Γενική Σχετικότητα:

1η Hartley

R. Inverno Introduction Einstein's Relativity

Βασικά Στοιχεία.

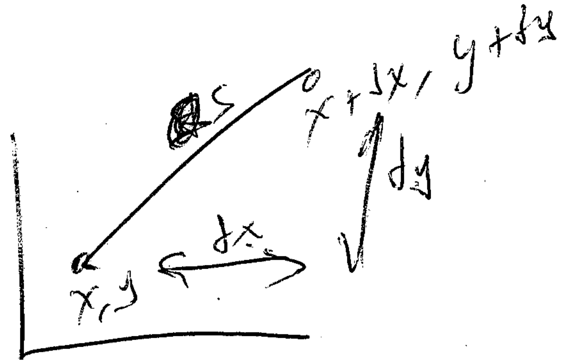
1905 Ειδ. Θεωρ.

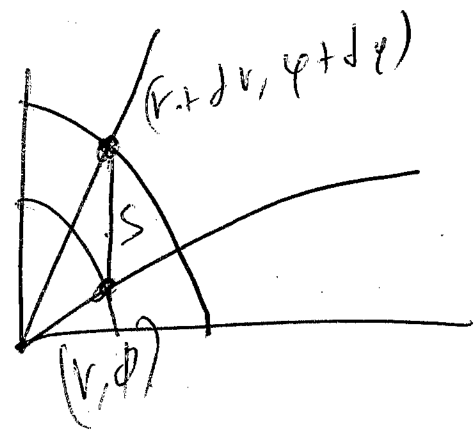
$F \propto G \times \frac{Mm}{r^2}$
$q \times$

Μηχανική φορτίο = μάζα

Ηλεκτρ. φορτία = $= e^-$

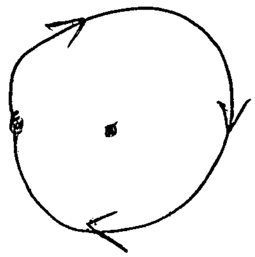
1915: Γενική Θεωρ. Σχετ.





$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r\,d\varphi)^2}$$



$$C = \oint ds = \int \left(dx^2 + dy^2\right)^{1/2} =$$

$$= 2\int_{-R}^{R} dx \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} \ast$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{R^2 - x^2} \ast$$

$$\Rightarrow C = 2\int_{-R}^{R} dx \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} = 2R\int_{-R}^{R} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi R$$

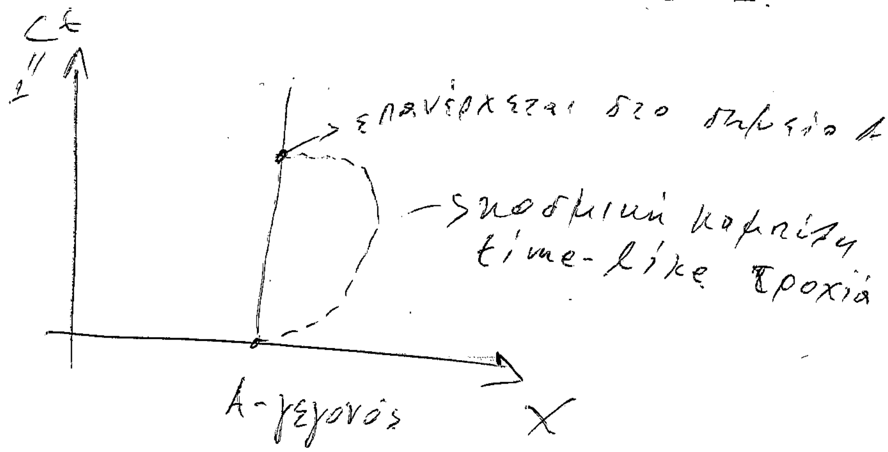
$$x = 2\xi$$
$$dx = 2d\xi$$

Γενική Σχετικ.

όχι Martin
του Hartleγνα
νω

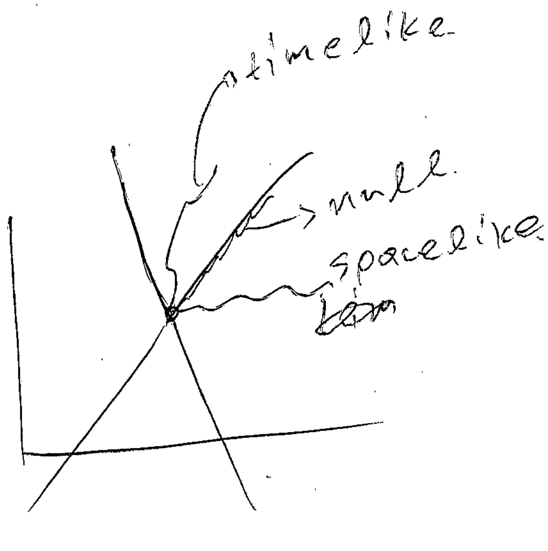
3, 4, 5

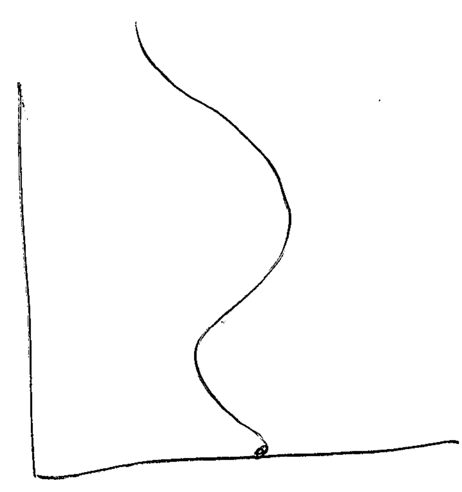
Χωροχρονικό Διάγραμμα.
$c = 1$



$$ds^2 = -c\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- $ds^2 > 0$ spacelike
- $ds^2 = 0$ null
- $ds^2 < 0$ timelike

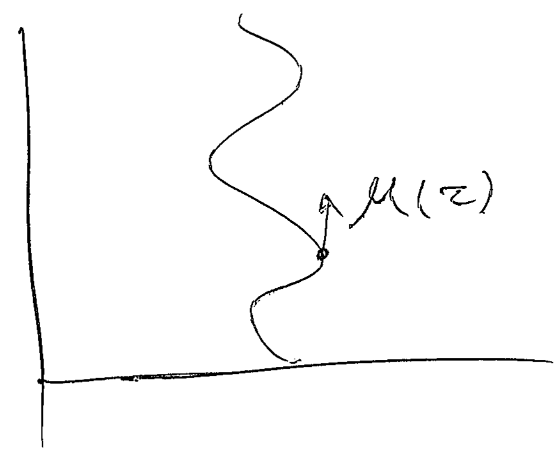


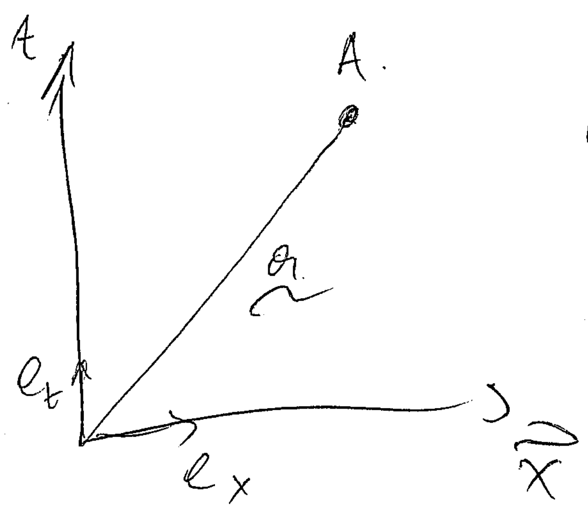


Ορίζω ως ιδιόχρονο τ

$$d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2} \Rightarrow d\tau = \sqrt{-\frac{ds^2}{c^2}} =$$

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)}{c^2}}$$





Ορίζω βάση: e_t, e_x, e_y, e_z

$$\underset{\sim}{a} = a^t e_t + a^x e_x + a^y e_y + a^z e_z$$

$(a^t, a^x, a^y, a^z) \to$ συνιστώσες ~~του~~ 4-διανύσματος η αξίως

$\underset{\sim}{a} = a^0 e_0 + a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3$

Hartle

$\underset{\sim}{a} = \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu e_\mu = a^\mu e_\mu$

1 διάνυσμα 4-διαν.

