ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

29-8-2016

Άσκηση 1. *Δίνεται η καμπύλη* $C: \ r(t) = (t, 1 + t^{-1}, -t + t^{-1})\ t > 0$.

(a) *Να βρεθεί το τρίεδρο Frenet και το κέντρο καμπυλότητας της καμπύλης* C *στο σημείο* $r(1)$

(b) *Δείξτε ότι η καμπύλη είναι επίπεδη και προσδιορίστε το επίπεδο στο οποίο κείτεται.*

Άσκηση 2. *Έστω η επιφάνεια*

$$S: r(u,v) = (u + v, 2uv, \cos(u)),\ (u,v) \in \mathbf{R}^2$$

και έστω και έστω η καμπύλη $\phi(t) = r(u(t), v(t)),\ t \in I$ *της επιφάνειας.*

(a) *Δώστε τον ορισμό της διεύθυνσης της καμπύλης στο σημείο* $\phi(t_0)$.

(b) *Αν* $\phi(1) = r(0,1)$ *και* $\phi'(1) = (3,4,0)$, *προσδιορίστε την κάθετη καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο* $\phi(1)$.

Άσκηση 3. *Έστω η επιφάνεια που παράγεται απο την περιστροφή της καμπύλης* $g(t) = (t, 0, e^{-t}),\ t \in (1,2)$ *του επιπέδου* xoy *περί τον άξονα των* z. *Παραστήστε γραφικά την επιφάνεια, τις παραμετρικές καμπύλες και εξετάστε αν οι παραμετρικές καμπύλες της επιφάνειας είναι γεωδαισιακές.*

Άσκηση 4. *Έστω η απεικόνιση* $f: S \to \overline{S}$, *όπου*

$$S: r(\phi,\theta) = (R\cos\phi\cos\theta, R\cos\phi\sin\theta, R\sin\phi), \phi \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}), \theta \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

τμήμα της επιφάνειας της σφαίρας κέντρου 0 *και ακτίνας* R *και* $\overline{S}$ *η επιφάνεια του κυλίνδρου με άξονα τον άξονα των* z, *και ακτίνα* R.

Αν $f(\phi, \theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta, R\tan\phi)$, *παραστήστε γραφικά την επιφάνεια* S *και την εικόνα* $S^* = f(S)$ *της* S *στην* $\overline{S}$. *Δώστε τον αντίστοιχο ορισμό και εξετάστε αν η απεικόνιση* f *είναι ισομετρική.*

Θέμα 5. *Δείξτε ότι για τη στοιχειώδη επιφάνεια* $S: r(u,v),\ (u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, *κλάσης 2, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) *Η καμπύλη* $u = u_0$ *είναι γεωδαισιακή της* S,

(ii) $\Gamma^1_{22} = 0$,

(iii) $GG_1 + FG_2 - 2GF_2 = 0$,

όπου τα διάφορα μεγέθη της επιφάνειας που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις υπολογίζονται στο (u_0, v).

Διάρκεια 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία.