ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Τομέας Μαθηματικών
Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, ΣΕΜΦΕ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ, ΟΜΑΔΑ Α, 19-9- 2016

Θέμα1°: α) Δώστε ένα παράδειγμα μιας εξίσωσης παραβολικού τύπου για την g(x) με $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. **(μον.0.25)**

β) Η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών: $\Delta u(\rho,\phi,t) = u_{tt}(\rho,\phi,t), 0 \le \rho < 4, 0 \le \phi < 2\pi, t > 0, u(4,\phi,t) = 0, u(\rho,\phi,0) = g(\rho,\phi), u_t(\rho,\phi,0) = 0$, όπου η συνάρτηση g είναι γνωστή συνάρτηση, δίνεται από τη σχέση

$u(\rho,\phi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_{nm}\rho}{4}\right)(a_{nm}\cos n\phi + b_{nm}\cos n\phi)\cos\left(\frac{\mu_{nm}}{4}t\right)$. Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_{25} , b_{12}, αν δίδεται η σχέση $\int_0^4 J_n\left(\frac{\mu_{nm}\rho}{4}\right) J_n\left(\frac{\mu_{nk}\rho}{4}\right)\rho d\rho = \frac{4^2}{2}\left[J_{n+1}(\mu_{nm})\right]^2 \delta_{mk}$.

(μον.1)

Θέμα2°: α) Αν η $u(x,t)$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών- συνοριακών τιμών $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), 0 < x < 4, t > 0, u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = 0, u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$, να δειχθεί ότι η λύση είναι μοναδική. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το $J(t) = \frac{1}{2}\int_0^4\left(u_x^2(x,t) + u_t^2(x,t)\right)dx$).

(μον. 1.25)

β) Να υπολογιστεί η σταθερά Α, με πλήρη δικαιολόγηση της διαδικασίας, ώστε το πρόβλημα

$\Delta u(\rho,\varphi) = \rho^3 \sin 2\varphi, 2 < \rho < 3, 0 \le \varphi < 2\pi$

$\frac{\partial u(2,\varphi)}{\partial \rho} = A + 2, \frac{\partial u(3,\varphi)}{\partial \rho} = \cos 2\varphi$

να είναι επιλύσιμο και να καταγραφούν τα προβλήματα που πρέπει να επιλυθούν. Δίνεται ο τελεστής Laplace σε πολικές συντεταγμένες

$\Delta u(\rho,\varphi) = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}$. **(μον.1)**

γ) Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$\Delta u(r,\theta,\varphi) = 0, 0 \le r < 5, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi, u(5,\theta,\varphi) = 2 + 8\cos\theta$.

Δίνονται η εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες

$\Delta u(r,\theta,\varphi) = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}u_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} = 0$, και τα πολυώνυμα Legendre

$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. **(μον. 1.5)**

Θέμα 3° : Έστω το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \qquad 0 < x < \pi$$
$$y(0) + y'(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0$$

α) Να προσδιορίσετε όλες τις ιδιοτιμές του. **(μον. 1.5)**

β) Έστω συνεχής συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο $[0,\pi]$ που λαμβάνει αποκλειστικά θετικές τιμές. Να μελετήσετε την επιλυσιμότητα του μη ομογενούς προβλήματος:

$$y''(x) - y(x) = (3e^x - 2e^{-x})\cosh x\, f(x), \qquad 0 < x < \pi$$
$$y(0) + y'(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0$$

(μον. 1)

Θέμα 4° : Να λύσετε με τη βοήθεια ολοκληρωτικού μετασχηματισμού το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \qquad x, y > 0,$$
$$u(0,y) = 0, \; y \ge 0, \qquad u(x,0) = f(x), \qquad x > 0$$

όπου $f(x)$ απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $(0,\infty)$, προσδιορίζοντας μια ολοκληρωτική αναπαράσταση για την $u(x,y)$, συναρτήσει της $f(x)$ αυτής καθεαυτής. **(μον. 2.5)**

<u>Δίδονται</u> : $\hat{u}(k,y) = \int_0^\infty u(x,y)\sin(kx)dx$, $u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \hat{u}(k,y)\sin(kx)dk$,

$\int_0^\infty e^{-sw}\sin(\lambda w)dw = \frac{\lambda}{\lambda^2+s^2}$, $\int_0^\infty e^{-sw}\cos(\lambda w)dw = \frac{s}{\lambda^2+s^2}$,

