# ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

## ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

### Σύγκλιση ακολουθίας

- $\lim_{\nu\to+\infty} P_\nu = P$

- Ακολουθία Cauchy $\Leftrightarrow$ συγκλίνει

Όταν-ν $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \nu_0=\nu_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τ-ω $\underline{\forall}\, \nu,\mu\in\mathbb{N}$ να αληθεύει:

$$\|P_\nu - P_\mu\| < \varepsilon$$

συγκλίνει $\Rightarrow$ φραγμένη

### Ομοιόμορφη σύγκλιση

__Ορισμός__: Έστω $E\subseteq\mathbb{R}$, $f_\nu\in E$, $Z\subseteq\mathbb{R}$ κ' $f\in Z$. Η $f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f$ στο $Z$, αν-ν $\forall\,\varepsilon>0$ και __για όλα__ τα $x\in Z$ $\exists\, N(\varepsilon)$ τ-ω $\forall\, \nu>N(\varepsilon)$ να αληθεύει ότι $|f_\nu(x)-f(x)|<\varepsilon$

### Κριτήρια ομοιόμορφης σύγκλισης

**I)** Αν $f_\nu$ συγκλίνει σημειακά στη $f$ στο $E$ κ' $M_\nu=\sup\{|f_\nu-f| : x\in E\}$ τότε η $f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f$ στο $E$, όταν-ν $\lim_{\nu\to+\infty} M_\nu=0$

**II)** Αν $f_\nu\in E$ κ' $f\in E$, αν $\exists$ μηδενική ακολουθία $\alpha_\nu>0\in\mathbb{R}$ τ-ω $\forall\,\nu\in\mathbb{N}$ κ' $\forall\, x\in E$ να αληθεύει: $|f_\nu(x)-f(x)|<\alpha_\nu$ τότε η $f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f$ στο $E$

**III)** Κριτήριο Cauchy: Έστω $f_\nu\in E\subseteq\mathbb{R}$. Τότε $f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f$ στο $E$, αν-ν $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τ-ω $|f_\nu-f_\mu|<\varepsilon$ $\forall\, x\in E$ κ' $\nu,\mu>N(\varepsilon)$

**IV)** Κριτήριο Dini: $f_\nu$ συγκλίνει στη $f$ πάνω σε ένα συμπαγές σύνολο $E$ και $f_\nu$ αύξουσα. Τότε η $f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f$

**Θεώρημα**: Weierstrass: Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ και $f_\nu \in E$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f$ στο $E$. Υποθέτουμε ότι καθεμία των συναρτήσεων $f_\nu$ $\nu \in \mathbb{N}$, είναι συνεχής στο $\xi \in E$. Τότε η $f_\nu$ είναι συνεχής στο $\xi$.

**Θεώρημα**: $f_\nu$ στο $[\alpha,\beta]$ Αν $f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$

$$\lim_{\nu\to+\infty}\int_\alpha^\beta f_\nu(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \lim_{\nu\to+\infty} f_\nu(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

**Πόρισμα**: $f_\nu$ στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f$ στο $[\alpha,\beta]$ Τότε η $F_\nu(x)=\int_\alpha^x f_\nu(t)\,dt$ $x\in[\alpha,\beta]$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt$, $x\in[\alpha,\beta]$

**Θεώρημα**: $f_\nu$ στο ανοιχτό διάστημα $J \supseteq I=[\alpha,\beta]$ Υποθέτουμε ότι $\exists\, x_0\in[\alpha,\beta]$ τ.ω $f_\nu(x_0)$ να συγκλίνει κ' $f'_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha,\beta]$ τότε: 1) $f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f$ στο $[\alpha,\beta]$ και

2) $f'(x)=\lim_{\nu\to+\infty} f'_\nu(x)$ στο $(\alpha,\beta)$

## Όριο συνάρτησης (3)

### Όρια διανυσματικών συναρτήσεων

**Ορισμός**: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^\nu$, $\vec{f}: A \to \mathbb{R}$ και $P$ σημείο συσσώρευσης $A$. Η $f$ έχει όριο το σημείο $L$ του $\mathbb{R}^\mu$ όταν το $x \to P$ όταν-ν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τ-ω να αληθεύει

