

## ΣΕΜΦΕ, Κβαντομηχανική II

Επαναληπτική πτυχιακή εξέταση, 20/10/2007

Διδάσκων Κ.Φαράκος

**Θέμα I.** Σωματίδιο μάζας  $m$  κινείται κατά τον άξονα  $x$  με ιδιοσυνάρτηση βασικής

κατάστασης  $\Psi(x) = \frac{A}{\cosh(\lambda x)}$  όπου  $A, \lambda$  θετικές σταθερές.

Αν η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας  $V(x)$  μηδενίζεται για  $|x| \rightarrow \infty$ : (α) Βρείτε την τιμή της ενέργειας της βασικής στάθμης και (β) βρείτε την μορφή της δυναμικής ενέργειας. Δίνεται ότι:

$$(\cosh \lambda x)' = \lambda \sinh \lambda x, (\sinh \lambda x)' = \lambda \cosh \lambda x, \cosh^2 \lambda x - \sinh^2 \lambda x = 1$$

**Θέμα II.** Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται την

χρονική στιγμή  $t=0$  από την κυματοσυνάρτηση:  $\Psi = N(\psi_{100} - \psi_{211} + \psi_{32,-1})$ ,

όπου  $\psi_{100}$ ,  $\psi_{211}$  και  $\psi_{32,-1}$  κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις του ατόμου του

υδρογόνου. (α) Υπολογίστε τον συντελεστή κανονικοποίησης  $N$  και την χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου. (β) Υπολογίστε τις μέσες τιμές  $\langle l^2 \rangle$ ,  $\langle l_z \rangle$  και  $\langle E \rangle$ , καθώς και την αβεβαιότητα  $\Delta l^2$ .

**Θέμα III.** Οι τελεστές  $a$  και  $a^\dagger$  ορίζονται ως εξής:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

για έναν αρμονικό ταλαντωτή μάζας  $m$  και συχνότητας  $\omega$ . Υπενθυμίζουμε τις ιδιότητες  $a\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1}$ ,  $a^\dagger\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}$  των τελεστών  $a$  και  $a^\dagger$ , όπου  $\Psi_n$  είναι ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

(α) Βρείτε την δράση των τελεστών  $x$  και  $p_x$  στην  $\Psi_n$ .

(β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή του τελεστή  $(xp_x + p_x x)^2$  ως προς την κυματοσυνάρτηση  $\Psi_n$  ενός αρμονικού ταλαντωτή.

**Θέμα IV.** Η αλληλεπίδραση ενός ηλεκτρονίου με ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο

περιγράφεται από την χαμιλτονιανή  $H = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(α) Υπολογίστε τις ενεργειακές στάθμες του ηλεκτρονίου. (β) Την χρονική στιγμή  $t=0$  το σύστημα μετρήθηκε και το σπιν του βρέθηκε στην κατεύθυνση  $-z$ . Γράψτε την κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου. (γ) Βρείτε την κατάσταση του συστήματος για  $t>0$  και υπολογίστε την πιθανότητα να μετρήσουμε το σπιν στην κατεύθυνση  $z$ .

**Θέμα V.** Κβαντομηχανικό σύστημα περιγράφεται από την χαμιλτονιανή

$H = H_0 + V$ . Υποθέτουμε ότι λύνουμε για την χαμιλτονιανή  $H_0$  και ξέρουμε τις

ιδιοσυναρτήσεις της  $\Psi_n^{(0)}$  και τις ιδιοενέργειες  $E_n^{(0)}$ ,  $H_0 \Psi_n^{(0)} = E_n^{(0)} \Psi_n^{(0)}$ .

Εάν θεωρήσουμε τον όρο  $V$  σαν διαταραχή βρείτε την διόρθωση στην ενέργεια σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών. Προσοχή, κάντε όλους τους απαιτούμενους ενδιάμεσους υπολογισμούς. Υποθέστε ότι το δεν έχουμε εκφυλισμό.

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα. Γράψτε τέσσερα από τα πέντε θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες. Με κλειστά βιβλία.

Καλή Επιτυχία.