια δέσμη κινούνται με την ίδια ταχύτητα  $V = \frac{4}{5}c$  στο εργαστήριο. Παρατηρείται ότι αφού τα σωματίδια διανύσουν 300 m στο σύστημα του εργαστηρίου, ο αριθμός τους μειώνεται κατά ένα παράγοντα  $e$  ( $e = 2,71828\dots$ ). Πόση είναι η μέση διάρκεια ζωής  $\tau = 1/\lambda$  των σωματιδίων στο σύστημα ηρεμίας τους;

(β) Σωματίδιο μάζας ηρεμίας  $M$  είναι ακίνητο στο εργαστήριο. Το σωματίδιο διασπάται σε δύο άλλα: ένα με μάζα ηρεμίας  $m_1$  που κινείται με ταχύτητα  $V_1 = \frac{3}{5}c$ , και ένα με μάζα ηρεμίας  $m_2$  που κινείται με ταχύτητα  $V_2 = \frac{4}{5}c$ . Να βρεθούν οι  $m_1$  και  $m_2$  ως κλάσματα της  $M$ . Ποιες είναι οι κινητικές ενέργειες  $K_1$  και  $K_2$  των δύο μαζών, συναρτήσει της  $M$ ;

### Γενικό Τυπολόγιο

$$\vec{F}(r) = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad U(r) = -G \frac{Mm}{r} \quad \vec{L} = M \vec{r} \times \vec{v} \quad \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

$$\text{Νόμος της ραδιενέργειας: } N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-t/\tau}$$

#### Σχετικιστική Κινηματική:

Αν ένα σύστημα αναφοράς  $S'$  κινείται με ταχύτητα  $V \hat{x}$  ως προς ένα σύστημα αναφοράς  $S$ , και οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν όταν  $t = t' = 0$ , τότε:

$$x' = \gamma(x - Vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right) \quad \beta \equiv \frac{V}{c} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\Delta l = \Delta l_0 / \gamma \quad \Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left( 1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left( 1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)}$$

#### Σχετικιστική Δυναμική:

$$m_0 = m(0) \quad m = m(v) = \gamma m_0 \quad p = mV = \gamma m_0 v \quad E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \quad E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

Μετασχηματισμός ορμής-ενέργειας:

$$p'_x = \gamma \left( p_x - \frac{\beta E}{c} \right) \quad p'_y = p_y \quad p'_z = p_z \quad E' = \gamma (E - c\beta p_x)$$

$$\text{Για φωτόνια: } E = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad E = pc$$