$a \cdot b = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$

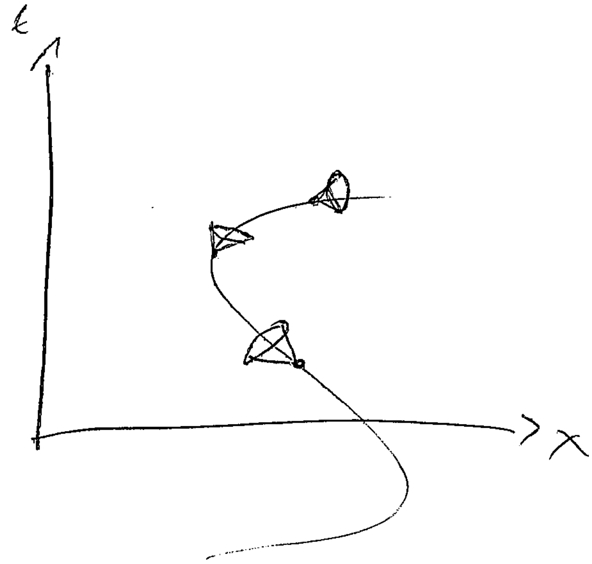
Αν $a = a^a e_a$, $b = b^b e_b$.

$a \cdot b = e_a \cdot e_b \, a^a b^b$

Ορίζω $\eta_{ab} = e_a e_b$

άρα $ab = \eta_{ab} a^a b^b$

Έστω σώμα κινούμενο σε κοσμική διαδρομή $x^a = x^a(\tau)$



$$u^a = \frac{dx^a}{d\tau}$$

$$u^a = (u^0, \vec{v})$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \; ?$$

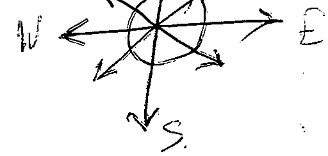
$$d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2} = +dt^2 - \frac{d\vec{x}^2}{c^2} = dt^2\left(1 - \frac{d\vec{x}^2}{dt^2 c^2}\right)$$

$$= dt\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \vec{v}\cdot\gamma$$

$$\boxed{u^a = (\gamma, \gamma\vec{v})}$$



Νορμαλισμός :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

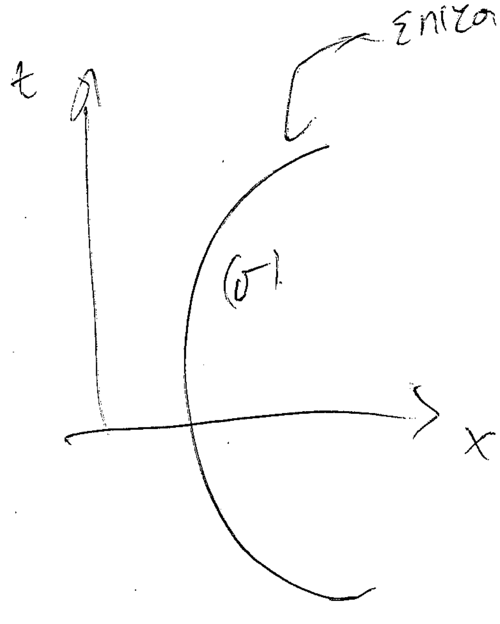
$$\frac{ds^2}{d\tau} = \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -c^2$$

$$= \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -c^2 ,$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{u} = -c^2}$$ Νορμαλισμός

Πχ.

Επιταχυνόμενη κίνηση στον 4-δ.



$$t(\sigma) = a^{-1} \sinh \sigma$$

$$x(\sigma) = a^{-1} \cosh(\sigma)$$

$a =$ σταθ.