$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Τομέας Μαθηματικών

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, ΣΕΜΦΕ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ, ΟΜΑΔΑ Β, 19-9- 2016

Θέμα1°: α) Δώστε ένα παράδειγμα μιας εξίσωσης υπερβολικού τύπου για την g(x) με $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. **(μον.0.25)**

β) Η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών: $\Delta u(\rho, \phi, t) = u_{tt}(\rho, \phi, t), 0 \leq \rho < 2, 0 \leq \phi < 2\pi, t > 0, u(2, \phi, t) = 0, u(\rho, \phi, 0) = f(\rho, \phi), u_t(\rho, \phi, 0) = 0$, όπου η συνάρτηση f είναι γνωστή συνάρτηση, δίνεται από τη σχέση

$u(\rho, \phi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_{nm}\rho}{2}\right)\left(a_{nm} \cos n\phi + b_{nm} \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\, n\phi\right) \cos\left(\frac{\mu_{nm}}{2} t\right)$. Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_{35} , b_{42}, αν δίδεται η σχέση $\int_0^2 J_n\left(\frac{\mu_{nm}\rho}{2}\right) J_n\left(\frac{\mu_{nk}\rho}{2}\right) \rho d\rho = \frac{2^2}{2}\left[J_{n+1}(\mu_{nm})\right]^2 \delta_{mk}$.

(μον.1)

Θέμα2°: α) Αν η $u(x, t)$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών- συνοριακών τιμών $u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t), 0 < x < 3, t > 0, u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x), u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$, να δειχθεί ότι η λύση είναι μοναδική. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το $J(t) = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)\right) dx$).

(μον. 1.25)

β) Να υπολογιστεί η σταθερά Α, με πλήρη δικαιολόγηση της διαδικασίας, ώστε το πρόβλημα

$$\Delta u(\rho, \varphi) = \rho^2 \sin\varphi, 2 < \rho < 4, 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$\frac{\partial u(2, \varphi)}{\partial \rho} = \mathrm{A} + 1, \frac{\partial u(4, \varphi)}{\partial \rho} = \sin 2\varphi$$

να είναι επιλύσιμο και να καταγραφούν τα προβλήματα που πρέπει να επιλυθούν. Δίνεται ο τελεστής Laplace σε πολικές συντεταγμένες

$\Delta u(\rho, \varphi) = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}$. **(μον.1)**

γ) Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = 0, 0 \leq r < 7, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi, u(7, \theta, \varphi) = 5 + \cos\theta .$$

Δίνονται η εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες

$\Delta u(r, \theta, \varphi) = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta} u_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} u_{\varphi\varphi} = 0$, και τα πολυώνυμα Legendre

$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. **(μον. 1.5)**

Θέμα 3° : Έστω το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \qquad 0 < x < \pi$$
$$y(0) + y'(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0$$

α) Να προσδιορίσετε όλες τις ιδιοτιμές του. **(μον. 1.5)**

β) Έστω συνεχής συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο $[0, \pi]$ που λαμβάνει αποκλειστικά αρνητικές τιμές. Να μελετήσετε την επιλυσιμότητα του μη ομογενούς προβλήματος:

$$y''(x) + y(x) = (\cos x + \sin x)\cos(2x) f(x), \qquad 0 < x < \pi$$
$$y(0) + y'(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0$$

(μον.1)

Θέμα 4° : Να λύσετε με τη βοήθεια ολοκληρωτικού μετασχηματισμού το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \qquad x, y > 0,$$
$$u(0, y) = g(y), \ \ y > 0, \qquad u(x, 0) = 0, \qquad x \geq 0$$

όπου $g(y)$ απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $(0, \infty)$, προσδιορίζοντας μια ολοκληρωτική αναπαράσταση για την $u(x, y)$, συναρτήσει της $g(y)$ αυτής καθεαυτής. **(μον. 2.5)**

<u>Δίδονται</u> : $\hat{u}(x, k) = \int_0^\infty u(x, y) sin(ky) dy$, $u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \hat{u}(x, k) sin(ky) dk$,

$\int_0^\infty e^{-sw} sin(\lambda w) dw = \frac{\lambda}{\lambda^2 + s^2}$, $\int_0^\infty e^{-sw} cos(\lambda w) dw = \frac{s}{\lambda^2 + s^2}$,

$2 sina\, sinb = \cos(a - b) - \cos(a + b)$.