Θέμα1^o: α)Να προσδιοριστεί ο τύπος της εξίσωσης

$(2+x_2^2)u_{x_1x_1}+x_2^2u_{x_2x_2}+2x_3^2u_{x_3x_3}+5u_{x_1}+u=0$ **(μον. 0.25)**

β)Να γραφεί η ημιτονική σειρά Fourier για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}0, 0\le x<1\\ x-1, 1\le x<2\end{cases}$

Πού συγκλίνει για τις τιμές x=-4,x=6. **(μον.0.5)**

Θέμα 2^o :α) Αν η $u(x,t)$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών- συνοριακών τιμών $u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t), 0<x<3, t>0, u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=g(x), u_x(0,t)=u_x(3,t)=0,$ να δειχθεί ότι η λύση είναι μοναδική.(Υπόδειξη:Χρησιμοποιήστε το $J(t)=\frac{1}{2}\int_0^3(v_x^2(x,t)+v_t^2(x,t))dx$) **(μον. 1.25)**

β) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$\Delta u(\rho,\varphi,t)=u_{tt}, 0\le\rho<2, 0\le\varphi<2\pi, t>0, u(2,\varphi,t)=0, u(\rho,\varphi,0)=J_4(\frac{\lambda_{44}}{2}\rho)\sin 4\varphi, u_t(\rho,\varphi,0)=0$

Δίνεται ο τελεστής Laplace σε πολικές συντεταγμένες $\Delta u(\rho,\varphi)=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}$,

(μον.1.5)

β) Να υπολογιστεί η σταθερά Α, με πλήρη δικαιολόγηση της διαδικασίας ώστε το πρόβλημα να είναι επιλύσιμο

$\Delta u(\rho,\varphi)=\rho^2\sin 4\varphi, 2<\rho<5, 0\le\varphi<2\pi$

$\frac{\partial u(2,\varphi)}{\partial\rho}=1, \frac{\partial u(5,\varphi)}{\partial\rho}=A+\sin\varphi$ **(μον.0.75)**

γ) Να καταγραφούν τα προβλήματα που πρέπει να επιλυθούν, χωρίς να λυθούν, για να βρεθεί η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$\Delta u(x_1,x_2)=6, (x_1,x_2)\in(0,3)\times(0,3),$

$u(0,x_2)=u(x_1,0)=u(3,x_2)=0, u(x_1,3)=x_1^2+4$ **(μον.0.75)**

Θέμα 3^o : Έστω το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$(1+x^4)y''(x)+4x^3y'(x)+\lambda y(x)=0, \quad 0<x<\pi, \ y'(0)=y(\pi)=0.$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος <u>**αποκλειστικά**</u> θετικών ιδιοτιμών $\lambda=\lambda_n, n\in N$. **(μον. 1)**

β) Να δείξετε ότι αν y_n, y_m είναι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές τότε $\int_0^\pi(1+x^4)\,y_n'(x)y_m'(x)dx=0$. **(μον. 1)**

γ) Δείξτε ότι το πρόβλημα $(1+x^4)y''(x)+4x^3y'(x)-y(x)=4x^3\pi-x,$ $0<x<\pi, \ y'(0)=\pi, y(\pi)=\pi^2$ έχει μοναδική λύση **(μον. 0.5)**

Θέμα 4^o : α) Να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση $\frac{e^{-kr}}{4\pi r}$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $\Delta\,G(r)-k^2G(r)=-\delta(\vec r)$ όπου $\vec r=r\,\hat r$ το διάνυσμα θέσης στον R^3. **(μον. 1)**

β) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=e^{-x}, \quad x>0, \quad t>0$$

$u(0,t)=e^{-t}-1, \ t\ge 0, \quad u(x,0)=0, \ u_t(x,0)=-e^{-x}, \ x\ge 0.$ **(μον. 1.5)**

<u>Υπόδειξη</u> : Αν δουλέψετε με κάποιον μετασχηματισμό Fourier θα χρειαστείτε έναν από τους τύπους $\int_0^\infty e^{-ax}\sin(kx)dx=\frac{k}{k^2+a^2}$ και $\int_0^\infty e^{-ax}cos(kx)dx=\frac{a}{k^2+a^2}$.

Διάρκεια Εξέτασης 3 ώρες, Καλή Επιτυχία