σ – παράμετρος $\in (-\infty, +\infty)$

Η καμπύλη έχει εξ. $x^2 - t^2 = a^{-2}$

$d\tau = dt^2 - dx^2$ διότι $d\tau^2 = -ds^2$;

$$d\tau^2 = (a^{-1} \cosh\sigma \, d\sigma)^2 - (a^{-1} \sinh\sigma \, d\sigma)^2 =$$

$$= (a^{-1})^2 (d\sigma)^2 \Rightarrow d\tau^2 = (a^{-1} d\sigma)^2$$

$$\boxed{d\tau^2 = a^{-1} dt}$$

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} = \cosh(a\tau)$$

$$u^x = \frac{dx}{d\tau} = \sinh(a\tau)$$

$$uu = -1 = -(\cosh^2(a\tau) + \sinh^2(a\tau)) = -1$$

$$v^x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{dx/d\tau}{dt/d\tau} = \tanh(a\tau)$$

Σχετικότητα

Κεφ. 7. → μετρική, $\eta_{ab} \to g_{ab}$

Ασκ. 7.2
7.5
7.10
1.14

Κώνος φωτός
ή κόλος

Διανύσματα σε
καμπύλο χωρόχρονο

Γ. Θ. Σ.

$$\boxed{\delta, \gamma, \beta = \begin{matrix}\theta & \varphi \\ 1, & 2\end{matrix} \qquad a=1}$$

Π. 2 $\quad ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$

$$\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{a\delta}\left(\frac{\partial g_{a\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{a\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_{a}}\right)$$

$g^{a\delta} g_{a\delta} = 1 \quad : \quad x^1 = \theta, \; x^2 = \varphi$

$$\Gamma^{1 \to \theta}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{1\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{1\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{1}}\right) \Rightarrow \text{Άρα το } a=1$$

Το $\quad g_{a\beta} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad g_{12} = 0, \; g_{21}$

$$g^{a\delta} = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & (a\sin\theta)^{-2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} g^{11}\left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2} a^{-2}\left(a^2 \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta)\right) =$$

$$= -\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{a^{-2}}\cancel{a^2}\cancel{2}\cos\theta\sin\theta = \cos\theta\sin\theta = -\cos\theta\sin\theta.$$

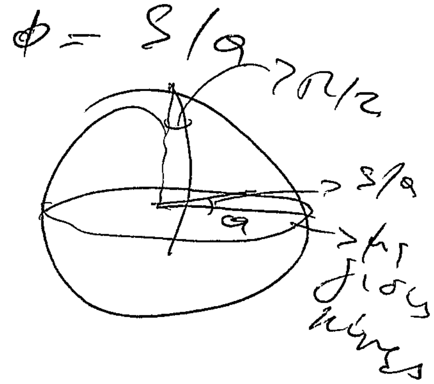
Επίσ: $\Gamma^{1}_{22} = -\sin\theta\cos\theta, \; \Gamma^{2}_{12} = \cot\theta$, όλα τ.

ς μεγίστου κύκλου όπου $\theta = \pi/2$

ελεύθερα

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} = -\Gamma^a_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

contracted.



$$\frac{dx^1}{ds} = 0 , \quad \frac{dx^2}{ds} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{dx^2}{d\tau^2} = -\Gamma^\varphi_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\Gamma^1_{22} \frac{1}{a} \frac{1}{a}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{ds^2} = -\sin\theta \cos\theta \frac{1}{a^2}\Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}} \to 0$$

Άρα ο μέγιστος κύκλος ικανοποιεί την γεωδαισιακή.

2-διαστ. $a, \beta, \gamma = \theta^1, \varphi^2$

3-δ. $a, \beta, \gamma = r, \theta, \varphi,$

$$\Gamma^{\varphi}_{\cancel{\beta}\gamma} = \frac{1}{2} g^{a\varphi}\left(\frac{\partial g_{a\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{a\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{a}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot g^{\varphi\varphi}\left(\frac{\partial g_{\varphi\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\varphi\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial \varphi}\right) =$$

$\boxed{\beta = t, r, \varphi}$

η μετρική διαγ. οπότε $\beta = \varphi$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi r} = \frac{1}{2} r^{-2}$$

Αν (r, t, φ).

