

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες):**

**A)** Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή  $\mu$  και γνωστή τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Χρησιμοποιώντας το λόγο μέγιστων πιθανοφανειών να κατασκευαστεί κρίσιμη περιοχή  $K$  για τον έλεγχο  $H_0: \mu = \mu_0$  με εναλλακτική  $H_1: \mu \neq \mu_0$  με ε.σ.  $\alpha$ , όπου  $\mu_0$  γνωστή σταθερά.

**B)** Έστω  $X_1 = X$  ένα τυχαίο δείγμα μίας παρατήρησης από την κατανομή Poisson με άγνωστη παράμετρο  $\lambda > 0$ . Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας  $1/\lambda$ .

(Υπενθυμίζουμε ότι  $e^\lambda = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$ ).

**ΘΕΜΑ 2 (3 μονάδες):**

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την Εκθετική κατανομή με άγνωστη παράμετρο  $\theta > 0$ .

- i) Να βρεθεί επαρκής και πλήρης δειγματοσυνάρτηση, έστω  $T$ , για το  $\theta$ .
- ii) Χρησιμοποιώντας χωρίς απόδειξη γνωστές σχέσεις πείτε ποια είναι η κατανομή της τ.μ.  $T$ .
- iii) Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell να βρεθεί ΑΕΕΔ για το  $1/\theta$ .
- iv) Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell να βρεθεί ΑΕΕΔ για το  $1/\theta^2$ .
- v) Να βρεθεί  $E\left(\frac{1}{T^k}\right)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .
- vi) Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell και χρησιμοποιώντας το (v) να βρεθεί ΑΕΕΔ για το  $\theta^k$ .

**ΘΕΜΑ 3 (3 μονάδες):**

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την συνάρτηση κατανομής

$F(x) = 1 - \frac{\theta^3}{x^3}$ ,  $x \geq \theta$ , όπου  $\theta > 0$  άγνωστη παράμετρος.

- i) Να εκτιμήσετε σημειακά το  $\theta$  με τη μέθοδο των ροπών.
- ii) Να εκτιμήσετε σημειακά το  $\theta$  με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.
- iii) Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση, έστω  $T$ , για το  $\theta$ .
- iv) Να εξετάσετε αν η Ε.Μ.Π. που βρήκατε στο (ii) είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\theta$ .
- v) Να βρεθεί η κατανομή της  $Y = T/\theta$ .
- vi) Να κατασκευαστεί συμμετρικό  $100(1-\alpha)\%$  Δ.Ε. για το  $\theta$ .

**ΘΕΜΑ 4 (1.5 μονάδες):**

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την  $N(\theta, c\theta^2)$ , όπου  $c > 0$  γνωστή σταθερά και  $\theta \in \mathbb{R}$  άγνωστη παράμετρος.

- i) Να βρεθεί επαρκής δειγματοσυνάρτηση για το  $\theta$ .
- ii) Χρησιμοποιώντας μόνο τη δειγματοσυνάρτηση  $\bar{X}$  να κατασκευαστεί ένα συμμετρικό  $100(1-\alpha)\%$  Δ.Ε. για το  $\theta$ .

**Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ ώρες**

**ΕΥΧΟΜΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**