

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

7-3-2017 (Πτυχίο).

Άσκηση 1. (α) Βρείτε την εξίσωση του εγγύτατου, του κάθετου και του ευθειοποιού επιπέδου στο τυχαίο σημείο της κυλινδρικής έλικας

$$(c) : r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 3t), t \in \mathbb{R}. \quad (0,9\mu)$$

(β) Βρείτε όλες τις αναπαραμετρήσεις της καμπύλης

(γ) : $\rho(t) = (2 \cos(3t), 2 \sin(3t), 8t + 1), t \in \mathbb{R}$ ως προς παράμετρο μήκος τόξου s με αρχή μέτρησης το σημείο $\rho(\pi)$ $(0,9\mu)$. Αν $t \in [-\pi, \pi]$, να βρείτε το διάστημα τιμών του s . $(0,2\mu)$

(γ) Για την καμπύλη $(\gamma) : \rho(t) = (2 \cos(3t), 2 \sin(3t), 8t + 1), t \in \mathbb{R}$ του προηγούμενου ερωτήματος, βρείτε την καμπύλη $(\gamma_1) : \rho_1(t)$ των κέντρων καμπυλότητάς της. $(0,5\mu)$

Άσκηση 2. Έστω η επιφάνεια S που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $g(t) = (t, 0, e^t), t \in (1, 2)$ του επιπέδου xoz περί τον άξονα των z .

(i) Προσδιορίστε τις παραμετρικές εξισώσεις της επιφάνειας και των παραμετρικών καμπύλων της S και παραστήστε γραφικά την επιφάνεια και τις παραμετρικές καμπύλες.

(ii) Προσδιορίστε το είδος των σημείων της επιφάνειας.

Άσκηση 3. Έστω η επιφάνεια

$$S : r(u, v) = (u + v, uv, u^2v), (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Αν $C : \phi(s) = r(u(s), v(s)) s \in I$ είναι γεωδαισιακή καμπύλη της επιφάνειας με $\phi(0) = (2, 1, 1), \phi'(0) = (3, 3, 4)$, όπου s φυσική παράμετρος, προσδιορίστε

(i) το διάνυσμα κάθετης καμπυλότητας της C στο σημείο $\phi(0)$,

(ii) το διάνυσμα καμπυλότητας $\phi''(0)$ της καμπύλης στο σημείο $\phi(0)$.

Θέμα 4. Δείξτε ότι για τη στοιχειώδη επιφάνεια $S : r(u, v), (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, κλάσης 2, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Η καμπύλη $u = u_0$ είναι γεωδαισιακή της S ,

(ii) $\Gamma_{22}^1 = 0$,

(iii) $GG_1 + FG_2 - 2GF_2 = 0$,

όπου τα διάφορα μεγέθη της επιφάνειας που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις υπολογίζονται στο (u_0, v) .

Καλή Επιτυχία!