ΔΙΣ Πρέπει να βρούμε $\boxed{\Gamma^{r}_{\beta\gamma}, \Gamma^{t}_{\beta\gamma}, \Gamma^{\varphi}_{\beta\gamma}}$

$\boxed{8.9}$

8.3

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$\dot{x}^a = \frac{dx^a}{d\sigma}, \quad \dot{t}, \dot{r}, \dot{\varphi}$$

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x) = \mathcal{L}(\dot{t}, \dot{r}, \dot{\varphi}; r) = \Big[\left(1-2\frac{M}{r}\right)(\dot{t})^2$$

$$\frac{dt}{d\sigma}$$

$$-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\varphi})^2\Big]^{1/2}$$

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(dx^a/d\sigma)}\right) + \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: \quad -\frac{d}{d\sigma}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\sigma}\right] = 0$$

$$\varphi: \quad -\frac{d}{d\sigma}\left[-r^2\frac{d\varphi}{d\sigma}\right] = 0$$

$$r: \quad -\frac{d}{d\sigma}\left[-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{dr}{d\sigma}\right] + \frac{M}{r^2}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2}$$

$$\times \frac{M}{r^2}\left(\frac{dr}{\ }\right)^2 - r\left(\frac{d\varphi}{\ }\right)^2 =$$

Το πουλάκι τσίγκ

— " —

— " —

— " —

είναι

Το κοκοράκι τσι

— " —

— " —

— " —

~~δοκιμα~~

8.9. $ds^2 = -\cancel{X}^2 dT^2 + dx^2$

$x(T)$

α) Ψάχνω συμμετρίες

$T \to T + a.$ $\quad \exists$ killing $\xi = (1,0)$

$-\xi \cdot u = \xi_a u^a = -(1,0) \frac{dx^a}{d\tau} = \varepsilon \Rightarrow$

$u^T = \frac{dT}{d\tau}$ $\Rightarrow$ $x^2 \frac{dT}{d\tau} = \varepsilon$ (1)

$u^T = \frac{dx^A}{d\tau}$

$u^x = \varepsilon,$

$u \cdot u = -1 \Rightarrow g_{ab} \frac{dx^a}{d\tau} \cdot \frac{dx^b}{d\tau} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2 \left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = -1$ (2)

(1): $\frac{dT}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{x^2}$

(2): $\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = -1 + x^2 \left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dx}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{x^2} - 1}$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT/d\tau}{dx/d\tau} = \pm \frac{\epsilon}{x^2}\left(\frac{e^2}{x^2} - 1\right)$$

$$\boxed{T(x) = \pm\cosh^{-1}\left(\frac{e}{x}\right) + T_0}$$

8.11.

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

t : $\xi^t(1,0,0)$

φ : $n(0,0,1) = \xi^\varphi$

$\underline{-\xi u = e}$ and $\underline{\eta \cdot u = l}$ (1)

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \quad u \cdot u = 0 \Rightarrow -\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (2)$$

$$(1) \longrightarrow (2) \Rightarrow \frac{dr}{d\lambda} = \left[e^2 - \frac{l^2}{r^2}\right]^{1/2}$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi/d\lambda}{dr/d\lambda} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right)^{-1/2}, \quad b = \ell/e$$

Riemann συντεταγμένες

→ μία ορθοκανονική βάση

Έστω μια διεύθυνση $\vec{n}$:

Τοπικά Αδρανειακό σύστημα

$$g_{ab} = \eta_{ab}$$

$$\frac{\partial^2 g_{ab}}{\partial x^{a2}} \neq 0$$

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} = -\underbrace{\Gamma^a_{bc}}_{0} \frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau}$$

Εξετάσεις

9: Θα διαβάσουμε μόνο Γεωμ. Schwartzchild και Red shift

Θα λύσουμε 9.3. 9.7

12 κεφ: → βαρυτική κατάρρευση

12.4, 12.5

Διευκρινήσεις

timelike Γεωδεσιακές:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} \qquad (1)$$

Μπορεί να γραφεί σε μία βάση με τις 4-ταχύτητες $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ τα οποία είναι εφαπτομενικά διανύσματα στην timelike worldline

$$(1) \Rightarrow \frac{du^\alpha}{d\tau} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma \qquad (2)$$

τα Christoffel σύμβολα δίδονται από τον τύπο:

$$g_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}\right) \qquad (3)$$

Λύση της (1) ή (2)

Έχουμε:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\,dx^\alpha dx^\beta \qquad (4)$$

