Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστήμων
Τομέας Μαθηματικών

Θεωρία Γραφημάτων
6 Φεβρουαρίου 2018

- **Διάρκεια: 2 ½ ώρες.**
- **Καλή επιτυχία.**

Θέμα 1ο [redacted]

Ένα **τουρνουά (tournament)** είναι ένα πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V$, ακριβώς μία από τις ακμές (u, v), (v, u) ανήκει στο E.
Δείξτε ότι σε κάθε τουρνουά με n κορυφές υπάρχει μια κορυφή-βασιλιάς, δηλαδή μια κορυφή u από την οποία υπάρχει μονοπάτι προς οποιαδήποτε άλλη κορυφή μήκους το πολύ δύο.

Θέμα 2ο [redacted]

Έστω ότι σε ένα απλό συνεκτικό γράφημα G οι κύκλοι περιττού μήκους έχουν ανά δύο τουλάχιστον μία κοινή ακμή (δηλαδή δεν υπάρχει ζευγάρι περιττών κύκλων που να είναι πλευρικά ξένοι). Τότε, για το χρωματικό αριθμό του G ισχύει ότι $\chi(G) \leq 4$.

Θέμα 3ο [redacted]

Έστω απλό γράφημα G με ακολουθία βαθμών $d = d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n)$ έτσι ώστε για κάθε αριθμό k με $k \leq n - 1 - d(v_1)$ να ισχύει $d(v_{n-k+1}) \geq k$. Δείξτε ότι το G είναι συνεκτικό.

Θέμα 4ο [redacted]

Έστω απλό γράφημα G_1. Υπάρχει απλό γράφημα G το οποίο να περιέχει το G_1 ως **κέντρο** (δηλαδή το επαγόμενο υπογράφημα του G που ορίζεται από το κέντρο του να είναι το G_1)? Βρείτε ένα τέτοιο γράφημα G ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχει.