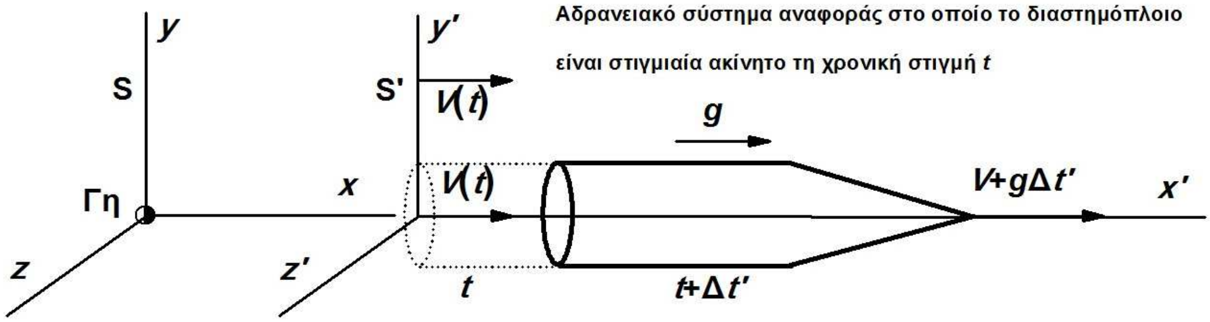
Η Διαστολή του Χρόνου και Ταξίδια στο Διάστημα

Πόσο διαρκεί ένα ταξίδι στο διάστημα αν ληφθεί υπόψη η διαστολή του χρόνου; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό πρέπει να ορίσουμε με σαφήνεια τις συνθήκες του ταξιδιού. Ας υποθέσουμε ότι ένα διαστημόπλοιο ξεκινά από τη Γη με μηδενική αρχική ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t=0$ και κινείται κατά μήκος του άξονα των x με μια σταθερή επιτάχυνση g όπως την αισθάνονται οι επιβάτες του διαστημοπλοίου. Η τιμή της επιτάχυνσης μπορεί να επιλεγεί τέτοια ώστε οι επιβάτες του διαστημοπλοίου να υφίστανται τεχνητή βαρύτητα ίση ή παραπλήσια με αυτήν της Γης. Θα υπολογίσουμε την απόσταση του διαστημοπλοίου από τη Γη, $x(t)$, συναρτήσει του χρόνου t όπως τον μετρά κάποιος στη Γη, και τον αντίστοιχο χρόνο t' που έχει περάσει για τους επιβάτες του διαστημοπλοίου.



Έστω ότι στο σύστημα S της Γης, το οποίο θεωρούμε αδρανειακό, τη χρονική στιγμή t, το διαστημόπλοιο βρίσκεται σε απόσταση $x(t)$ από τη Γη και κινείται με ταχύτητα $V(t)$ (βλ. Σχήμα, διακεκομμένη γραμμή). Τη χρονική στιγμή t, θεωρούμε ένα αδρανειακό σύστημα S΄ που κινείται με σταθερή ταχύτητα $V(t)$ ως προς το σύστημα S, και μέσα στο οποίο το διαστημόπλοιο είναι στιγμιαία ακίνητο. Η φράση «το διαστημόπλοιο κινείται με σταθερή επιτάχυνση g *όπως την αισθάνονται οι επιβάτες του διαστημοπλοίου*» σημαίνει ότι η επιτάχυνση του διαστημοπλοίου στο σύστημα S΄ είναι ίση με g. Επομένως, αν περάσει χρόνος $\Delta t'$ στο σύστημα S΄, και επομένως και για το διαστημόπλοιο, αυτό θα αποκτήσει ταχύτητα $g\Delta t'$ στο σύστημα S΄. Ο αντίστοιχος χρόνος που πέρασε για το σύστημα S της Γης είναι (λαμβάνοντας υπόψη τη διαστολή του χρόνου)

$$\Delta t = \gamma \Delta t', \qquad \text{όπου} \qquad \gamma = 1\Big/\sqrt{1-V^2/c^2}$$