Από τον ορισμό του proper time

$$d\tau^2 = -ds^2 \qquad (5)$$

$$(4) \Rightarrow \frac{ds^2}{d\tau^2} = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$$

$$(5) \Rightarrow g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1 \qquad (6)$$

Έστω μία βάση $\{e_\alpha\}$ τότε

$$\vec{a} = a^\alpha \vec{e}_\alpha \; ; \; \vec{b} = b^\beta \vec{e}_\beta$$

το εσωτερικό γινόμενο είναι

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a^\alpha \vec{e}_\alpha)\cdot(b^\beta \vec{e}_\beta)$$

$$= (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta)\, a^\alpha b^\beta$$

Στην γενική περίπτωση έχουμε:

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = g_{\alpha\beta}$$

άρα $\vec{a}\cdot\vec{b} = g_{\alpha\beta}\, a^\alpha b^\beta \quad (7)$

Εάν $\vec{u} \equiv \vec{a}$ τότε από την (7) χρησιμοποιώντας την (6) παίρνουμε:

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = g_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta = -1$$

$$\Longrightarrow \vec{u}\cdot\vec{u} = -1 \quad (8)$$

Αυτή η σχέση δίνει τον νορμαλισμό του $\vec{u}$

Επομένως μία πρώτη σχέση είναι η (8)

Έστω τώρα ότι ο μετασχηματισμός

$$x^1 \longrightarrow x^1 + const$$

αφήνει την μετρική αναλλοίωτη. Τότε το διάνυσμα

$$\xi^{a} = (0, 1, 0, 0) \qquad (9)$$

βρίσκεται στην διεύθυνση στην οποία η μετρική παραμένει αναλλοίωτη. Τότε θα έχουμε τα εξής:

$$\frac{\partial L}{\partial x^1} = 0$$

@ οι Lagrange εξισώσεις γίνονται:

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial(dx^1/d\sigma)}\right) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^1}}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial(dx^1/d\sigma)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial(dx^1/d\sigma)} \equiv \text{σταθ} = \text{διατηρήσιμο μέγεθος}$$

Αλλά:

$$\frac{\partial L}{\partial(dx^1/d\sigma)} = \frac{\partial}{\partial(dx^1/d\sigma)}\left(-g_{1\beta}\frac{dx^1}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\right)^{1/2}$$

χρησιμοποιώντας την

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B \left[-g_{\alpha\beta}(x)\,dx^\alpha dx^\beta\right]^{1/2}$$

$$= \int_0^1 d\sigma\left(-g_{\alpha\beta}(x)\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\right)^{1/2}$$

$$= \int_0^L d\sigma\, L$$

επίσης $\quad d\tau = d\sigma\, L \qquad (10)$

Συνεχίζουμε: $\quad -g_{1\beta}\dfrac{1}{L}\dfrac{dx^\beta}{d\sigma} \overset{10}{=} -g_{1\beta}\dfrac{dx^\beta}{d\tau}$

$$\overset{(9)}{=} -g_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha u^\beta = -\vec{\xi}\cdot\vec{u}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\xi}\cdot\vec{u} = const.} \qquad (11)$$

<u>Παράδειγμα</u>

Γεωδεσιακή στο επίπεδο χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = r\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 \qquad (12)$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\phi}{ds}\right) = 0 \qquad (13)$$

Έστω : $\quad x^1 = r, \; x^2 = \phi$

Τότε το εφαπτομενικό διάνυσμα $u^A = dx^A/ds$ είναι

$$u^A = \left(\frac{dr}{ds}, \frac{d\varphi}{ds}\right)$$

Η μετρική είναι

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \quad ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta = dr^2 + r^2 d\phi^2$$

$$1 = \frac{ds^2}{ds^2} = \frac{dr^2}{ds^2} + r^2 \frac{d\phi^2}{ds^2} \qquad (14)$$