[α,δ] $\| f(x) - L \| < \varepsilon \ \forall x \in A$ με $0 \leq \|x - P\| < \delta$

Παραδ: ΝΔΟ $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x+2y) = 7$ με χρήση ορισμού

$|3x+2y-7| = |(3x-3)+(2y-4)| \leq |3x-3| + |2y-4|$

$= 3|x-1| + 2|y-2| = 3\sqrt{(x-1)^2} + 2\sqrt{(y-2)^2} \leq$

$\leq 3\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} + 2\sqrt{(y-2)^2+(x-1)^2} = 5\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

Ξέρω ότι: $0 < \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < \delta = \frac{\varepsilon}{5}$

Άρα $|3x+2y-7| < 5\delta < \varepsilon$

### Συνέχεια συνάρτησης

**Συνεχής**:
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$
- Θεωρώ $a_\nu = (x_{a\nu}, y_{a\nu})$ κ' $b_\nu = (x_{b\nu}, y_{b\nu})$

πρέπει $\lim_{\nu\to+\infty} f(a_\nu) = \lim_{\nu\to+\infty} f(b_\nu)$

### Ομοιόμορφη συνέχεια

**Ορισμός**: $f: A \to \mathbb{R}^\mu$, $A \subseteq \mathbb{R}^\nu$. Η $f$ είναι ΟΣ στο $E \subseteq A$ όταν-ν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \ \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ τ-ω $\forall$ τυχαίων σημείων $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in E$ με $\|x_1 - x_2\| < \delta_1$ κ' $\|y_1 - y_2\| < \delta_2$ να ισχύει

$\| f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2) \| < \varepsilon \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots$

- Συνάρτηση Lipschitz
- Συνάρτηση Συστολή

## Συναρτηση Lipschitz

**Ορισμος:** $\vec{f}: A \to R^{\mu}$, $A \subseteq R$. Αν ∃ σταθ $k>0$ τ-ω ∀ $(x_1, y_1)$ κ' $(x_2, y_2)$ του A

$\|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\| \le k \, \|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\|$

Lipschitz → ομοιομορφα συνεχης   $\|\alpha+\beta\| \xrightarrow{R^2} |\alpha+\beta| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

## Συναρτηση συστολη

**Ορισμος:** $\vec{f}: A \to R^{\mu}$, $A \subseteq R^{\nu}$ Αν ∃ σταθ $k>0$ με $0<k<1$ τ-ω

$\|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\| \le k \, \|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\|$ ∀ $(x_1,y_1)$ κ' $(x_2,y_2)$ του A

Συστολη → Lipschitz → ομοιομορφα συνεχης

## Μη ομοιομορφα συνεχης

- ∃ 2 ακολουθ $x_\nu, y_\nu$ του A τ-ω

$\lim_{\nu \to +\infty} (x_\nu - y_\nu) = 0$ κ' $\lim_{\nu \to +\infty} (f(x_\nu) - f(y_\nu)) \neq 0$

- ∃ $\varepsilon' > 0$ και ∃ 2 ακολουθ $x_\nu$ κ' $y_\nu$ του A τ-ω

$\lim_{\nu \to +\infty} (x_\nu - y_\nu) = 0$ κ' $\|f(x_\nu) - f(y_\nu)\| \ge \varepsilon'$

## Διαφορικοι Τελεστες

Πραγματικες συναρτησεις

Κλιση η grad : $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

Laplace : $\vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$   $\nabla^2 f = 0 \Rightarrow$ αρμονικη

Διανυσματικες συναρτησεις   $\vec{\nabla}\vec{F} = div \vec{F} = 0$ → σωληνοειδες

Αποκλιση η div : $\vec{\nabla} \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$

Laplace : $\vec{\nabla}^2 \vec{F} = \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial z} \right) \vec{k}$

Στροφή ή Περιστροφή ή Στροφορμή $= \mathrm{rot}\,\vec{F}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \mathrm{rot}\,\vec{F} = 0 \longrightarrow$ <u>Αστρόβιλο</u> ή <u>συντηρητικό</u>