και η νέα ταχύτητα του διαστημοπλοίου στο σύστημα S της Γης είναι (χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό των ταχυτήτων)

$$V(t+\Delta t) = \frac{V(t)+g\Delta t'}{1+\dfrac{V(t)g\Delta t'}{c^2}} = \frac{V(t)+\dfrac{g}{\gamma}\Delta t}{1+\dfrac{V(t)g}{c^2\gamma}\Delta t}.$$

Από τη σχέση αυτή βρίσκουμε ότι

$$\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t}=\frac{\dfrac{g}{\gamma}-\dfrac{V^2(t)g}{c^2\gamma}}{1+\dfrac{V(t)g}{c^2\gamma}\Delta t}.$$

Στο όριο, καθώς $\Delta t \to 0$, αυτή η σχέση δίνει:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{g}{\gamma}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)=\frac{g}{\gamma^3}=g\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{3/2},$$

δηλαδή ότι η επιτάχυνση του διαστημοπλοίου στο σύστημα S της Γης είναι γ^3 φορές μικρότερη από αυτήν που νιώθουν οι επιβάτες του διαστημοπλοίου. Η σχέση αυτή μπορεί να ολοκληρωθεί ως προς *t* για να μας δώσει την ταχύτητα $V(t)$. Έτσι,

$$\int_0^{V(t)}\frac{dV}{\left(1-V^2/c^2\right)^{3/2}}=\int_0^t g\,dt.$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $\dfrac{V}{c}=\sin\theta,\quad dV=c\cos\theta\,d\theta$, οπότε και

$$\int_0^{\sin\theta=\frac{V(t)}{c}}\frac{c\cos\theta\,d\theta}{\left(1-\sin^2\theta\right)^{3/2}}=\int_0^t g\,dt \qquad \text{ή} \qquad \int_0^{\sin\theta=\frac{V(t)}{c}}\frac{c\,d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^t g\,dt.$$

Με τη βοήθεια πινάκων ολοκληρωμάτων (ή καλής μνήμης!)

$$c\left[\tan\theta\right]_0^{\sin\theta=\frac{V(t)}{c}}=gt \qquad \text{ή} \qquad \frac{g}{c}t=\left[\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]_0^{\sin\theta=\frac{V(t)}{c}}=\frac{\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί για να δώσει την $V(t)$:

$$1-\frac{V^2}{c^2}=\left(\frac{c}{gt}\right)^2\frac{V^2}{c^2}, \qquad 1=\frac{V^2}{c^2}\left(1+\frac{c^2}{g^2t^2}\right)$$

και τελικά,

$$V=\frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{c^2}{g^2t^2}}}.$$

Αυτή είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου όπως αυτή παρατηρείται στο σύστημα S της Γης. Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα πλησιάζει ασυμπτωτικά την *c* καθώς $t\to\infty$.

Μπορούμε να λύσουμε ως προς *t* και να βρούμε τη χρονική στιγμή, όπως τη μετρά κάποιος στο σύστημα της Γης, κατά την οποία το διαστημόπλοιο θα κινείται με ταχύτητα *V*:

$$t=\frac{c/g}{\sqrt{\dfrac{c^2}{V^2}-1}}=\frac{V/g}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}=\gamma\frac{V}{g}.$$

Σύμφωνα με την Κλασική Μηχανική, ένα σώμα που κινείται με σταθερή επιτάχυνση g, θα αποκτήσει ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό, c, σε χρόνο $\tau = c/g$. Για $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$, ίση με τη μέση επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης, η σταθερά τ έχει την τιμή

$$\tau = \frac{c}{g} = \frac{3\times 10^8\ \text{m/s}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 3{,}06\times 10^7\ \text{s} = 0{,}97\ \text{y}\,,$$

δηλαδή σχεδόν ένα έτος.

