

**Φυσική IV (Κβαντομηχανική-I), ΣΕΜΦΕ 4<sup>ο</sup> Εξ., Ακ. Έτος 2015-2016**

**Κανονική εξέταση**

**Διδάσκων: Γ. Ζουπάνος**

**Συνεργάτες: Κ. Ντρέκης, Γ. Πατέλλης**

**Τετάρτη 22.06.2016 8:30, Διάρκεια 2.5 ώρες**

**Θέμα 1.** Το 1977 στο Fermilab ανακαλύφθηκε ότι το στοιχειώδες σωματίδιο  $b$  (*beauty*), μάζας  $m_b = 4.2\text{GeV}$ , και το αντισωματίδιό του  $\bar{b}$  μπορούν να σχηματίσουν μια δέσμια κατάσταση που ονομάστηκε μεσόνιο  $Y$ . Λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τις μη - διαταρακτικές επιδράσεις της κβαντικής χρωμοδυναμικής ( $QCD$ ) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα σωματίδια  $b, \bar{b}$  κινούνται σε ένα στατικό δυναμικό

$$V(r) = Br$$

όπου  $B$  θετική σταθερά.

- Εφαρμόστε τη συνθήκη κβάντωσης του Bohr για να υπολογίσετε τις ενεργειακές στάθμες του συστήματος.
- Υπολογίστε τη συχνότητα της ακτινοβολίας που εκπέμπεται όταν το σύστημα μεταπίπτει από την πρώτη διεγερμένη στη θεμελιώδη του κατάσταση.

**Υπόδειξη:** Το σύστημα των σωματιδίων  $b$  και  $\bar{b}$  ίδιας μάζας ( $m_b = m_{\bar{b}}$ ) που περιστρέφονται γύρω από το κέντρο βάρους τους είναι ισοδύναμο με το σύστημα κατά το οποίο ένα σώμα με ανηγμένη μάζα

$$M = \frac{m_b m_{\bar{b}}}{m_b + m_{\bar{b}}} = \frac{m_b^2}{2m_b} = \frac{m_b}{2}$$

περιστρέφεται γύρω από σταθερό σημείο.

**Θέμα 2.** Σωματίδιο με μάζα  $m$  είναι περιορισμένο σ' ένα μονοδιάστατο κουτί με αδιαπέραστα τοιχώματα, δηλαδή σε δυναμικό

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } 0 < x < a, \\ +\infty & \text{για } x \leq 0 \text{ ή } x \geq a \end{cases}$$

Οι κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις για τις στάσιμες καταστάσεις έχουν τη μορφή  $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Θεωρήστε ότι το σωματίδιο βρίσκεται τη χρονική στιγμή  $t = 0$  στην κατάσταση

$$\psi(x, 0) = N \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

- Υπολογίστε τον συντελεστή  $N$  ώστε η  $\psi(x, 0)$  να γραφτεί ως κανονικοποιημένος γραμμικός συνδυασμός των ιδιοκαταστάσεων  $\psi_n(x)$ .

β) Υπολογίστε την πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στην κατάσταση με ενέργεια  $E = \frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$  μετά από χρόνο  $t$ .

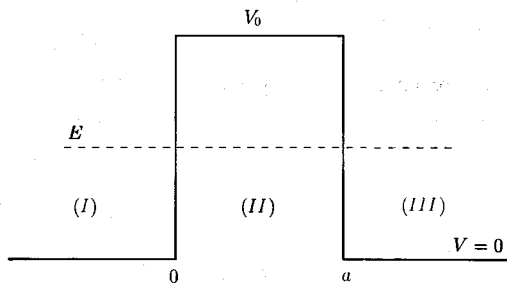
γ) Έστω ότι γίνεται μέτρηση της ενέργειας του σωματιδίου και βρίσκεται  $E = \frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ . Ποιά είναι η πιθανότητα να μετρήσουμε ενέργεια  $E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$  σε χρόνο  $t$  αμέσως μετά τη μέτρηση;

Υπόδειξη: Ισχύει η σχέση  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ .

**Θέμα 3.** Δέση σωματιδίων μάζας  $m$  προσπίπτει από αριστερά σε δυναμικό της μορφής

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ V_0 & , \quad 0 < x < a \\ 0 & , \quad x > a \end{cases}$$

με ενέργεια  $E = \frac{V_0}{2}$ .



α) Να βρείτε τη μορφή της κυματοσυνάρτησης παντού στο χώρο.

β) Να υπολογίσετε το ρεύμα πιθανότητας της προσπίπτουσας δέσμης στην περιοχή (I),  $J_{\text{πίο}}^{(I)}$ , καθώς ρεύμα πιθανότητας της διερχόμενης δέσμης στην περιοχή (III),  $J_{\text{ε}}^{(III)}$ .

γ) Χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες δείξτε ότι ο συντελεστής διέλευσης έχει τη μορφή

$$T = \frac{4e^{2a\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}}}{(e^{2a\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}} + 1)^2}$$

**Θέμα 4.** Ένα σωματίδιο μάζας  $m$  και γωνιακής συχνότητας  $\omega$  περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x,t) = N \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar} - \frac{i\omega t}{2}\right)$$

α) Βρείτε την έκφραση για τη διάσταση του συντελεστή  $N$  συναρτήσει των διαστάσεων  $[m]$ ,  $[\omega]$  και  $[\hbar]$ .

β) Βρείτε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας  $V(x)$  ώστε η  $\psi(x,t)$  να ικανοποιεί την χρονοεξαρτώμενη εξίσωση του Schrödinger.

γ) Θεωρήστε ότι για το μονοδιάστατο αυτό πρόβλημα ισχύει

$$\frac{d\langle \hat{x}\hat{p} \rangle}{dt} = 2\langle K \rangle - \left\langle x \frac{dV(x)}{dx} \right\rangle$$

όπου  $K$  η κινητική ενέργεια και  $V(x)$  η δυναμική. Δείξτε ότι  $\langle K \rangle = \langle V \rangle$  για την παραπάνω κατάσταση.

δ) Αν  $N = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$ , να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\langle \psi(x,t) | \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} | \psi(x,t) \rangle$

**Η εξέταση πραγματοποιείται με ανοικτά βιβλία αλλά ΟΧΙ προσωπικές σημειώσεις.**

**Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.**

**Καλή επιτυχία.**