# ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

## 5ο ΕΞΑΜΗΝΟ - ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

## ΔΕΥΤΕΡΑ 31 ΜΑΡΤΙΟΥ 2014, ΩΡΑ 12.00 - 15.00

**Θέμα (Θ-1)** (Θεώρημα Picard) Έστω $D$ ανοικτό υποσύνολο του $\Re^{n+1}$. Έστω $(t_0, x^0) \in D$ και $a > 0, b > 0$, τέτοια ώστε το σύνολο $R = \{(t,x) : |t - t_0| \le a, |x - x^0| \le b\} \subset D$. Επίσης έστω μια συνεχής συνάρτηση $f$ στο $D$, που ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς $x$ στο $D$. Τότε για την ακολουθία που ορίζεται από τη σχέση $x_{m+1}(t) =: x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_m(s))ds$, $x_0(t) = x^0$ (Επαναλήψεις Picard) να αποδειχθούν: $(i)$ Για κάθε $m$ η $x_m(t)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $[t_0, t_0 + A]$ και αν $t \in [t_0, t_0 + A]$, τότε $|x_m(t) - x_0| \le M|t - t_0|$, όπου $M =: \sup\{|f(t,x)| : (t,x) \in D\}$ και $A =: \min\{a, \frac{b}{M}$, και $(ii)$ η ακολουθία $\{x_m(t)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[t_0, t_0 + A]$ σε μια συνεχή συνάρτηση $x(t)$.

**Θέμα (Θ-2)** (Ανισότητα Gronwall) Έστω $r, k, f$ πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις με $r(t) \ge 0$, $k(t) \ge 0$ και $r(t) \le f(t) + \int_a^t k(s)r(s)ds$, $a \le t \le b$. Να αποδειχθεί ότι

$$r(t) \le \int_a^t f(s)k(s)exp[\int_s^t k(v)dv]ds + f(t), \quad a \le t \le b.$$

**Θέμα (Θ-3)** Να δείξετε ότι αν $f \in C^1(I; \mathbb{R})$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα ανοικτό διάστημα και αν $x^* \in I$ είναι ένα σταθερό σημείο της $f$ με $|f'(x^*)| < 1$ , τότε το $x^*$είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές για το δυναμικό σύστημα $x^+ = f(x)$.

***** Να γραφούν ΔΥΟ (2) από τα θέματα (Θ-1)-(Θ-3) *****

**Θέμα (Π-1)** Να αποδειχθεί ότι υπάρχει λύση των παρακάτω προβλημάτων αρχικών τιμών σε μία περιοχή του $x = 0$. Στη συνέχεια να εξεταστεί το μονοσήμαντο των λύσεων.

$$(i)\ y'(x) = [x - \sin(y(x))]^{\frac{5}{4}}, \quad y(0) = 0 \text{ και } (ii)\ y'(x) = [x - \cos(y(x))]^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0.$$

**Θέμα (Π-2)** (i) Για ποιές τιμές του $c \in \mathbb{R}$, το δυναμικό σύστημα $x^+ = x^2 + x + c$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει σημεία ισορροπίας; Να εξεταστούν οι ιδιότητες ευστάθειας των σημείων ισορροπίας. (ii) Για ποιές τιμές του $c \in \mathbb{R}$, το δυναμικό σύστημα $x^+ = x^2 + x + c$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει μια περιοδική λύση με ελάχιστη περίοδο 2;

**Θέμα (Π-3)** Έστω το σύστημα $x' = y$, $y' = ax^3 - x - y$. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία του συστήματος και να μελετηθεί η ευστάθεια αυτών για κάθε τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$.

**Θέμα (Π-4)** Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης, να περιγραφούν οι τροχιακές δομές για τα διάφορα πεδία μεταβολής της παραμέτρου $\lambda$ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης της διαφορικής εξίσωσης: $x' = \lambda^2 - 4\lambda x + 2x^2$.

**Θέμα (Π-5)** Να βρεθεί ο τύπος ευστάθειας της αρχής, για τα διάφορα πεδία μεταβολής της παραμέτρου $\lambda$, του συστήματος: $x' = -x + y + x^2 + \lambda x^3$, $y' = x - y + \lambda x^2 + 3xy$.

***** Να γραφούν ΤΡΙΑ (3) από τα θέματα (Π-1)-(Π-5) *****

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ - ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 9

*ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!*