

B

ΣΕΜΦΕ Ζω Εξάμηνο κανονική εξέταση - Μάρτιος 2011 (2-3-11)
Ανάλυση III

Ονοματεπώνυμο



Θ E M A T A

Θ 1. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_D 2y dx dy$, όπου

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 4, x + y \leq 5, x, y \geq 0\}. \quad (1.5\mu)$$

β) i) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Green κάνοντας σχετικό γενικό σχήμα στο οποίο να εμφανίζονται όλες οι έννοιες που αναφέρονται στη διατύπωση του θεωρήματος. (0.60μ)

ii) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{\partial D} \mathbf{F} dr$, όπου ∂D το σύνορο του χωρίου D του ερωτήματος α) και $\mathbf{F} = (x^2 - 1, 2xy)$. (0.40μ)

Θ 2. Δίνεται ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} ορισμένο σε ένα ανοικτό υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^3 .

α) i) Πότε λέμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του \mathbf{F} στο Ω είναι ανεξάρτητο του δρόμου; (0.50μ)

ii) Να δείξετε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του \mathbf{F} στο Ω είναι ανεξάρτητο του δρόμου αν και μόνο αν για κάθε κατά τμήμα C^1 -τάξης κλειστή καμπύλη γ του Ω ισχύει $\oint_{\gamma} \mathbf{F} dr = 0$. (1.00μ)

β) i) Αν το Ω είναι οπλώς συνεκτικός τόπος του \mathbb{R}^3 ποια ικανή και αναγκαία συνθήκη γνωρίζετε ώστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του \mathbf{F} στο Ω να είναι ανεξάρτητο του δρόμου; (0.30μ)

ii) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \int \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ στον κύκλο $x^2 + (y - 2)^2 = 1$. (0.70μ)

Θ 3. Δίνεται το διανυσματικό παδίο $\mathbf{F} = (x^2 - 3x + 1, y, 2z - 2xz)$.

α) Να δείξετε ότι είναι $\text{div } \mathbf{F} = 0$ και να βρείτε ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{G} τέτοιο ώστε $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$. (1.5μ)

β) Με τη βοήθεια του θεωρήματος Stokes (ή διαφορετικά), να υπολογίσετε τη ροή του διανυσματικού πεδίου \mathbf{F} στο τμήμα της σφαίρας $S : x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $z \leq -1$ με θετική όψη την άνω. (1μ)

Θ 4. α) Αν \mathbf{G} είναι ένα χωρίο του \mathbb{R}^3 , όπου εφαρμόζεται το θεώρημα Gauss, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^1 -τάξης βαθμωτή συνάρτηση και \mathbf{F} ένα C^1 -τάξης διανυσματικό πεδίο του \mathbb{R}^3 , να δείξετε:

i) $\text{div}(f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f \text{div } \mathbf{F}$. (0.50μ)

ii) $\iint_{\partial G} f \mathbf{F} dS = \iiint_G [\nabla f \cdot \mathbf{F} + f \text{div } \mathbf{F}] dx dy dz$ (0.50μ)

β) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (-2x, -y, 3z)$. Δείξτε ότι:

i) Το \mathbf{F} είναι σωληνοειδές. (0.25μ)

ii) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$ (χωρίς να υπολογιστεί η f). (0.25μ)

γ) Με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss και των προηγουμένων ερωτημάτων να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S f \mathbf{F} dS$, όπου S η εξωτερική επιφάνεια του κύβου

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 0\}. \quad (1\mu)$$

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