ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Ισως σας χρειαστούν:

- Σχέση ηλεκτρικού πεδίου **E** και βαθμωτού δυναμικού Φ:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi\,, \tag{1}$$

- Λύση εξίσωσης Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες με αξονική συμμετρία:

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta) \tag{2}$$

- Μερικά πολυώνυμα Legendre ($x = cos\theta$)

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1\,, \\ P_1(x) &= x\,, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

- Επίσης

$$P_\ell(1) = 1, \quad P_\ell(-1) = (-1)^\ell \quad \ell = 0,1,2,\ldots \tag{4}$$

- Τα πολυώνυμα Legendre αποτελούν πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στο διάστημα $-1 \leq x \leq 1$. Έτσι, συναρτήσεις $f(x)$ ορισμένες σε αυτό το διάστημα, μπορούν να γραφούν σαν

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(x)\,, \quad A_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_\ell(x)dx \tag{5}$$

- Πολυπολική ανάπτυξη δυναμικού σε Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{Q_{ij}x_ix_j}{r^5} + \cdots\right) \tag{6}$$

- Ηλεκτρική διπολοκή ροπή

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}')d^3x' \tag{7}$$

- Ηλεκτρική τετραπολική ροπή

$$Q_{ij} = \int (3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij})\rho(\mathbf{x}')d^3x' \tag{8}$$

- Διανυσματικό δυναμικό λόγω πυκνότητας ρεύματος **J**, στην βαθμίδα Coulomb

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}'\,, \tag{9}$$

- Διανυσματικό δυναμικό ρευματοφόρου αγωγού που διαρέεται από ρεύμα I, στην βαθμίδα Coulomb
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I d\boldsymbol{\ell}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \tag{10}$$
- Μαγνητικό πεδίο
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{11}$$

Μαθηματικές σχέσεις που ίσως χρειαστούν:

1.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \tag{12}$$

2.
$$\frac{1}{(1+x)^a} = 1-ax+\frac{1}{2}a(a+1)x^2-\frac{1}{6}a\left(a^2+3a+2\right)x^3+\frac{1}{24}a\left(a^3+6a^2+11a+6\right)x^4+O\left(x^5\right) \tag{13}$$