

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

5ο ΕΞΑΜΗΝΟ - ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2013, ΩΡΑ 12.00 - 15.00

Θέμα 1 (Λήμμα Gronwall) Έστω r, k, f πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις με $r(t) \geq 0, k(t) \geq 0$ και $r(t) \leq f(t) + \int_a^t k(s)r(s)ds, a \leq t \leq b$. Να αποδειχθεί ότι

$$r(t) \leq \int_a^t f(s)k(s)\exp\left[\int_s^t k(v)dv\right]ds + f(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Θέμα 2 (Θεώρημα Αστάθειας) Έστω το σύστημα $x' = F(x)$, όπου $F(0) = 0$ και $x = x(t), t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι, υπάρχει μία συνάρτηση $V(x)$ συνεχώς διαφορίσιμη και ορισμένη σε μία γειτονιά S του $x(t) \equiv 0, t \geq 0$, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: (i) $V(0) = 0$, (ii) η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη, και (iii) σε κάθε γειτονιά της αρχής, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x , για το οποίο $V(x) > 0$, τότε η μηδενική λύση $x(t) \equiv 0, t \geq 0$, είναι ασταθής.

Θέμα 3 Να αποδειχθεί ότι υπάρχει λύση των παρακάτω προβλημάτων αρχικών τιμών σε μία περιοχή του $x = 0$. Στη συνέχεια να εξεταστεί το μονοσήμαντο των λύσεων.

$$(i) y'(x) = [x - \sin(y(x))]^{\frac{6}{5}}, \quad y(0) = 0 \text{ και } (ii) y'(x) = [x - \cos(y(x))]^{\frac{6}{7}}, \quad y(0) = 0.$$

Θέμα 4 Να βρεθούν οι χαρακτηριστικοί αριθμοί (ή πολλαπλασιαστές Floquet) του παρακάτω συστήματος:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} \sin(2t) - 1 & 0 \\ \sin(2t) & -1 \end{bmatrix} x(t).$$

Θέμα 5 (i) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία του συστήματος $x' = x + 3y + 2, y' = x - y - 2$. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί ο τύπος και το είδος της ευστάθειας αυτών και να σχεδιαστεί ποιοτικά το αντίστοιχο επίπεδο φάσεων.

(ii) Έστω το σύστημα $x' = x - 2xy, y' = -y + 4xy$. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία και να μελετηθεί η ευστάθεια αυτών.

Θέμα 6 Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης, να περιγραφούν οι τροχιακές δομές για τα διάφορα πεδία μεταβολής της παραμέτρου λ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης της διαφορικής εξίσωσης: $x' = x^2 + (\lambda - 1)x - \frac{1}{2}(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$.

Θέμα 7 Να βρεθεί ο τύπος ευστάθειας της αρχής, για τα διάφορα πεδία μεταβολής της παραμέτρου λ , του συστήματος: $x' = (\lambda + 1)x^3 + xy, y' = -2y + \lambda x^2 + xy$.

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ - ΣΤΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 9

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!