Η ανηγμένη ταχύτητα του διαστημοπλοίου ως προς τη Γη, $\beta = V/c$, είναι

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{c^2}{g^2t^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\tau^2}{t^2}}}$$

η οποία για μεγάλες τιμές του t (δηλαδή για $t \gg c/g = \tau$), δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση:

$$\beta \approx 1 - \frac{\tau^2}{2t^2}\,.$$

Ο αντίστοιχος παράγοντας Lorentz, $\gamma = 1\big/\sqrt{1-V^2/c^2}$, είναι:

$$\gamma = \sqrt{1+\frac{g^2}{c^2}t^2} = \sqrt{1+\frac{t^2}{\tau^2}}$$

ο οποίος για μεγάλες τιμές του t (δηλαδή για $t \gg c/g = \tau$), δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση:

$$\gamma \approx \frac{t}{\tau}\,.$$

Ποια είναι η απόσταση του διαστημοπλοίου από τη Γη μετά την παρέλευση χρόνου t στο σύστημα της Γης; Από τη σχέση $V = dx/dt$ έχουμε

$$dx = \frac{c\,dt}{\sqrt{1+\dfrac{\tau^2}{t^2}}} = c\frac{t\,dt}{\sqrt{\tau^2+t^2}}$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\int_0^{x(t)} dx = c\int_0^t \frac{t\,dt}{\sqrt{\tau^2+t^2}} \qquad \text{ή} \qquad x(t) = c\left[\sqrt{\tau^2+t^2}\right]_0^t$$

και τελικά

$$x(t) = c\left[\sqrt{\tau^2+t^2} - \tau\right].$$

Η κίνηση αυτή ονομάζεται *υπερβολική κίνηση*. Για μεγάλες τιμές του t (δηλαδή για $t \gg c/g = \tau$), είναι

$$x(t) \approx c\left(t-\tau\right) \approx ct\,.$$

Θα βρούμε τώρα τον χρόνο που περνά στο σύστημα του διαστημοπλοίου, t', συναρτήσει του χρόνου t που περνά στο σύστημα της Γης. Η σχέση ανάμεσα σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα στη Γη, dt, και το αντίστοιχο χρονικό διάστημα στο διαστημόπλοιο, dt', είναι: $dt = \gamma dt'$. Επομένως, όταν στη Γη περνά συνολικός χρόνος t, ο αντίστοιχος συνολικός χρόνος στο διαστημόπλοιο είναι:

$$t' = \int_0^t dt \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \,,$$

$$t' = \int_0^t dt \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{\tau^2}{t^2}}} = \int_0^t dt \sqrt{\frac{\tau^2 / t^2}{1 + \tau^2 / t^2}} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{\tau^2}}}$$

$$t' = \tau \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{\tau^2 + t^2}} = \tau \left[\ln\left(t + \sqrt{\tau^2 + t^2} \right) \right]_0^t$$

και τελικά

$$t' = \tau \ln\left(\frac{t}{\tau} + \sqrt{1 + \frac{t^2}{\tau^2}} \right).$$

Για μεγάλες τιμές του t (δηλαδή για $t \gg c/g = \tau$), είναι $t' \approx \tau \ln\left(\frac{2t}{\tau} \right)$. Μπορούμε να λύσουμε ως προς t, τον χρόνο που μετριέται στη Γη, συναρτήσει του χρόνου στο διαστημόπλοιο, t':

$$t = \tau \frac{e^{t'/\tau} - e^{-t'/\tau}}{2} = \tau \sinh\left(\frac{t'}{\tau} \right).$$

Για μεγάλες τιμές του t (δηλαδή για $t \gg c/g = \tau$), είναι $t \approx \frac{\tau}{2} e^{t'/\tau}$.

Αν αντικαταστήσουμε για το t συναρτήσει του t' στο $x(t)$ βρίσκουμε την απόσταση $x(t')$ συναρτήσει του t':

$$x(t') = c\tau \left[\cosh\left(\frac{t'}{\tau} \right) - 1 \right]$$

το οποίο για μεγάλες τιμές του t δίνει: $x(t') \approx \frac{c\tau}{2} e^{t'/\tau}$.

