

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**3<sup>ο</sup> εξάμηνο**  
**ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 2/2012**

1. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \\ -3 & 12 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Να ελεγχθεί πρώτα αν η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει και αν συγκλίνει, να γίνουν 2 επαναλήψεις της μεθόδου Gauss-Seidel, με μηδενικό αρχικό διάνυσμα. Να δοθεί επίσης μια καλή εκτίμηση του σφάλματος στη 2<sup>η</sup> επανάληψη με κατάλληλη νόρμα. Δίνεται η γενική εκτίμηση σφάλματος

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|, \text{ όπου } B \text{ ο αντίστοιχος επαναληπτικός πίνακας.}$$

2. α) Δίνεται ο απλός τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης Simpson

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu)$$

Να κατασκευαστεί ο σύνθετος τύπος Αριθμητικής ολοκλήρωσης Simpson με όρο σφάλματος.

β) Χρησιμοποιώντας το σύνθετο τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης Simpson να βρεθεί προσέγγιση του ολοκληρώματος  $I = \int_1^2 \ln x dx$  με σφάλμα μικρότερο από 0.001.

3. α) Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής  $p$  σε μορφή Lagrange και Newton που παρεμβάλλει τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in [1,3] \end{cases}$$

στα σημεία 0,1,2,3.

β) Να υπολογιστεί επίσης το σφάλμα παρεμβολής  $\max_{0 \leq x \leq 3} |f(x) - p(x)|$ .

4. Έστω η γενική επαναληπτική μέθοδος  $x_{k+1} = x_k - \sin x_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

α) Αν η μέθοδος συγκλίνει, να βρεθεί που συγκλίνει καθώς και η ταχύτητα σύγκλισής της.

β) Να αποδείξετε ότι συγκλίνει  $\forall x_0 \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ .

**Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**