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

$$\mathrm{div}(f\vec{F}) = \vec{\nabla} f \vec{F} + f\,\mathrm{div}\,\vec{F}$$

$$\mathrm{rot}(f\vec{F}) = f\,\mathrm{rot}\,\vec{F} - \vec{F} \times \vec{\nabla} f$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{F}) = \vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,f) = 0$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{F}) = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dt^2}}$$

<u>Θεώρημα</u> Euler: $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = k f$

$k$: βαθμός ομογένειας

## Σειρές Taylor, Πεπλεγμένες συναρτήσεις

<u>Σειρές:</u> 2 μεταβλητών

**Taylor**: $T_\nu f((x_0,y_0),(x,y)) = f(x_0,y_0) +$

$$+ \frac{1}{1!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(1)} f(x_0,y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(x_0,y_0) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{\nu!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^\nu f(x_0,y_0) + R_\nu$$

**Maclaurin**: Taylor για $(x_0,y_0) = (0,0)$

$$R_\nu((x_0,y_0),(x,y)) = \frac{1}{(\nu+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\nu+1} f(x_0 + x\theta, y_0 + y\theta)$$

$$0 < \theta < 1$$

## Δυναμοσειρές : 1 μεταβλητής

Taylor: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$
$\dots + \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu + R_\nu = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu + R_\nu$

**Maclaurin**: Taylor για $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$R_\nu = \frac{f^{(\nu+1)}(\xi)}{(\nu+1)!} x^{\nu+1}$$

## Πεπλεγμένες συναρτήσεις

$F(x,y) = 0$ : $y = f(x)$ κ' $F(x, f(x)) = 0$

Θεώρημα: $\exists$ λύσης πεπλεγμένων σημείων: Έστω $F(x,y) = 0$
$F: A \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν

- F συνεχής στο A και $F(x_0, y_0) = 0$
- $\exists$ οι μερικές παράγωγοι $F_x, F_y$ και είναι συνεχείς στο I κοντά $(x_0, y_0)$
- $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

Τότε

→ Ορίζεται η $y = f(x)$ : συνεχής με ιδιότητες:
$f(x_0) = y$ και $F(x, f(x)) = 0$

→ $y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$ και $y'' = f''(x) = -\frac{F_y^2 F_{xx} - F_{xy} F_y F_x - F_x F_{yx} - F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}$

$F(x,y,z) = 0$ : $z = f(x,y)$ κ' $F(x, y, f(x,y)) = 0$

Θεώρημα: Έστω $F(x,y,z) = 0$ $F: A \to \mathbb{R}$ κ $(x_0, y_0, z_0)$ εσωτερ. σημείο του A. Αν

- F συνεχής στο A και $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
- $\exists$ $F_x, F_y, F_z$ συνεχής, και
- $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Τότε

→ Ορίζεται $z = f(x,y)$ συνεχής με $f(x_0, y_0) = y$ και $F(x, y, f(x,y)) = 0$

→ $z_x = -\frac{F_x}{F_z}$ κ' $z_y = -\frac{F_y}{F_z}$

Ανώμαλα (ομαλά) σημεία:

Τα σημεία $P_0(x_0,y_0,z_0)$ της επιφάνειας $S$ με εξίσωση $F(x,y,z)=0$, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)=\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)=\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)=0 \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\neq 0 \text{ κ } F(P_0)=0\right)$$

[redacted]

Θεώρημα: $(S)$: $F(x,y,z)=0$ κ' $G(x,y,z)=0$ με $y=y(x)$ κ' $z=z(x)$

$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ κ' $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ είναι τάξης $C^1$ και ισχύει:

$F(x_0,y_0,z_0)=0$ κ' $G(x_0,y_0,z_0)=0$ και επίσης

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ στο $(x_0,y_0,z_0)$, τότε

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad \text{και} \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

## Ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

[redacted] σημείο: Έστω $f:D\to\mathbb{R}$. $P(a_1,a_2,\dots,a_\nu)\to$ Κρίσιμο Αν $\vec{\nabla} f(P)=0$ δηλ. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(P)=\dots=\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(P)=0$

Κρίσιμα σημεία:
- → τοπικό μέγιστο } ακρότατα
- → " ελάχιστο } ακρότατα
- → σαγματικό σημείο

[redacted] σημείο: Έστω $f:D\to\mathbb{R}$ $P(a_1,a_2,\dots,a_\nu)\to$ Σαγματικό σημείο

Όταν είναι κρίσιμο σημείο και δεν είναι ακρότατο. Αυτό σημαίνει ότι δεν διατηρεί το πρόσημο της f κοντά στο P.