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται μερικές χαρακτηριστικές τιμές αυτών των μεγεθών για $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$, στο οποίο αντιστοιχεί η παράμετρος $\tau = 0,97\ \mathrm{y}$.

t **(y)**	***t΄*** **(y)**	***β***	***γ***	***x*** **(l.y.)**	**Αντικείμενο**
1	0,9	0,717 8	1,44	0,42	
5,3	2,3	0,983 7	5,56	4,4	Εγγύτατος του Κενταύρου
9,5	2,9	0,994 8	9,82	8,6	Σείριος (Ελ!)
10	2,94	0,995 33	10,4	9,1	
100	5,1	0,999 953	103	99	
10^3	7,4	0,999 999 53	1031	999	
10^4	9,6	0,999 999 995 3	10 309	10^4	
10^5	12	0,999 999 999 953	103 092	10^5	Διάμετρος του Γαλαξία μας
10^6	14	$1-0,47\times10^{-12}$	10^6	10^6	
$2,5\times10^6$	15	$1-0,75\times10^{-13}$	$2,6\times10^6$	$2,5\times10^6$	Γαλαξίας της Ανδρομέδας
10^7	16	$1-0,47\times10^{-14}$	10^7	10^7	
10^8	19	$1-0,47\times10^{-16}$	10^8	10^8	
10^9	21	$1-0,47\times10^{-18}$	10^9	10^9	
10^{10}	23	$1-0,47\times10^{-20}$	10^{10}	10^{10}	
$1,32\times10^{10}$	23,3	$1-0,27\times10^{-20}$	$1,35\times10^{10}$	$1,32\times10^{10}$	Γαλαξίας Abell 1835 IR1916
$9,3\times10^{10}$	25,2	$1-0,54\times10^{-22}$	$9,6\times10^{10}$	$9,3\times10^{10}$	Διάμετρος του ορατού σύμπαντος

y = έτος   l.y. = έτος φωτός

Ο εγγύτατος του Κενταύρου είναι το πλησιέστερο σε εμάς άστρο. Ο γαλαξίας της Ανδρομέδας (Μ31) είναι ο πλησιέστερος σε εμάς γαλαξίας. Ο γαλαξίας Abell 1835 IR1916 είναι το πιο μακρινό αντικείμενο, η απόσταση του οποίου έχει μετρηθεί.

Σχόλια

Οι χρόνοι που υπολογίστηκαν πιο πάνω δεν προβλέπουν στάση του διαστημοπλοίου στους διάφορους προορισμούς. Αν το διαστημόπλοιο θα σταματήσει σε κάποιο προορισμό, η καλύτερη μέθοδος θα ήταν στη μέση του ταξιδιού να εφαρμόσει επιβράδυνση $-g$ για το υπόλοιπο του ταξιδιού. Σε αυτή την περίπτωση ο χρόνος για ολόκληρο το ταξίδι μέχρι απόσταση x, θα είναι ίσος με 2 φορές τον χρόνο που απαιτείται για να καλυφθεί η μισή απόσταση του τελικού προορισμού: $t = \frac{1}{c}\sqrt{x(x+4c\tau)}$.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα φαίνονται να εισηγούνται ότι τα μεγάλα ταξίδια στο διάστημα γίνονται δυνατά χάρη στη διαστολή του χρόνου που προβλέπεται από τη Σχετικότητα. Τα πράγματα είναι όμως πολύ διαφορετικά αν εξεταστούν μερικές πολύ σημαντικές δυσκολίες που υπάρχουν:

1. Μολονότι κινούμενοι με ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός στο κενό κάνουμε τα ταξίδια σύντομα για τους ταξιδιώτες, ο χρόνος περνά με πολύ πιο γρήγορο ρυθμό στη Γη. Η επιστροφή στη Γη θα ήταν μάλλον άσκοπη.

