ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

«ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ»

31 Ιανουαρίου 2013

Απαντήστε και στα τέσσερα θέματα.

ΘΕΜΑ 1^{ο}

(A) Δίνονται ευθεία $\varepsilon : x-1=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-5}{3}$ και επίπεδο Π με εξίσωση $x+2y+z-10=0$.

(i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε είναι παράλληλη προς το επίπεδο Π.

Μονάδες 0,5

(ii) Να βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας δ που είναι τομή του επιπέδου Π με το επίπεδο Σ που περιέχει το σημείο $\mathrm{M}(0,1,2)$ και την ε.

Μονάδες 1

(B) Να αποδείξετε ότι η επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-8z+5=0$$

είναι σφαίρα, της οποίας να προσδιορίσετε το κέντρο, την ακτίνα και την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της στο σημείο της $\mathrm{P}(1,2,8)$.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 2^{ο}

(i) Να διερευνηθεί και να λυθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα Σ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x+\ \ y+\lambda z&=1\\ x+\lambda y+\ \ z&=1\\ \lambda x+\ \ y+\ \ z&=1 \end{aligned}$$

(ii) Στην περίπτωση απειρίας λύσεων συνδέσατε το σύνολο λύσεων Λ του Σ με το σύνολο λύσεων Λ_0 του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος Σ_0.

(iii) Κατασκευάστε μία γραμμική απεικόνιση της οποίας ο πυρήνας να είναι το σύνολο Λ_0.

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{r}=(x,y)\to f(\mathbf{r})=(x',y')$ απεικονίζει το σημείο $\mathrm{M}(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου στην ορθή προβολή του $\mathrm{M}'(x',y')$ πάνω στην ευθεία

$$\varepsilon : \mathbf{r}=t\mathbf{u},\ t\in\mathbb{R},\ u=(\cos\theta,\sin\theta).$$

(i) Να εκφράσετε την εικόνα $f(\mathbf{r})$ συναρτήσει των $\mathbf{r}$ και $\mathbf{u}$.

(ii) Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση f είναι γραμμική.

(iii) Να βρείτε τον πίνακα της f ως προς τη βάση $\{\mathbf{i}=(1,0),\mathbf{j}=(0,1)\}$ του $\mathbb{R}^2$.

(iv) Να εκφράσετε τα x', y' συναρτήσει των x, y και θ.

(v) Να βρείτε μία βάση του πυρήνα της f και τη γεωμετρική αναπαράστασή του.

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 4ο

A) Έστω στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ με $v_i = (v_{1i}, v_{2i}, \ldots, v_{ni})$ για κάθε i και έστω $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $b \in [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ αν και μόνον αν έχει λύση το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου οι στήλες του πίνακα A σχηματίζονται από τα στοιχεία $v_1, v_2, \ldots, v_k$ και $x = (x_1, \ldots, x_k)^T$.

Μονάδες 1

B) Δίνονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{V}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\} \text{ και } \mathrm{V}_2 = [(1, 2, -1), (0, 10, -6), (2, -1, 1)].$$

(i) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση για τον καθέναν από τους V_1 και V_2.

(ii) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του υποχώρου $\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2$.

(iii)Βρείτε τη διάσταση του $\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2$. Δώστε θεωρητική εξήγηση για την απάντησή σας (χωρίς απόδειξη).

Μονάδες 1,5

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες **Καλή επιτυχία!**