ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Κανονική εξέταση στη Συναρτησιακή Ανάλυση Ι,

24-1-2017

Θέμα 1. (α) Έστω X διανυσματικός χώρος

(i) Δώστε τον ορισμό του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου και της Hamel βάσης.

(ii) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία στοιχείων του X και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του X, ώστε $< (x_n)_{n\in\mathbb{N}} > \cap < (y_n)_{n\in\mathbb{N}} >= \{0_X\}$. Δείξτε ότι η $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

(β) Έστω X χώρος με νόρμα, $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ και $\{x_i^*\}_{i=1}^n \subset X^*$. Ορίζουμε τον τελεστή $T : X \to X$ ώστε $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x)x_i$.

(i) Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός και φραγμένος.

(ii) Δείξτε ότι $\cap_{i=1}^n Ker\ x_i^* \subset Ker\ T$. Αν επιπλέον τα $\{x_i\}_{i=1}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε $\cap_{i=1}^n Ker\ x_i^* = Ker\ T$.

Θέμα 2. (α) Έστω H χώρος Hilbert.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f(y) =< x, y >$.

(ii) Δείξτε ότι ο τελεστής που σε κάθε $x \in X$ αντιστοιχεί το f_x τέτοιο ώστε $f_x(y) =< x, y >$ είναι γραμμική ισομετρία.

(β) Έστω χώρος Hilbert, Y υπόχωρος του H, $x \in H$ και $y \in Y$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| : z \in Y\}$.

(ii) $x - y \perp Y$.

Θέμα 3. (α)Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X και $x_0 \in X \setminus Y$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$, $Y \subsetneq \mathrm{Ker}\, f$ και $f(x_0) = d(x_0, Y)$.

(β) Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X. Θέτουμε $T : X^* \to Y^*$ με $Tf = f|_Y$. Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Ο T είναι γραμμικός και φραγμένος.

(ii) Ο T είναι έπι.

(iii) Υπολογίστε τη νόρμα $\|T\|$ του T.

Θέμα 4. Έστω X χώρος με νόρμα, $K \subset X$ κυρτό με $0_X \in K^\circ$.

(α) (i) Δώστε τον ορισμό του συναρτησοειδούς Minkowski.

(ii) Δείξτε ότι $\rho_K(x + y) \leq \rho_K(x) + \rho_K(y)$, για κάθε $x, y \in X$.

(iii) Αν $\lambda > 0$, και $L = \lambda K$, δείξτε ότι $\rho_L(x) = \frac{1}{\lambda}\rho_K(x)$, για κάθε $x \in X$.

(iv) Δείξτε ότι $\rho_K = \rho_{\overline{K}}$.

(β) (i) Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεμελιώδες διαχωριστικό θεώρημα.

(ii) Αν $D \subset B[0_x, 1]$, τέτοιο ώστε $\|x^*\| = \sup\{x^*(x) : x \in D\}$ για κάθε $x^* \in X^*$, δείξτε ότι $\overline{co}(D) = B[0_x, 1]$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!