αντιστοιχεί στο $\breve{u} \cdot \breve{u} = 1$

Έχουμε ότι η μετρική είναι ϕ ανεξάρτητη

$$\Rightarrow \exists \quad \xi^A = (\xi^r, \xi^\phi) = (0, 1)$$

$$(11) \Rightarrow \quad \ell = \breve{\xi} \cdot \breve{u} \overset{(7)}{=} g_{AB} \xi^A u^B$$

$$= g_{rr} \xi^r u^\phi + g_{\phi\phi} \xi^\phi u^\phi$$

$$= 0 + r^2 \frac{d\phi}{ds}$$

$$\Rightarrow \quad r^2 \frac{d\phi}{ds} = \ell \qquad (15)$$

$$\cancel{(14) \Rightarrow \frac{dr^2}{ds^2} + r^2 d\phi}$$

$$(14) \Rightarrow \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{ds} = \sqrt{1 - r^2 \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2}$$

$$\frac{dr}{ds} \overset{(15)}{=} \sqrt{1 - \frac{\ell^2}{r^2}} \qquad (16)$$

Άρα: $\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi/ds}{dr/ds} \overset{(15)}{\underset{(16)}{=}} \frac{\frac{\ell}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\ell^2}{r^2}}} = \frac{\ell}{r^2} \left(1 - \frac{\ell^2}{r^2}\right)^{-1/2}$

$$\Rightarrow \quad \phi = \phi_c + \cos^{-1} \frac{\ell}{r}$$

$$\Rightarrow r\cos(\phi - \phi_c) = \ell$$

$$\Rightarrow x \cdot \cos\phi_c + y \sin\phi_c = \ell$$

όπου $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$

$\Rightarrow$ εξίσωση ευθείας

$$\hbar\omega = -\rho^a \cdot \left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1/2} \xi^a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hbar\omega = \left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1/2} \underbrace{\left(-\xi^a \rho^a\right)_R}_{\text{συντηρητικό μέγεθος}}$$

Ο δείκτης R. υποδηλώνει ότι οι ποσότητες υπολογίζονται ~~στις~~ απόσταση R. Όμως επειδή η ποσότητα. ξαρα είναι συντηρητική παραμένει σταθερή στο ∞

Επομένως ~~κατατό~~ αλλαγή συχνότητας στο ∞ είναι.

$$\omega_\infty = \omega_{αρχ} \left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2}$$

<u>Διατηρούμενες ποσότητες:</u>

$\xi^a = (1,0,0,0)$ διότι Sch. μετρική ανεξάρτητη του χρόνου

$n^a = (0,0,1,0)$. διότι Sch. μετρική ανεξάρτητη του φ.

Άρα $\underset{\text{διατ. ενέργ.}}{E} = -\xi^a u^a = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$, $\underset{\text{διατ. στροφορμ.}}{\ell} = n \cdot u = r^2 \sin\theta$

$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\right)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$ //.

Μετατόπιση προς το Ερυθρό:

Ενέργεια φωτονίου από παρατηρητή με ταχύτητα $u_{παρ}$

$E = -p \cdot u_{παρ}$, $E = \hbar\omega$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hbar\omega = -p_\mu u^\mu_{παρ}$ (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$: $u^t_{παρ}(r) \cdot u^t_{παρ}(r) = g_{ab} u^a_{παρ}(r) u^b_{παρ}(r) = -1$

$u^i(r) = 0$

$\Rightarrow g_{tt} u^t_{παρ}(r) u^t_{παρ}(r) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{u^t_{παρ}(r) = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2}}$

Επομένως $u^a_{παρ} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \xi^a$

όπου $\xi^a = (1,0,0,0)$

Γ. Θ. Σ

9.2) Λόγω αρχής ισοδυναμίας

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$: Θέτω τα

$E^2 = p^2 + m^2$.

β) $E = -p\, e_0$, $P = p \cdot e_i$

$$e_{\hat{a}} e_{\hat{b}} = \eta_{ab} \Rightarrow e_t \cdot e_t = g_{tt}\, e_t^2 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} e_t^2 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{e_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}}$$

Ομοίως τα e_i :

$$e_r \cdot e_r = g_{rr}\, e_r^2 = 1 \Rightarrow \boxed{e_r = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}}$$