2. Η ενέργεια που απαιτείται για να επιταχυνθεί ένα διαστημόπλοιο σε τέτοιες ταχύτητες είναι τεράστια. Από τη Σχετικιστική Δυναμική είναι γνωστό πως όταν ένα σώμα με μάζα ηρεμίας m_0 επιταχυνθεί σε ταχύτητα που αντιστοιχεί σε παράγοντα Lorentz γ, συμπεριφέρεται σαν να έχει μάζα ίση με $m = \gamma m_0$, η ολική του ενέργεια είναι $E = \gamma m_0 c^2$ και η κινητική του ενέργεια είναι $K = (\gamma - 1) m_0 c^2$. Ένα αντικείμενο μάζας ηρεμίας 1 kg κινούμενο με $\gamma = 1000$, θα έχει μάζα ίση με ένα τόνο και κινητική ενέργεια $K = 9 \times 10^{19}$ J. Για να παραχθεί τόση ενέργεια θα πρέπει να υποστεί σχάση και να μετατραπεί πλήρως σε ενέργεια μια μάζα ίση με 999 φορές το 1 kg. Οι πυρηνικοί αντιδραστήρες έχουν μια απόδοση περίπου 3 % και δεν θα μπορούσαν να παράσχουν παρά μόνο ένα πολύ μικρό κλάσμα της ενέργειας που θα απαιτείτο για να επιταχύνουν ακόμη και το ίδιο το σχάσιμο υλικό που θα μετέφεραν.
3. Η ακτινοβόληση των επιβατών και των συσκευών από τις κοσμικές ακτινοβολίες θα είναι σοβαρότατο πρόβλημα. Στο διάστημα υπάρχει η κοσμική ακτινοβολία η οποία δημιουργεί σοβαρά προβλήματα ακόμη και σε μικρά ταξίδια μέσα στο ηλιακό μας σύστημα. Η κοσμική ακτινοβολία αποτελείται κυρίως από πρωτόνια, με μια πυκνότητα περίπου 1 πρωτόνιο ανά κυβικό μέτρο, και τα οποία κινούνται ήδη με ταχύτητες που πλησιάζουν την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Το ότι το ταξίδι θα διαρκέσει λίγο δεν είναι πλεονέκτημα. Ένα σώμα με μια διατομή $1\ \mathrm{m}^2$ εγκάρσια στην κατεύθυνση κίνησής του, κινούμενο κατά μια απόσταση ίση με ένα έτος φωτός ($9{,}5 \times 10^{15}$ m) θα «σαρώσει» έναν όγκο ίσο με $9{,}5 \times 10^{15}\ \mathrm{m}^3$ και θα επομένως βομβαρδιστεί με 10^{16} πρωτόνια. Αν η ταχύτητα του διαστημοπλοίου αντιστοιχεί σε $\gamma = 1000$ τα πρωτόνια που θα βομβαρδίζουν το διαστημόπλοιο θα έχουν ενέργειες της τάξης των $E = \gamma m_p c^2 = 1000 \times 938\ \mathrm{MeV} = 1\ \mathrm{TeV}$. Αυτή είναι μόλις 1/7 της ενέργειας στην οποία επιταχύνονται τα πρωτόνια στον επιταχυντή LHC που κατασκευάστηκε στο CERN.
4. Ένα άλλο σοβαρό πρόβλημα θα οφείλεται στην σκόνη που υπάρχει στο διάστημα. Μικροί κόκκοι ύλης αιωρούνται στο διάστημα, απομεινάρια αστρικών και άλλων εκρήξεων. Αν το διαστημόπλοιο, κινούμενο με $\gamma = 1000$, συγκρουστεί με ένα κόκκο σκόνης μάζας ηρεμίας $m_0 = 1\ \mu\mathrm{g}$, θα «αισθανθεί» ότι συγκρούεται με μια μάζα ίση με $m = \gamma m_0 = 1000 \times 1\ \mu\mathrm{g} = 1\ \mathrm{mg}$ που κινείται με ταχύτητα $V = 0{,}9999995c$ και έχει κινητική ενέργεια ίση με $K = (\gamma - 1) m_0 c^2 = 9 \times 10^{10}$ J. Αυτή είναι πολύ μεγάλη ενέργεια και αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια ενός πλοίου μάζας 10 000 τόνων που κινείται με ταχύτητα σχεδόν 500 km/h. Προφανώς ο κόκκος της σκόνης θα διαπεράσει το διαστημόπλοιο, προκαλώντας σοβαρές ζημιές.

Από αυτά φαίνεται ότι τα ταξίδια στο διάστημα παρουσιάζουν σημαντικές τεχνικές δυσκολίες.

Κίνηση διαστημοπλοίου με σταθερή επιτάχυνση *g*, όπως αυτή γίνεται αισθητή στους επιβάτες του

$\tau = c / g$ Μεγέθη στο σύστημα της Γης, S: t, x, V, β, γ. Μεγέθη στο σύστημα του διαστημοπλοίου, S΄: t'

Μέγεθος	**Εξίσωση**	**Προσέγγιση για** $t \gg c/g = \tau$
Επιτάχυνση του διαστημοπλοίου ως προς τη Γη, συναρτήσει του χρόνου στο σύστημα αναφοράς της Γης, t	$\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{g}{\left(1+\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)^{3/2}}$	$\dfrac{dV}{dt} \approx \dfrac{g\tau^2}{t^3}$
Ταχύτητα του διαστημοπλοίου ως προς τη Γη, συναρτήσει του χρόνου στο σύστημα αναφοράς της Γης, t	$V = \dfrac{c}{\sqrt{1+\dfrac{\tau^2}{t^2}}}$	$V \approx c\left(1-\dfrac{\tau^2}{2t^2}\right)$
Χρονική στιγμή, t, στο σύστημα της Γης, κατά την οποία το διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα V	$t = \gamma \dfrac{V}{g} = \beta\gamma\tau$	
Ανηγμένη ταχύτητα του διαστημοπλοίου συναρτήσει του χρόνου t, ως προς τη Γη	$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\tau^2}{t^2}}}$	$\beta \approx 1-\dfrac{\tau^2}{2t^2}$
Χρονική στιγμή, t, στο σύστημα της Γης, κατά την οποία το διαστημόπλοιο κινείται με ανηγμένη ταχύτητα β	$t = \dfrac{\tau}{\sqrt{\dfrac{1}{\beta^2}-1}}$	
Παράγοντας Lorentz του διαστημοπλοίου συναρτήσει του χρόνου t, ως προς τη Γη	$\gamma = \sqrt{1+\dfrac{t^2}{\tau^2}}$	$\gamma \approx \dfrac{t}{\tau}$
Χρονική στιγμή, t, στο σύστημα της Γης, κατά την οποία το διαστημόπλοιο κινείται με παράγοντα Lorentz ίσο με γ	$t = \tau\sqrt{\gamma^2-1}$	$t \approx \gamma\tau$
Απόσταση του διαστημοπλοίου από τη Γη, συναρτήσει του χρόνου t.	$x(t) = c\left[\sqrt{\tau^2+t^2}-\tau\right]$	$x(t) \approx ct$
Χρονική στιγμή, t, στο σύστημα της Γης, κατά την οποία το διαστημόπλοιο απέχει από τη Γη απόσταση x	$t = \dfrac{1}{c}\sqrt{x(x+2c\tau)}$	$t \approx \dfrac{x}{c}$
Χρόνος που πέρασε για τους επιβάτες του διαστημοπλοίου συναρτήσει του χρόνου που πέρασε στη Γη, t.	$t' = \tau \ln\left(\dfrac{t}{\tau}+\sqrt{1+\dfrac{t^2}{\tau^2}}\right)$	$t' \approx \tau \ln\left(\dfrac{2t}{\tau}\right)$
Χρόνος t που πέρασε στη Γη, όταν για τους επιβάτες του διαστημοπλοίου έχει περάσει χρόνος t'	$t = \tau \sinh\left(\dfrac{t'}{\tau}\right)$	$t \approx \dfrac{\tau}{2}e^{t'/\tau}$
Απόσταση του διαστημοπλοίου από τη Γη, στο σύστημα της Γης, συναρτήσει του χρόνου t' που πέρασε στο σύστημα του διαστημοπλοίου	$x(t') = c\tau\left[\cosh\left(\dfrac{t'}{\tau}\right)-1\right]$	$x(t') \approx \dfrac{c\tau}{2}e^{t'/\tau}$