

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες):**

**A)** Έστω ότι επιθυμούμε να μελετήσουμε το χρόνο που κάνει ο συρμός του μετρό για να μεταβεί από το Μέγαρο Μουσικής στο Σύνταγμα. Χρονομετρώντας τη διαδρομή αυτή 5 φορές σε 5 τυχαίους συρμούς σημειώνουμε τους χρόνους (σε δευτερόλεπτα)

137, 151, 157, 152, 160.

Αν υποθέσουμε ότι οι χρόνοι ακολουθούν την κανονική κατανομή να κατασκευαστεί και να δοθεί ένα 99% συμμετρικό Δ.Ε. για την τυπική απόκλιση του χρόνου μετάβασης.

**B)** Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[3\theta, 4\theta]$ , όπου  $\theta > 0$  άγνωστη παράμετρος. Να βρεθεί συμμετρικό προσεγγιστικό 100  $(1-\alpha)\%$  Δ.Ε. για την παράμετρο  $\theta$ .

**ΘΕΜΑ 2 (2.5 μονάδες):**

**A)** Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την κατανομή Γάμμα με άγνωστες παραμέτρους  $\alpha, \beta > 0$ .

i) Να δειχθεί ότι το ζεύγος  $\left( \sum_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n X_i \right)$  αποτελεί επαρκή δειγματοσυνάρτηση για το  $(\alpha, \beta)$ .

ii) Είναι το ζεύγος  $\left( \sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n \log X_i \right)$  επαρκής δειγματοσυνάρτηση για το  $(\alpha, \beta)$ ; Εξηγήστε.

iii) Είναι το ζεύγος  $\left( \sum_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n X_i \right)$  επαρκής δειγματοσυνάρτηση για το  $(\beta, \alpha)$ ; Εξηγήστε.

iv) Είναι η δειγματοσυνάρτηση  $\sum_{i=1}^n X_i$  επαρκής για την παράμετρο  $\alpha$ ; Εξηγήστε.

**B)** Έστω  $X_1 = X$  ένα τυχαίο δείγμα μίας παρατήρησης από την κατανομή Poisson με άγνωστη παράμετρο  $\lambda > 0$ . Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας  $1/\lambda$ .

(Υπενθυμίζουμε ότι  $e^\lambda = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$ ).

**ΘΕΜΑ 3 (2.5 μονάδες):**

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την Εκθετική κατανομή με μέση τιμή  $\theta > 0$ , όπου  $\theta$  άγνωστη παράμετρος.

i) Να δείξετε ότι ο δειγματικός μέσος αποτελεί αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\theta$ .

ii) Αν  $Y = \min X_i$  και  $Z = nY$  να δείξετε ότι η  $Z$  είναι επίσης αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\theta$ .

iii) Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell να αποφανθείτε ποια από τις παραπάνω δύο αμερόληπτες εκτιμήτριες του  $\theta$  θα επιλέγατε.

iv) Να υπολογίσετε το Cramer-Rao κατώτατο φράγμα διασποράς των αμερόληπτων εκτιμητριών του  $\theta$  και να το συγκρίνετε με τις διασπορές των παραπάνω δύο αμερόληπτων εκτιμητριών.

**ΘΕΜΑ 4 (2.5 μονάδες):**

Έστω  $p$  η πιθανότητα εμφάνισης της ένδειξης Κεφαλή κατά τη ρίψη ενός νομίσματος. Για τον έλεγχο της υπόθεσης  $H_0: p = 0.5$  έναντι της  $H_1: p > 0.5$  καταγράφουμε τον αριθμό των ανεξάρτητων δοκιμών  $X$  που απαιτήθηκαν μέχρι την εμφάνιση της πρώτης Κεφαλής. Αν η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου είναι  $K = \{X > 3\}$ :

i) Να υπολογίσετε το ε.σ.  $\alpha$  του άνω ελέγχου.

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα σφάλματος τύπου II για τον άνω έλεγχο αν  $p = 0.7$ .

**Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ ώρες**

**ΕΥΧΟΜΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**