

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**3<sup>ο</sup> εξάμηνο**  
**ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 8/02/2010**

1. Δίνεται το γραμμικό σύστημα  $Ax = b$  όπου

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ -1 & 10 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Να εξετάσετε αν μπορεί να εφαρμοστεί η επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel και αν ναι να γίνουν 2 επαναλήψεις με αρχικό διάνυσμα το μηδενικό διάνυσμα. Να δοθεί επίσης μια εκτίμηση του σφάλματος, στη 2<sup>η</sup> επανάληψη που να μην χρησιμοποιεί τον πίνακα επαναλήψεων της μεθόδου Gauss-Seidel και με τη βοήθεια κατάλληλης διανυσματικής νόρμας της επιλογής σας και της αντίστοιχης φυσικής νόρμα πίνακα.

Δίνεται η γενική εκτίμηση σφάλματος  $\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$ , όπου  $B$  ο αντίστοιχος επαναληπτικός πίνακας.

2. Δίνεται η εξίσωση  $x = 2^{-x}$ . (1)

α) Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση  $\rho$  στο διάστημα  $[\frac{1}{3}, 1]$ .

β) Να εξετάσετε αν είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση της γενικής επαναληπτικής μεθόδου  $x_{k+1} = 2^{-x_k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  στη λύση  $\rho$  της (1) για κάθε  $x_0 \in [\frac{1}{3}, 1]$ .

γ) Να γίνουν 3 επαναλήψεις της μεθόδου με αρχικό  $x_0 = 0.75$ , για την προσέγγιση της λύσης  $\rho$  της (1).

δ) Πόσες επιπλέον επαναλήψεις πρέπει να γίνουν ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο από  $10^{-4}$ .

ε) Ποια είναι η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου; (με αιτιολόγηση).

3. Να υπολογισθεί με τον σύνθετο τύπο ολοκλήρωσης τραπεζίου ( $N=4$ ) το ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx$$

Να βρεθεί το ελάχιστο  $N$  ώστε το σφάλμα με τον σύνθετο τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης τραπεζίου να είναι μικρότερο του  $10^{-4}$ .

4. Εστω  $c_i := l_i(0)$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, n$  όπου  $l_i(x)$  τα πολυώνυμα Lagrange. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες ταυτότητες:

$$\sum_{i=0}^n c_i x_i^j = \begin{cases} 1, & \text{οταν } j = 0 \\ 0, & \text{οταν } j = 1, 2, \dots, n \\ (-1)^n x_0 x_1 \dots x_n, & \text{οταν } j = n+1 \end{cases}$$

**Παρατηρήσεις**

1. Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες

2. Βαθμολογία: Τα θέματα είναι ισοδύναμα.