**Θεώρημα: Ταξινόμηση κρίσιμων σημείων** (8)

Αν $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^{\nu}$, τάξης $C^2$ και $P(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{\nu 0}) \to$ κρίσιμο σημείο

(1) • ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

$\Delta_1(P) > 0$, $\Delta_2(P) > 0$, $\dots$, $\Delta_\nu(P) > 0$

(2) • ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ

$\Delta_1(P) > 0$, $\Delta_2(P) < 0$, $\dots$, $(-1)^{\nu}\Delta_\nu(P) > 0$

(3) • ΣΑΓΜΑΤΙΚΟ - ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΑΚΡΟΤΑΤΟ

Αν $\forall\, k \in \{1, 2, \dots, \nu\} \to \Delta_k \neq 0$ και δεν αληθεύει (1) ή (2)

(4) • ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΑΠΟΦΑΝΘΟΥΜΕ ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΓΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

$\Delta_k = 0$ (ελέγχω αν η $f$ διατηρεί το πρόσημο κοντά στο $P$)

## Σειρές συναρτήσεων

### Κριτήρια σύγκλισης

• **Θ. Cauchy**: Έστω $f_\nu \in D$. Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $D$, όταν $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ-ω $\mu, \nu > N(\varepsilon)$ με $\mu > \nu$ να ισχύει $|f_{\nu+1}(x) + f_{\nu+2}(x) + \dots + f_{\mu}(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in D$

• **Θ. Weierstrass**: Έστω $f_\nu \in D$. Υποθέτουμε ότι $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ $\exists\, M_\nu > 0$ τ-ω $|f_\nu(x)| \leq M_\nu \quad \forall\, x \in D$. Αν η $\sum_{\nu=0}^{+\infty} M_\nu$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ τότε η $\sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $D$.

• **Θ. Dini**: Έστω $\sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu$ θετικών όρων, συγκλίνει στη συνεχή $f$ στο συμπαγές $D$. Τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

• **Θ. D'Alembert**: Έστω $f_\nu \in D$ και $\Theta_\nu\ (>0)$ τ-ω $0 < |f_\nu(x)| \leq \Theta_\nu \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$ και $\forall\, x \in D$. Υποθέτουμε ότι: $\left|\frac{f_{\nu+1}(x)}{f_\nu(x)}\right| \leq A$, όπου $0 < A < 1$ τότε η $\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $D$

• Θ. Dirichlet: $f_\nu$ κ' $g_\nu \in D$ τ-ω να ικανοποιούν:

i) $\sum_{\nu=0}^{+\infty} g_\nu$ → φραγμένη ii) $f_\nu$ → φθίνουσα κ' συγκλίνει στη μηδενική στο D

Τότε η $\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu g_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο D

• Θ. Abel: $f_\nu$ κ' $g_\nu \in D$. Αν $\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο D και $g_\nu$ → μονότονη κ' ομοιόμορφα φραγμένη στο D. Τότε η $\sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu g_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο D

→ Θ. συνέχειας σειράς: Έστω $\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη f στο D. Τότε η f είναι συνεχής στο $x_0 \in D$, αν $f_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι συνεχής στο $x_0$

→ Θ. ολοκλήρωσης σειράς: Έστω $f_\nu \in$ φραγμένο $[\alpha,\beta]$. Αν $\sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη f στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ κ' αληθεύει: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \left(\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu(x)\right)dx = \sum_{\nu=0}^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f_\nu(x)\,dx\right)$

→ Θ. παραγώγισης σειράς: Έστω $f_\nu$ στο ανοιχτό $[\alpha,\beta]$. Τ-ω
• $\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu(x_0)$ συγκλίνει για κάποιο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ • $\sum_{\nu=1}^{+\infty} f'_\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $h(x)$ στο $[\alpha,\beta]$, Τότε i) $\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ και ii) $f'(x) = \left(\sum_{\nu=1}^{+\infty} f_\nu(x)\right)' = \sum_{\nu=1}^{+\infty} f'_\nu(x) = h(x)$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$

## Δυναμοσειρά

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots = \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu (x-x_0)^\nu$$

**Θεώρημα**: Έστω $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu x^\nu$ Υποθέτουμε: $\lim_{\nu\to+\infty}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \ell$ ή $\lim_{\nu\to+\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \ell$ τότε

• $\ell = 0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ $\forall x$

• $\ell = +\infty$, η " " στο $\mathbb{R}$ μόνο για $x=0$

• Αν $\ell \neq 0$, $\ell \neq +\infty$ η δυναμοσειρά
συγκλίνει στο $\left(-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell}\right) = (-R, R)$, R: ακτίνα σύγκλισης
Δεν συγκλίνει στο $\left(-\infty, -\frac{1}{\ell}\right) \cup \left(\frac{1}{\ell}, +\infty\right)$
δεν μπορούμε να αποφανθούμε για $x = -\frac{1}{\ell}$ και $x = \frac{1}{\ell}$

**Θεώρημα**: Έστω $\sum_{\nu=1}^{+\infty} A(x)$. Υποθέτουμε ότι $\lim \left|\frac{A_{\nu+1}}{A_\nu}\right| = \ell(x)$ τότε (10)

- Αν $\ell(x)<1$ συγκλίνει απόλυτα
- Αν $\ell(x)>1$ δεν συγκλίνει
- δεν μπορούμε να αποφανθούμε Αν $\ell(x)=1$

**Θεώρημα**: Cauchy-Hadamard: Έστω $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu x^\nu$ και $\ell=\overline{\lim_{\nu\to+\infty}}\sqrt[\nu]{|a_\nu|}$

$$R=\begin{cases} 1/\ell & \text{Αν } 0<\ell<+\infty \\ 0 & \text{Αν } \ell=+\infty \\ +\infty & \text{Αν } \ell=0 \end{cases} \quad \text{Τότε}$$

- Συγκλίνει απόλυτα, αν $|x|<R$
- Δεν συγκλίνει, αν $|x|>R$
- Συγκλίνει ομοιόμορφα
  - → Αν $0<R<+\infty$ στο $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ $\forall \varepsilon>0$ με $\varepsilon<R$
  - → Αν $R=+\infty$ σε καθε συμπαγές διάστημα της πραγματικής ευθείας

**Θεώρημα**: συνέχειας δυναμοσειράς
Έστω $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu x^\nu$, με $R$: ακτίνα σύγκλισης. Τότε η δυναμοσειρά είναι συνεχής συνάρτηση ως προς $x$ στο διάστημα $(-R,R)$

**Θεώρημα**: ολοκλήρωσης δυναμοσειράς: Έστω $f(x)=\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu x^\nu$ με $R>0$.
Τότε η $f$ ολοκληρώσιμη σε καθε $[\alpha,\beta]\subset(-R,R)$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta\left(\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu x^\nu\right)dx = \sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu \int_\alpha^\beta x^\nu\,dx$$

**Θεώρημα**: παραγώγισης δυναμοσειράς: Έστω $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu x^\nu = f(x)$, με $R>0$
Τότε η $f$ είναι παραγωγίσιμη $\forall x_0\in(-R,R)$ και αληθεύει:

$$f'(x_0)=\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1}$$, ακτίνα σύγκλισης επίσης $R$

**Θεώρημα**: Abel: Έστω $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu x^\nu$, με $R$. Αν $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu R^\nu$ συγκλίνει στο $\kappa\in\mathbb{R}$
τότε η $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu x^\nu$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο κλειστό $[0,R]$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to R^-}\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu x^\nu = \kappa$$

**Θεώρημα**: Έστω $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu x^\nu$ και $\sum_{\nu=0}^{+\infty} b_\nu x^\nu$ συγκλίνουν στο $(-R,R)$, $R>0$ τότε αν

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{+\infty} b_\nu x^\nu \ \ \forall x\in(-R,R) \implies a_\nu=b_\nu \ \ \forall x\in(-R,R)$$