$$\underbrace{x_1 x_2}_{a} \cdot u_{x_1} \underbrace{- x_1^2}_{b} u_{x_2} \underbrace{- x_2}_{c} \cdot u = \underbrace{x_1 x_2}_{d} \qquad (1)$$

Απαιτούμε $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{b}{a} = - \dfrac{x_1^2}{x_1 x_2}$ $\quad x_1 x_2 \neq 0$

Λύνουμε $\dfrac{dx_2}{dx_1} = - \dfrac{x_1}{x_2}$

$$x_1 dx_1 = -x_2 dx_2$$

$$\int x_1 dx_1 = -\int x_2 dx_2$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = c_1$$

Θέτουμε $\xi(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2} - c_1$ $\qquad (2)$

Παίρνουμε αυθαίρετα $\eta(x_1, x_2) = x_1$

Υπολογίζουμε την Jacobιανή

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \xi_{x_1} & \eta_{x_1} \\ \xi_{x_2} & \eta_{x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} = -x_2 \neq 0$$

Άρα ο μετασχηματιστής είναι ομαλός

Από τον κανόνα της αλυσίδας

$u_{x_1} = u_\xi \xi_{x_1} + u_\eta \eta_{x_1} = u_\xi x_1 + u_\eta$

$u_{x_2} = u_\xi \xi_{x_2} + u_\eta \eta_{x_2} = u_\xi x_2$

Αντικαθιστώντας στην (1)

$x_1 x_2 (u_\xi x_1 + u_\eta) - x_1^2 (u_\xi x_2) - x_2 u = x_1 x_2$

$\cancel{x_1^2 x_2 u_\xi} + x_1 x_2 u_\eta - \cancel{x_1^2 x_2 u_\xi} - x_2 u = x_1 x_2$

$x_1 x_2 u_\eta - x_2 u = x_1 x_2$ (αφού $x_2 \neq 0$)

$x_1 u_\eta - u = x_1$ (αφού $x_1 = \eta$)

$\eta u_\eta - u = \eta$ (3)

Η (3) είναι Σ.Δ.Ε με λύση

$u(\xi, \eta) = f(\xi) \cdot \eta + \eta \ln|\eta|$

Οπότε η τελική λύση είναι

$u(x_1, x_2) = f\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) \cdot x_1 + x_1 \cdot \ln|x_1|$

όπου f αυθαίρετη συνάρτηση που προσδιορίζεται από συνοριακές συνθήκες.

Επαναληπτική 2006 Θέμα 1ο / (α)

$$\left.\begin{aligned} &u_{x_1}+u_{x_2}=u \\ &u(x_1,0)=\cos x_1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Απαιτούμε $\dfrac{dx_2}{dx_1}=1$

Λύνουμε $dx_2=dx_1$

$x_1-x_2=c_1$

Θέτουμε $\xi(x_1,x_2)=x_1-x_2$

και $\eta(x_1,x_2)=x_2$

Υπολογίζουμε την $J=\begin{vmatrix} \xi_{x_1} & \eta_{x_1} \\ \xi_{x_2} & \eta_{x_2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$

Από κανόνα αλυσίδας

$u_{x_1}=u_\xi\cdot\xi_{x_1}+u_\eta\,\eta_{x_1}=u_\xi\cdot 1+u_\eta\cdot 0=u_\xi$

$u_{x_2}=u_\xi\cdot\xi_{x_2}+u_\eta\,\eta_{x_2}=u_\xi(-1)+u_\eta\cdot 1=-u_\xi+u_\eta$

Αντικαθιστούμε στην (1)

$u_\xi+u_\eta-u_\xi=u \iff u_\eta=u \iff u(\eta,\xi)=a(\xi)e^\eta$

Δηλ. $u(x_1,x_2)=a(x_1-x_2)e^{x_2}$

Απαιτώντας την (1), $u(x_1,0)=a(x_1)=\cos(x_1)$

Άρα $a(x_1-x_2)=\cos(x_1-x_2)$

Τελικά $u(x_1,x_2)=\cos(x_1-x_2)\,e^{x_2}$