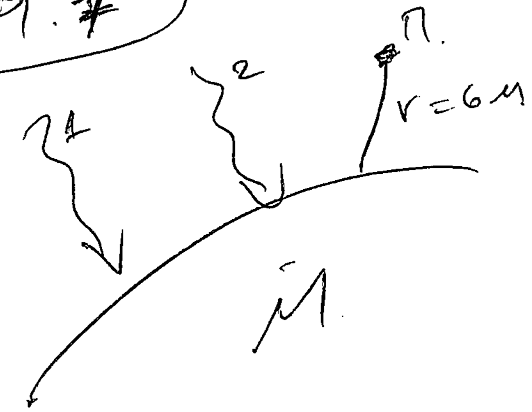
$$E = -p\cdot e_{\hat 0} = -g_{tt}\,p^t e^t_{\hat 0} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)p^t\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2} p^t}$$

Ομοίως από το $p = p\cdot e_{\hat i}$ οι υπόλοιπες συνιστώσες της p^μ

$$\boxed{P = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} p^r}$$

9.7



$$E = -p\cdot e_{\hat 0} = -p\cdot u_{obs}$$

$$u^r_{obs} = u^\varphi_{obs} = u^\theta_{obs} = 0$$

$$e^t_{\hat 0} = u^t_{obs} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2}$$

για light-like

$$E = -p\cdot u_{obs} = -\underbrace{m\,(u}_{p^\mu}\cdot u_{obs}) = -m\,g_{ab}\,u^a u^b_{obs} =$$

$$= -m\left(-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \Rightarrow$$

$$\boxed{E = m\cdot\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2} u^t}$$

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) u^t$$

black hole

e

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} u^t \rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{e}\left(e^2 - 1 + \frac{2M}{r}\right)^{1/2}$$

$$\frac{V(2)}{V(1)} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Βασική Σχέση:

$$E = -p^\mu \underset{\sim}{e}_{\hat{0}} = -p^\mu \underset{\sim}{u}_{obs} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$$

4-διαν.

12.4

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-1} dr + r^2 d\Omega^2$$

$t = v - F(r)$, $F(r) = ;$ για $g_{rr} = 0$

ώστε να αποδοθεί η ιδιομορφία στο $r = M$.

$ds^2 = -(1-\frac{M}{r})dv^2 + 2F'(1-\frac{M}{r})^2 dv\,dr$

$+ \underbrace{\left[(1-\frac{M}{r})^2 - (F')^2(1-\frac{M}{r})^2\right]}_{g_{rr}} dr^2$

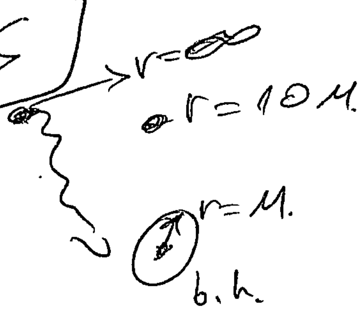
$+ r^2 d\Omega^2$

$\Rightarrow g_{rr} = 0 \Rightarrow F' = (1-\frac{M}{r})^{-1}$

$ds^2 = -(1-\frac{M}{r})^2 dv^2 + 2\,dv\,dr + r^2 d\Omega^2$

$t = , , , , , , , \quad r = M \rightarrow$ ορίζοντας

$\boxed{12.5}$



$, \ l = 0, \ e \neq 0$

$E = -p^\mu u_\mu = \sqrt{m^2 + p^2} \Rightarrow$ V_0 ακινησία

$\Rightarrow$

$u^\mu = \left(\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1/2}, 0, 0, 0\right)$

$u^t = \left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1/2}\Big|_{R=10M} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) u^t = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$u \cdot u = -1 \Rightarrow g_{tt} {u^t}^2 + g_{rr} {u^r}^2 = -1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$$

$$g_{rr} \frac{dr}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = -1 + g_{tt} {u^t}^2$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{g_{rr}} \left(-1 + g_{tt} {u^t}^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau}\right) = \left(\frac{2M}{r} - \frac{1}{5}\right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$d\tau = \frac{dr}{\left(\frac{2M}{r} - \frac{1}{5}\right)^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = \int_0^{10M} dr \left(\frac{2M}{r} - \frac{1}{5}\right)^{-1/2} = \ldots$$

Ασκ.

Κεφ 18.

Διαβάζουμε.

R-W μετρική

Κοσμολογικό red shift

Σύμπαν με ύλη, ακτινοβ. και κενό

18.2
3
4
7